

УДК 629.7.62—506.2.001

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОДНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ
ЧЕЛОВЕКА-ОПЕРАТОРА ДЛЯ ОЦЕНКИ ЕГО ХАРАКТЕРИСТИК
В ЗАДАЧЕ СЛЕЖЕНИЯ ЗА СЛУЧАЙНО
ДВИГАЮЩИМСЯ ОБЪЕКТОМ**

И. В. Курочкин, А. А. Мальцев

Рассмотрено приложение стохастической модели человека-оператора для оценки характеристик слежения за случайно двигающимся объектом, подверженным воздействию аддитивной смеси белого и «цветного» шумов. Получены аналитические выражения для минимально возможной погрешности слежения оператора. Рассмотренная модель использовалась для расчета максимального числа объектов, которые могут контролироваться оператором с заданной точностью слежения.

1. Как известно [1–3], одним из способов моделирования деятельности человека-оператора является представление оператора в виде статистически оптимальной системы оценивания и управления. В работах [4, 5] исследовалась стохастическая модель оператора применительно к задаче оптимизации параметров контура ручной стабилизации динамического объекта, находящегося под воздействием случайных возмущений внешней среды. В то же время достаточно широкий класс деятельности оператора связан со слежением за объектом, движущимся случайным образом. В настоящей работе рассматривается приложение данной модели для оценки количественных характеристик деятельности оператора, выполняющего функцию слежения за динамическим объектом, который подвержен воздействию аддитивной смеси белого и «цветного» шумов. Возмущения подобного типа могут, например, удовлетворительно описывать движение случайно маневрирующего объекта по неизвестной априори траектории.

2. Предположим, что оператор следит за объектом, динамика которого описывается следующей системой стохастических дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = -ax + p(t) + \xi(t); \quad (1)$$

$$\dot{p} = -bp + v(t), \quad (2)$$

где $x(t)$ — координата объекта, $p(t)$ — «цветной» шум, формирующий стохастическую траекторию объекта, $\xi(t)$ — белый шум, формирующий «быстрое» маневрирование объекта на траектории, $v(t)$ — задающий белый шум фильтра (2), $1/a$ — постоянная времени объекта, $1/b$ — характерное время изменения траектории. Шумы $\xi(t)$, $v(t)$ полагаются гауссовыми с нулевыми средними и интенсивностями q и V соответственно.

Предположим также, что оператор наблюдает только координату $x(t)$, при этом считывание оператором показаний индикаторного устройства описывается уравнением вида

$$z(t) = hx(t) + \zeta_{\text{оп}}(t), \quad (3)$$

где h — коэффициент усиления индикатора, $\zeta_{\text{оп}}(t)$ — шум наблюдения оператором показаний индикаторного устройства. Шум $\zeta_{\text{оп}}$ полагается белым гауссовым с нулевым средним и интенсивностью $r_{\text{оп}}$.

При сделанных предположениях, как следует из стохастической модели оператора [4, 5], оценка состояния динамического объекта (1) опишется следующими уравнениями фильтра Калмана:

$$\dot{\hat{x}} = -a\hat{x} + \hat{p} + k_1(z(t) - h\hat{x}(t)); \quad (4)$$

$$\dot{\hat{p}} = -b\hat{p} + k_2(z(t) - h\hat{x}(t)), \quad (5)$$

где k_1, k_2 — коэффициенты усиления фильтра.

Оптимальные значения коэффициентов k_1, k_2 определяются из условия минимума среднего квадрата ошибок фильтрации $\tilde{x} = \hat{x} - x$ и $\tilde{p} = \hat{p} - p$. Ошибки \tilde{x} и \tilde{p} подчиняются стохастическим уравнениям, которые следуют из (1) — (5):

$$\dot{\tilde{x}} = -(a + k_1 h)\tilde{x} + \tilde{p} + k_1 \zeta_{\text{оп}} - \xi(t); \quad (6)$$

$$\dot{\tilde{p}} = -b\tilde{p} - k_2 h \tilde{x} + k_2 \zeta_{\text{оп}} - v(t). \quad (7)$$

На основании известных правил линейного преобразования шумов [6] из (6), (7) можно получить уравнения для моментов второго порядка переменных \tilde{x}, \tilde{p} :

$$\dot{\langle \tilde{x}^2 \rangle} = -2(a + k_1 h)\langle \tilde{x}^2 \rangle + 2\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle + k_1^2 r_{\text{оп}} + q; \quad (8)$$

$$\dot{\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle} = -(a + b + k_1 h)\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle - k_2 h \langle \tilde{x}^2 \rangle + \langle \tilde{p}^2 \rangle + k_1 k_2 r_{\text{оп}}; \quad (9)$$

$$\dot{\langle \tilde{p}^2 \rangle} = -2b\langle \tilde{p}^2 \rangle - 2k_2 h \langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle + k_2^2 r_{\text{оп}} + V. \quad (10)$$

Используя условие минимума среднеквадратичных ошибок оценок $\partial\langle \tilde{x}^2 \rangle / \partial k_1 = \partial\langle \tilde{x}^2 \rangle / \partial k_2 = \partial\langle \tilde{p}^2 \rangle / \partial k_1 = \partial\langle \tilde{p}^2 \rangle / \partial k_2 = 0$, из уравнений (8) — (10) можно найти следующие выражения для оптимальных значений коэффициентов усиления фильтра Калмана через моменты второго порядка переменных \tilde{x}, \tilde{p}^* :

$$k_1^* = h \langle \tilde{x}^2 \rangle^* / r_{\text{оп}}, \quad k_2^* = h \langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^* / r_{\text{оп}}. \quad (11)$$

Здесь моменты $\langle \tilde{x}^2 \rangle^*, \langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^*$ находятся из решения нелинейных уравнений типа Риккати, которые получаются из системы (8) — (10) при подстановке в нее выражений (11):

$$\dot{\langle \tilde{x}^2 \rangle^*} = -2a \langle \tilde{x}^2 \rangle^* - (h^2/r_{\text{оп}})(\langle \tilde{x}^2 \rangle^*)^2 + 2\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^* + q; \quad (12)$$

$$\dot{\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^*} = -(a + b)\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^* - (h^2/r_{\text{оп}})\langle \tilde{x}^2 \rangle^* \langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^* + \langle \tilde{p}^2 \rangle^*; \quad (13)$$

* Здесь и в дальнейшем оптимальные величины будем обозначать звездочкой, стоящей вверху символа.

$$\langle \tilde{p}^2 \rangle^* = -2b \langle \tilde{p}^2 \rangle^* - (h^2/r_{\text{оп}}) (\langle \tilde{x} \tilde{p} \rangle^*)^2 + V. \quad (14)$$

Система уравнений (12)–(14) описывает минимально возможные среднеквадратичные погрешности оценок оператором координат объекта, находящегося под воздействием аддитивной смеси белого и «цветного» шумов.

3. Исследуем стационарный режим работы оператора. В этом случае система уравнений (12)–(14) имеет точное аналитическое решение следующего вида:

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle^* = \frac{q(2ab + 4b^2 + (\mu^* + b)^2 - (\mu_1^2 + b^2)) + 4V}{(2ab + (\mu^* + b)^2 - (\mu_1^2 + b^2))(\mu^* + a + 2b)}; \quad (15)$$

$$\langle \tilde{p}^2 \rangle^* = 2V(b + \mu^*)/((\mu^* + 2b)^2 - \mu_1^2). \quad (16)$$

Здесь $\tilde{\mu}^* = a + k_1^* h = (\mu_1^2 + b^2 + 2b(\mu_1^2 + h^2 V/r_{\text{оп}} b^2)^{1/2} - b)$ имеет смысл обратной постоянной времени фильтра по каналу оценки координаты $x(t)$, $\mu_1 = a^2 + (h^2/r_{\text{оп}})$, q — обратной постоянной времени одномерного фильтра (при отсутствии возмущений $p(t)$, $V = 0$).

Выражения (15), (16) описывают предельные точностные возможности человека-оператора при его сложении за случайно двигающимся объектом (1). Как видно из (15), (16), минимально возможная погрешность сложения определяется параметрами контролируемого объекта, индикатора, характеристиками шумов, действующих на объект, и интенсивностью шума наблюдения оператором показаний индикаторного устройства.

При сильном шуме наблюдения ($r_{\text{оп}} \rightarrow \infty$) оператор практически не имеет возможности оценивать переменные состояния объекта ($\hat{x} \approx 0$, $\hat{p} \approx 0$). В этом случае $\tilde{\mu}^* \rightarrow \mu_1$, $\mu_1 \rightarrow a$ и погрешность сложения, как следует из (15), совпадает с дисперсией координаты объекта:

$$\langle \tilde{x}^2 \rangle^* \approx \langle x^2 \rangle = \langle x_1^2 \rangle + \langle x_2^2 \rangle = q/2a + V/2ab(a + b).$$

Если «цветной» шум отсутствует ($V = 0$), то $\tilde{\mu}^* = \mu_1$ и выражение (15) переходит в формулу для среднеквадратичной погрешности сложения за одномерным объектом [5]: $\langle \tilde{x}^2 \rangle^* = q/(a + \mu_1)$.

4. В качестве примера использования предложенной стохастической модели человека-оператора рассмотрим две задачи: оценки минимально возможной погрешности сложения оператором за несколькими объектами и оценки максимального количества случайно двигающихся объектов, которые могут контролироваться оператором с заданной точностью сложения.

Следуя [1, 2], из выражения (3) удобно ввести отношение сигнал-шум оператора при сложении за единичным объектом:

$$\rho_{\text{оп}} = \pi h^2 \langle x^2 \rangle / r_{\text{оп}}.$$

Тогда интенсивность шума наблюдения $r_{\text{оп}}$ можно записать в виде

$$r_{\text{оп}} = \pi h^2 \langle x^2 \rangle / \rho_{\text{оп}}.$$

Если оператор осуществляет контроль за n объектами одновременно, то интенсивность шума считывания оператором показаний по каждо-

му i -му каналу индикатора увеличивается из-за распределения внимания между контролируемыми объектами. В работах [1, 2] было предложено следующее эмпирическое описание зависимости интенсивности шума наблюдения оператора от числа контролируемых объектов:

$$r_{\text{оп}i} = \pi h_i^2 \langle x_i^2 \rangle f_i^{-1} / \rho_{\text{оп}}, \quad (17)$$

где f_i — коэффициент доли внимания, уделяемой оператором i -му объекту. Коэффициенты f_i при этом должны удовлетворять условию нормировки: $\sum_{i=1}^n f_i = 1$.

Предположим, что оператор наблюдает за множеством объектов с одинаковыми динамическими и статистическими характеристиками ($h_i = h$, $\langle x_i^2 \rangle = \langle x^2 \rangle$), и внимание оператора равномерно распределено между объектами ($f_i = 1/n$). В этом случае выражение (17) можно записать так:

$$r_{\text{оп}} = \pi h^2 \langle x^2 \rangle n / \rho_{\text{оп}}. \quad (18)$$

Если известно отношение сигнал/шум оператора $\rho_{\text{оп}}$ при однокоординатном слежении [7], то, исходя из полученного выражения, можно определить интенсивность шума наблюдения оператором показаний i -го канала индикатора в зависимости от числа контролируемых объектов и, подставляя значение $r_{\text{оп}i}$ в формулу (15), найти минимально возможную погрешность слежения $\langle \tilde{x}^2 \rangle^*$ за каждым i -м объектом.

Рассмотренная модель позволяет решить и обратную задачу оценки максимального числа объектов, контролируемых оператором с заданной степенью точности $\langle \tilde{x}^2 \rangle_0$. По $\langle \tilde{x}^2 \rangle_0$ из выражения (15) можно определить максимально допустимую интенсивность шума наблюдения $r_{\text{оп}i}^0$ и требуемое отношение сигнал/шум: $\rho_{\text{оп}i}^0 = \pi h^2 \langle x^2 \rangle / r_{\text{оп}i}^0$. Затем из формулы (18) можно найти максимально возможное число объектов, контролируемых оператором, функциональные возможности которого при однокоординатном слежении характеризуются отношением сигнал/шум $\rho_{\text{оп}}$. В этом случае формулу (18) удобно записать в виде

$$n = \rho_{\text{оп}} / \rho_{\text{оп}i}^0.$$

Как следует из данного выражения, оценка максимально возможного количества контролируемых с заданной тоностью объектов пропорциональна отношению сигнал/шум оператора при однокоординатном слежении $\rho_{\text{оп}}$ и обратно пропорциональна требуемому для заданной точности слежения $\langle \tilde{x}^2 \rangle_0$ отношению сигнал/шум оператора $\rho_{\text{оп}i}^0$.

Пример расчета требуемого отношения сигнал/шум $\rho_{\text{оп}i}^0$ в зависимости от отношения «быстрой» и «медленной» дисперсий координаты

объекта $x(t)$ ($D^2 = \langle x_1^2 \rangle / \langle x_2^2 \rangle = qV^{-1}b(a+b)$) и отношения постоянной времени объекта к характерному времени его траектории ($\tau = b/a$) представлен в табл. 1. Требуемая точность слежения определялась 5% от диапазона шкалы индикатора, который принимался равным $5\langle x^2 \rangle^{1/2}$.

Данные табл. 1 использовались для оценки предельного числа контролируемых с заданной точностью объектов в зависимости от отношения сигнал/шум оператора $\rho_{\text{оп}}$. Полученные зависимости при различных D и $\tau = 0,01$ представлены на рис. 1. Приведенные графики позволяют по известному отношению сигнал/шум

Таблица 1

D^2	τ		
	0,01	0,02	0,03
0	14,1	22,0	23,2
0,1	17,3	26,6	33,0
0,2	34,6	45,5	53,5
0,3	81,6	92,5	100,4

шум ρ_{op} , характеризующему возможности конкретного оператора при однокоординатном слежении, оценить максимальное количество объектов, которое может контролировать оператор с требуемой точностью, в зависимости от характеристик их маневренности (D , τ) на неизвестных априори траекториях. Как видно из рисунка, присутствие «быстрых» случайных движений объекта, вызванных воздействиями типа белого шума (больше D), значительно уменьшает эффективность слежения оператора.

Отношение сигнал/шум оператора ρ_{op} при однокоординатном слежении, которое необходимо для выполнения расчетов, может быть определено экспериментально, например, при помощи методики, изложенной в работе [7].

В заключение отметим, что описанный выше способ оценки предельного количества контролируемых с заданной точностью объектов может быть распространен и на объекты с более сложной динамикой.

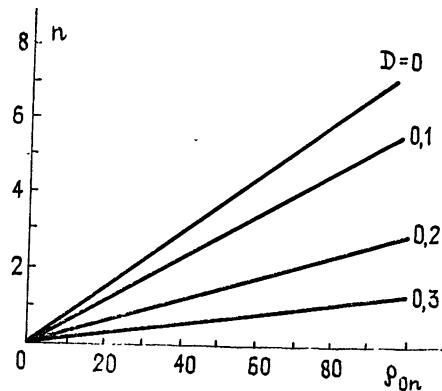


Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baron S. — IEEE Trans. Rel., 1973, R-22, № 3, p. 157.
2. Kleinman D. L. — IEEE Trans. Syst., 1976, SMC-6, № 2, p. 164.
3. Куклев Е. А., Печурин Н. В., Прокопенков Ю. П., Свешников О. В. В кн.: Всесоюзная конференция «Теория адаптивных систем и ее применения». Тезисы докладов и сообщений. — М. — Л., 1983, с. 11.
4. Курочкин И. В., Мальцев А. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 1, с. 60.
5. Курочкин И. В., Мальцев А. А. — Автоматика и телемеханика, 1981, № 8, с. 35.
6. Медич Дж. Статистически оптимальные линейные оценки и управление. — М.: Мир, 1973.
7. Курочкин И. В., Мальцев А. А., Малахов А. Н. В кн.: Всесоюзная конференция «Теория адаптивных систем и ее применения». Тезисы докладов и сообщений — М — Л., 1983, с. 258.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 сентября 1983 г.

THE USE OF ONE STOCHASTIC MAN-OPERATOR MODEL FOR ESTIMATION OF ITS CHARACTERISTICS IN A PROBLEM OF TRACKING FOR A RANDOMLY MOVING OBJECT

I. V. Kurochkin, A. A. Mal'tsev

Approximation of a stochastic man-operator model is considered for estimation of characteristics of tracking for a randomly moving object being under the action of additive mixture of white and «coloured» noises. Analytical expressions have been derived for the minimal possible error of the operator tracking. The model considered is used for calculation of the maximal number of objects which may be controlled by the operator with the given accuracy of tracking.