ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVII, № 10 *РАДИОФИЗИКА* *1984*

УДК 621.371.332.4

К ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ ВОЛН НЕОДНОРОДНОЙ СЛОИСТОЙ СРЕДОЙ СО СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Ю. А. Синицын

В рамках гамильтоновского формализма получена система уравнений переноса с граничными условиями, описывающая распространение волн в слоистой среде с объемными неоднородностями и случайно-неровными границами Данная модель может, например, описывать рассеяние радиоволн ледовыми покровами. Получены в общем виде некоторые аналитические решения системы уравнений.

Задача о рассеянии волн слоистой средой с объемными неоднородностями и случайными границами возникает, например, при интерпретации данных дистанционного зондирования ледовых и снежных покровов, радиофизические исследования которых весьма интенсивно развиваются в последнее время [1–3].

Эффективный метод решения данной проблемы в микроволновой области спектра основан на использовании переноса излучения [4]. В рамках этого метода был проведен учет крупномасштабных неровностей границ слоев и наличия рэлеевских объемных рассеивателей, однородно распределенных в слое для моделей снега [5], было рассмотрено влияние неоднородностей в виде сфер и эллипсоидов, статистически однородно заполняющих плоскопараллельный слой [6]. В приведенных работах было проведено численное решение уравнений переноса, однако в данной проблеме интерес представляют также аналитические решения, которые дают возможность получить наглядное представление о механизмах рассеяния и проследить зависимость характеристик рассеянного сигнала от параметров льда. В радиолокации наряду со стационарными задачами определения сечения рассеяния волн [7] широко используется импульсное зондирование ледовых покровов [2, 3] для определения толщины льда. Поэтому возникает задача об учете временной зависимости сигнала в рамках уравнения переноса. Такая система уравнений была получена феноменологически в работе [8]. Там же были рассмотрены некоторые аналитические решения, относящиеся к влиянию шероховатых границ слоя на вид рассеянного сигнала.

В данной работе проведен вывод кинетических уравнений для функции распределения интенсивности электромагнитного поля в слоистой среде с неровными границами и объемными неоднородностями. В отличие от широко распространенного в теории рассеяния метода получения уравнений переноса, основанного на использовании уравнения Бете—Солпитера [9–11], в настоящей работе система уравнений выведена с помощью интегрирования цепочек уравнений для корреляционных функций, аналогично методу Боголюбова в кинетической теории [12]. Такой подход дает возможность единым образом рассматривать эволюцию моментов поля любого порядка (в том числе и среднего поля), а также в ряде случаев не прибегать к суммированию последовательностей диаграмм, что является удобным. Метод интегрирования цепочек уравнений для корреляционных функций использовался при исследовании взаимодействия когерентной и стохастической подсистем в различных средах [13], а также при анализе динамических систем, находящихся под воздействием внешних случайных сил [14].

В отличие от работы [8], где приведены аналитические результаты, относящиеся к влиянию шероховатостей поверхности льда на структуру рассеянного сигнала, в данной работе рассмотрены решения полученной системы уравнений для случаев малого и большого числа объемных неоднородностей, а также для анизотропного объемного рассеяния. В первом случае использовано приближение времени релаксации, в котором уравнения сводятся к дифференциальным. Во втором случае в кинетических уравнениях в объеме основную роль играет интегральный член, описывающий быструю изотропизацию излучения и дающий решение автомодельного типа (в смысле независимости от граничных условий). При этом связь распределения с источниками на границе слоя задается с помощью закона сохранения. В третьем случае рассмотрена ситуация, когда сечения рассеяния на неоднородностях в вертикальном и горизонтальном направлениях существенно различны.

1. Вывод уравнений, описывающих рассеяние электромагнитных волн слоистой системой со случайно-шероховатыми границами и объемными неоднородностями диэлектрической проницаемости, будем проводить в рамках гамильтоновского формализма. Функция Гамильтона такой системы имеет вид

$$\mathrm{H} = \int dV_1 \frac{E_1^2 + H_1^2}{8\pi} + \sum_{\alpha=2}^{n} \int dV_\alpha \frac{\varepsilon_\alpha E_\alpha^2 + H_\alpha^2}{8\pi}, \tag{1}$$

где первое слагаемое представляет собой энергию поля в верхней среде (вакууме), а второе в слоях, характризуемых диэлектрической проницаемостью ε_α. Для случая ледовых покровов целесообразно ограничиваться числом слоев $n = 3$ ($\alpha = 2$ соответствует слою снега, $\alpha = 3$ — лед, далее по глубине расположен слой воды, имеющий $\varepsilon \to \infty$).

Диэлектрическая проницаемость слоя с номером α имеет вид

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{\alpha 0} + \varepsilon_\alpha^r(\boldsymbol{r}) + \varepsilon_\alpha^f(\boldsymbol{r}), \tag{2}$$

где $\varepsilon_{\alpha 0} = \mathrm{const}$, ε_α^r описывает плавные изменения диэлектрической проницаемости, ε_α^f — добавка, обусловленная случайно расположенными примесями (ε_α^r, $\varepsilon_\alpha^f \ll \varepsilon_{\alpha 0}$).

Рассмотрим случай, когда толщины слоев существенно превосходят длину волны. При этом каждый слой представляет собой многомодовую систему, а модель в целом — совокупность слоев, «заполненных» излучением. Электромагнитные волны в слоях связаны между собой граничными условиями на случайно-неровных границах.

Введем комплексные амплитуды волн a, a^* с помощью соотношения [15]

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \frac{c}{2\pi\sqrt{\varepsilon_{\alpha 0}}} \sum_{e} \sum_{\sigma=\pm} \int d\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma \frac{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma}}{\sqrt{\omega_\alpha(k_\alpha)}} \left[a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)\, e^{i\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma \boldsymbol{r}} + \text{к.с.}\right], \tag{3}$$

где $\boldsymbol{A}_\alpha$ — вектор-потенциал поля в α-слое ($\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\alpha = 0$), c — скорость света в вакууме, $\omega_\alpha = c_\alpha k_\alpha$, $c_\alpha = c/\sqrt{\varepsilon_{\alpha 0}}$, $\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma$ — волновой вектор, суммирование по векторам поляризации $\boldsymbol{e}$ осуществляется в плоскости, перпендикулярной направлению волнового вектора (вектор $\boldsymbol{e}$ может изменять направление непрерывным образом, при этом суммирование по e следует понимать как интегрирование по направлениям e). Индекс σ принимает два значения: $\sigma=\pm$, так что индексу «+» соответствуют волны, распространяющиеся вверх ($k^{+}_{\alpha z}>0$), «—» — волны, распространяющиеся вниз ($k^{-}_{\alpha z}<0$) (ось z направлена вертикально вверх). Гамильтониан системы, выраженный через амплитуды a, a^* волн, имеет вид

$$\mathrm{H}=\mathrm{H}_1+\sum_{\alpha=2}^{n}(\mathrm{H}_\alpha+\mathrm{H}_{\alpha V}),\quad \mathrm{H}_1=\sum_{e,\sigma}\int d\boldsymbol{k}_1^\sigma\,\omega_1(k_1)\,a^*_{1e}(\boldsymbol{k}_1^\sigma)\,a_{1e}(\boldsymbol{k}_1^\sigma),$$

$$\mathrm{H}_\alpha=\sum_{e,\sigma}\int d\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma\,\omega_\alpha(k_\alpha)\,a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)\,a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma),\quad \mathrm{H}_{\alpha V}=\sum_{ee'}\sum_{\sigma\sigma'}\int d\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma d\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha\,W_{\alpha ee'}\times \tag{4}$$

$$\times(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma,\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\,a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)\,a_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha).$$

Слагаемое $\mathrm{H}_{\alpha V}$ соответствует рассеянию электромагнитных волн объемными неоднородностями, а матричный элемент рассеяния равен

$$W_{\alpha ee'}=\frac{\sqrt{\omega_\alpha(k_\alpha)\,\omega_\alpha(k'_\alpha)}}{2\varepsilon_{\alpha 0}}\,(e_{k_\alpha^\sigma},e_{k'^{\sigma'}_\alpha})\,\delta\varepsilon_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma-\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha), \tag{5}$$

где $\delta\varepsilon_\alpha$ — фурье-компонента неоднородностей диэлектрической проницаемости ($\delta\varepsilon=\varepsilon^r+\varepsilon^f$).

Динамические уравнения для амплитуд имеют вид

$$\frac{\partial a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)}{\partial t}=-i\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)},\quad \frac{\partial a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)}{\partial t}=i\frac{\delta\mathrm{H}}{\delta a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma)}. \tag{6}$$

Заметим, что, производя усреднение динамических уравнений (6) по фазам, в рамках рассмотренного метода легко получить для среднего поля уравнения, соответствующие приближению Бурре для уравнения Дайсона.

Поскольку в экспериментах по дистанционному зондированию льда, как правило, измеряется интенсивность рассеянного поля, введем функцию распределения интенсивности поля следующим образом:

$$f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma,\boldsymbol{r},t)=\int d\boldsymbol{q}\,e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\langle a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma+\boldsymbol{q}/2)\,a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma-\boldsymbol{q}/2)\rangle. \tag{7}$$

Здесь и далее угловые скобки будут означать усреднение по ансамблю фаз комплексных амплитуд. Функция (7) аналогична функции распределения Вигнера, используемой в квантовой статистике [16], или функции когерентности в теории распространения волн [9]. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда фазы отдельных волн хаотизированы, так что среднее значение, стоящее под интегралом, отлично от нуля в узкой области $q\sim 0$. При этом введенная функция описывает пакеты волн, имеющие неопределенность порядка $q\sim l^{-1}$, где l — характерные масштабы неоднородностей системы [17]. С функцией $f_{\alpha e}$ можно связать, например, плотность энергии в слое с помощью соотношения

$$\mathscr{E}_\alpha=\sum_{e,\sigma}\int d\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma\,\omega_\alpha(k_\alpha)\,f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^\sigma), \tag{8}$$

откуда легко получим связь f с интенсивностью излучения в телесном угле.

При получении уравнений для функций распределения воспользуемся динамическими уравнениями для амплитуд (6), откуда имеем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + i\left[\omega_\alpha\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) - \omega_\alpha\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right]\right\}\left\langle a^*_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\, a_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right\rangle = -i\sum_{e'',\sigma'}\int d\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha\left\{\left\langle W_{\alpha e e'}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha\right)\times\right.\right.$$

$$\times\, a^*_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) a_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\Big\rangle - \Big\langle W_{\alpha e' e}\left(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha, \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\times \tag{9}$$

$$\left.\left.\times\, a^*_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\, a_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right\rangle\right\}.$$

Заметим, что в соответствии с (2) матричный элемент W можно выразить в виде суммы:

$$W_{\alpha e e'} = W^r_{\alpha e e'} + W^f_{\alpha e e'}, \tag{10}$$

где $W^r_{\alpha e e'}$ и $W^f_{\alpha e e'}$ представляют собой матричные элементы рассеяния волн на крупномасштабных и мелкомасштабных неоднородностях диэлектрической проницаемости. Функция $W^r_{\alpha e e'}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ имеет острый максимум вблизи $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$. В соответствии с этим слагаемое в правой части уравнения (9), содержащее W^r, можно разложить в ряд по $\boldsymbol{q}$, оставив только слагаемые, диагональные по поляризации $\boldsymbol{e}$ и направлению распространения σ. Считая, что $\varepsilon^r_\alpha \ll \varepsilon_{\alpha 0}$, можно пренебречь тем, что волновой пакет имеет конечную ширину (так как масштабы изменения $\varepsilon^r(\boldsymbol{r})$ значительно превосходят все параметры размерности длины, характеризующие пакет), т. е. положить

$$\langle a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \boldsymbol{q}/2)\, a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}'^\sigma_\alpha)\rangle = f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \boldsymbol{q}/2)\,\delta(\boldsymbol{k}'^\sigma_\alpha - \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \boldsymbol{q}/2),$$

$$\langle a^*_{\alpha e}(\boldsymbol{k}'^\sigma_\alpha)\, a_{\alpha e}(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \boldsymbol{q}/2)\rangle = f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \boldsymbol{q}/2)\,\delta(\boldsymbol{k}'^\sigma_\alpha - \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \boldsymbol{q}/2).$$

Матричный элемент W^r при этом приводится к виду

$$W^r_{\alpha e e'}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}, \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) \approx \frac{1}{2}\,\omega_\alpha(k_\alpha)\frac{\varepsilon^r_\alpha(\boldsymbol{q})}{\varepsilon^0_\alpha}. \tag{11}$$

Раскладывая далее разность частот в левой части (9) в ряд по $\boldsymbol{q}$ и совершая преобразование Фурье по $\boldsymbol{q}$, получаем

$$\frac{\partial f^\sigma_{\alpha e}}{\partial t} + \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha}\frac{\partial f^\sigma_{\alpha e}}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\partial f^\sigma_{\alpha e}}{\partial \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha} = -i\int d\boldsymbol{q}\, e^{-i\boldsymbol{q}\boldsymbol{r}}\times$$

$$\times\sum_{e',\sigma'}\int d\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha\left\{\left\langle W^f_{\alpha e e'}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha\right) a^*_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) a_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\right\rangle - \right. \tag{12}$$

$$\left. - \left\langle W^f_{\alpha e' e}\left(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha, \boldsymbol{k}^\sigma_\alpha + \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right) a^*_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\, a_{\alpha e}\left(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha - \frac{\boldsymbol{q}}{2}\right)\right\rangle\right\}.$$

Здесь

$$f^\sigma_{\alpha e} = f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}^\sigma_\alpha).$$

Дифференциальный оператор в левой части выражения (12) совпадает с оператором Лиувилля в кинетическом уравнении Больцмана и описывает эволюцию функции распределения для волнового пакета в среде с плавными неоднородностями. Для получения замкнутого уравнения для функции распределения необходимо выразить корреляционные функции, входящие в прямую часть (12), через f. Уравнения для корреляционных функций получаются аналогично уравнению (9) и имеют вид

$$\{\partial/\partial t + i\,[\omega_\alpha(k'_\alpha) - \omega_\alpha(k''_\alpha)]\}\,\langle W^f_{\alpha e''e'}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\, a^*_{\alpha e''}(\boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha)\, a_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\rangle =$$

$$= -i \sum_{e_1,\sigma_1} \int d\boldsymbol{k}_1^{\sigma_1} \{\langle W^f_{\alpha e' e_1}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha, \boldsymbol{k}^{\sigma_1}_\alpha)\, W^f_{\alpha e'' e'}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\, a^*_{\alpha e''}(\boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha)\, a_{\alpha e_1}(\boldsymbol{k}^{\sigma_1}_\alpha)\rangle -$$

$$- \langle W^f_{\alpha e_1 e''}(\boldsymbol{k}_1^{\sigma_1}, \boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha)\, W^f_{\alpha e'' e'}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\, a^*_{\alpha e_1}(\boldsymbol{k}_1^{\sigma_1})\, a_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\rangle\}. \qquad (13)$$

Как видно из (12), (13), замкнутых уравнений для функций распределения f в общем случае не получается. В частных случаях удается провести расцепление высших корреляторов и таким образом замкнуть систему уравнений. Так, например, если сечения рассеяния на неоднородностях значительно меньше квадратов расстояния между ними, а расстояния между неоднородностями существенно превосходят длину электромагнитных волн, такое расцепление возможно. Для этого заметим, что матричные элементы W^f_α содержат фурье-компоненты флуктуационной части ε^f. Эти компоненты определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon^f_\alpha(q) = \sum_l \xi_{\alpha l}(q)\, e^{-iqR_l}, \qquad (14)$$

где $\boldsymbol{R}_l$ — радиусы-векторы координат неоднородностей. Входящие в (13) произведения матричных элементов будут, таким образом, содержать выражения, которые для первого слагаемого в (13) с точностью до медленно меняющихся функций от $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{q}$ имеют вид

$$W^f_\alpha(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha, \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1})\, W^f_\alpha(\boldsymbol{k}_\alpha, \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha) \sim \sum_{m,n} \xi_{\alpha m}(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha - \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1}) \times$$

$$\times\, \xi_{\alpha n}(\boldsymbol{k}_\alpha - \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha) \exp\{-i\,[(\boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha - \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1})\boldsymbol{R}_m + (\boldsymbol{k}_\alpha - \boldsymbol{k}'^{\sigma'}_\alpha)\boldsymbol{R}_n]\}. \qquad (15)$$

Малость размеров неоднородностей по сравнению с расстоянием между ними дает возможность удержать в выражении (15) только слагаемые с $m=n$. Так как в рассматриваемом приближении спектр неоднородности $\xi_{\alpha m}$ является широким, то можно считать, что $\xi_{\alpha m}$ слабо зависит от номера неоднородности m. При этом

$$W^f_{\alpha e'' e_1}(\boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha, \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1})\, W^f_{\alpha e_1 e''}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}') \sim \rho\, |\xi_\alpha(\boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha - \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1})|^2\, \delta(\boldsymbol{k}''^{\sigma''}_\alpha - \boldsymbol{k}_1^{\sigma_1} + \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'), \qquad (16)$$

где ρ — концентрация неоднородностей. В силу сделанных вначале предположений о малости величины флуктуаций диэлектрической проницаемости, при расцеплении корреляторов в (13) следует удержать только диагональные по $\boldsymbol{e}$ и σ слагаемые, так как недиагональные члены будут давать вклады, имеющие более высокий порядок по ε^f_α.

С учетом сказанного коррелятор вида $\langle WWa^*a\rangle$ можно представить как $|W|^2 f$. Интегрируя затем (13) по времени и подставляя результат в (12), получаем замкнутые уравнения для функций распределения в слоях

$$\frac{\partial f^+_{1e}}{\partial t} + c^+ \frac{\partial f^+_{1e}}{\partial \boldsymbol{r}} = 0,$$

$$\frac{\partial f^{\sigma}_{\alpha e}}{\partial t}+\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial k^{\sigma}_\alpha}\frac{\partial f^{\sigma}_{\alpha e}}{\partial r}-\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial r}\frac{\partial f^{\sigma}_{\alpha e}}{\partial k^{\sigma}_\alpha}=4\pi\sum_{e',\sigma'}\int dk'^{\sigma'}_\alpha \times$$

$$\times |W^f_{\alpha e e'}(k^{\sigma}_\alpha, k'^{\sigma'}_\alpha)|^2 \{f_{\alpha e'}(k'^{\sigma}_\alpha)-f_{\alpha e}(k^{\sigma}_\alpha)\}\,\delta(\omega_\alpha(k'_\alpha)-\omega_\alpha(k_\alpha)). \quad (17)$$

Квадрат модуля матричного элемента $|W^f_\alpha|^2$ описывает вероятность рассеяния на неоднородностях волны, имеющей волновой вектор $k'^{\sigma'}_\alpha$ и поляризацию e', в состояние с k^{σ}_α и e. При этом

$$|W^f_{\alpha e e'}(k^{\sigma}_\alpha, k'^{\sigma'}_\alpha)|^2=\rho\omega_\alpha(k_\alpha)\,\omega_\alpha(k'_\alpha)\,(4\varepsilon^2_{\alpha 0})^{-1}\,|\xi(k^{\sigma}_\alpha-k'^{\sigma}_\alpha)|^2\,(e_{k^{\sigma}_\alpha}, e_{k'^{\sigma'}_\alpha})^2. \quad (18)$$

Для неоднородностей, малых по сравнению с длиной волны, $|\xi|^2=\text{const}$ и из (18) следует выражение для рэлеевского сечения рассеяния. Уравнения (17) имеют вид кинетического уравнения Больцмана для рассеяния на статистических неоднородностях.

Уравнение (17) с матричным элементом (18) описывает некогерентное рассеяние волн на малых объемных неоднородностях. Другие предельные случаи (например, «взаимное влияние» неоднородностей) также могут быть рассмотрены с помощью данного подхода, однако они выходят за рамки настоящей работы.

Следует отметить, что при выводе уравнения (17) не были учтены эффекты когерентности, которые могут иметь место при двукратном прохождении волны через слой неоднородности. Это накладывает дополнительные условия на угол падения волны от источника, который не должен быть близким к нормальному (соответствующие неравенства приведены в [18]).

В стационарном случае уравнения (17) можно преобразовать к уравнениям теории переноса в виде [4].

Полученную систему уравнений для функций распределения интенсивности поля в слоях (17) необходимо дополнить условиями на статистически неровных границах слоев. Выводу граничных условий для поля при наличии неровностей посвящено большое число работ (см., например, [10] и цитируемую там литературу).

Для описания крупно- и мелкомасштабных неровностей наиболее часто применяются методы Кирхгофа и возмущений. При наличии широкого спектра флуктуаций высот и углов наклона поверхностей используется комбинация этих методов, многопараметрические функции распределения [19] и т. д. При выводе замкнутой системы уравнений мы рассмотрим общий вид граничных условий для электромагнитного поля.

Так, на границе слоев α и $\alpha+1$, при $z=l_\alpha$, имеем

$$\begin{aligned} a_{\alpha e}(k^+_\alpha) &= \sum_{e'}\int dk^-_\alpha V^{(2)}_{\alpha e e'}(k^+_\alpha, k^-_\alpha)\,a_{\alpha e'}(k^-_\alpha)+\\ &+\sum_{e'}\int dk^+_{\alpha+1} U^{(1)}_{\alpha e e'}(k^+_\alpha, k^+_{\alpha+1})\,a_{\alpha+1,e}(k^+_{\alpha+1}),\\ a_{\alpha+1,e}(k^-_\alpha) &= \sum_{e'}\int dk^+_{\alpha+1} V^{(1)}_{\alpha+1,ee'}(k^-_{\alpha+1}, k^+_{\alpha+1})\,a_{\alpha+1,e'}(k^+_{\alpha+1})+\\ &+\sum_{e'}\int dk^-_\alpha U^{(2)}_{\alpha e e'}(k^-_{\alpha+1}, k^-_\alpha)\,a_{\alpha e'}(k^-_\alpha), \end{aligned} \quad (19)$$

аналогично для $\overset{*}{a}_\alpha$, $\overset{*}{a}_{\alpha+1}$. Здесь $U^{(1)}_\alpha$, $V^{(1)}_\alpha$, $U^{(2)}_\alpha$, $V^{(2)}_\alpha$ описывают соответственно вероятности прохождения и отражения волн на верхней (с индексом (1)) и нижней (с индексом (2)) границах α-слоя. Образуя с помощью (19) квадратичные по амплитуде величины и усредняя по ансамблю фаз, получаем граничные условия для функции распределения при $z=l_\alpha$ в виде ($\alpha\geqslant 2$)

$$
\begin{aligned}
f_{\alpha e}(\boldsymbol{k}_\alpha^+) &= \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_\alpha^- \,|V_{\alpha ee'}^{(2)}(\boldsymbol{k}_\alpha^+,\boldsymbol{k}_\alpha^-)|^2 f_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}_\alpha^-) + \\
&+ \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+ \,|U_{\alpha+1,ee'}^{(1)}(\boldsymbol{k}_\alpha^+,\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+)|^2 f_{\alpha+1,e'}(\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+),\\
f_{\alpha+1,e}(\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^-) &= \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+ \,|V_{\alpha+1,ee'}^{(1)}(\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^-,\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+)|^2 f_{\alpha+1,e'}(\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^+) + \\
&+ \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_\alpha^- \,|U_{\alpha ee'}^{(2)}(\boldsymbol{k}_{\alpha+1}^-,\boldsymbol{k}_\alpha^-)|^2 f_{\alpha e'}(\boldsymbol{k}_\alpha^-),\\
f_{1e}(\boldsymbol{k}_1^+) &= \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_2^+ \,|U_{2ee'}^{(1)}(\boldsymbol{k}_1^+,\boldsymbol{k}_2^+)|^2 f_{2e'}(\boldsymbol{k}_2^+) + \\
&+ \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_1^- \,|V_{1ee'}(\boldsymbol{k}_1^+,\boldsymbol{k}_1^-)|^2 I_{0e'}(\boldsymbol{k}_1^-),\\
f_{2e}(\boldsymbol{k}_2^-) &= \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_2^+ \,|V_{2ee'}^{(1)}(\boldsymbol{k}_2^-,\boldsymbol{k}_2^+)|^2 f_{2e'}(\boldsymbol{k}_2^+) + \\
&+ \sum_{e'}\int d\boldsymbol{k}_2^- \,|U_{1ee'}(\boldsymbol{k}_2^-,\boldsymbol{k}_1^-)|^2 I_{0e'}(\boldsymbol{k}_1^-).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Здесь $I_{0e}(\boldsymbol{k}_1^-)$ — распределение интенсивности источника в верхней среде. Поскольку в рассмотренных процессах рассеяние происходит без изменения частоты, интегрирование по $\boldsymbol{k}$ всюду производится по поверхности $\omega=\mathrm{const}$, что учтено в матричных элементах V и U.

Аналогичным образом с использованием граничных условий для поля по поверхности с малыми шероховатостями был вычислен поток энергии фононов через границу твердого тела в работе [20]. В частном случае, когда имеется одна статистически неровная граница, выражения (20) переходят в граничные условия, приведенные в [21].

Для того, чтобы можно было разделить вклады поверхностного и объемного рассеяния, необходимо, чтобы на расстояниях от поверхности порядка высот неровностей, где формируется поверхностное распределение интенсивности, концентрация объемных неоднородностей была достаточно малой. Заметим, что при необходимости, например в случае скользящих углов, в выражениях для вероятностей U, V могут быть учтены эффекты затенения и многократных отражений, как это сделано в [22]. С помощью тождественных преобразований граничные условия можно привести к виду [8].

Полученная система уравнений для функций распределения (17) с граничными условиями (22) является замкнутой и позволяет в рассмотренном приближении решать задачу о нахождении рассеянного поля источника в малослойной среде со случайно-неровными границами и объемными неоднородностями. Данная задача, таким образом, эквивалентна задаче о нахождении решения линейного кинетического уравнения с заданными граничными условиями.

2. Аналитические решения полученной системы кинетических уравнений могут быть найдены для сравнительно небольшого числа значений параметров задачи. Рассмотрим некоторые из них.

а) Случай малой концентрации объемных рассеивателей и малых углов наклона неровностей границ. При этом падающий узконаправленный поток рассеивается на неоднородностях, а вклад в исходное состояние от рассеяния из других направлений мал. В стационарном случае уравнение в слое льда можно записать в виде

$$c_2^{\sigma} \frac{\partial f_2^{\sigma}}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\partial \omega_2}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial f_2^{\sigma}}{\partial \boldsymbol{k}_2^{\sigma}} = -\nu_2 f_2^{\sigma}. \tag{21}$$

Здесь и далее индекс поляризации для краткости опущен, при необходимости он может быть легко восстановлен, ν_2 — коэффициент, описывающий ослабление распределения интенсивности за счет рассеяния:

$$\nu_2 = \pi \frac{\omega_2^4 (k_2)}{c_2^3} \rho \sum_{\sigma', e'} \int do_2'^{\sigma'} |\xi_2 (\boldsymbol{k}_2^{\sigma} - \boldsymbol{k}_2'^{\sigma'})|^2 (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2^{\sigma}}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2'^{\sigma'}})^2. \tag{22}$$

Решение уравнения (21)

$$f_2^{\sigma} = f_2^{\sigma(0)} \exp \left[- \left| \int_{l_1}^{l_2} \frac{\nu_2 (l')}{c_2 (l')} dl' \right| \right]$$

описывает ослабление интенсивности вдоль луча.

Для случая ледовых покровов часто имеет место вертикальное изменение диэлектрической проницаемости $\varepsilon_2' = \varepsilon_2' (z)$ [23]. При этом, например для плоской границы лед — вода, из (21) получаем связь между интенсивностями волн, распространяющихся «вниз» и вверх», в виде

$$f_2 (\boldsymbol{k}_2^+)|_{z=0} = f_2^{(0)} (\boldsymbol{k}_2^-) \exp \left[-2 \int_{-L}^{0} \frac{\nu_2}{c_2 (z')} \frac{dz'}{\sqrt{1 - c_2^2 (z') c_2^{-2} (0) \sin^2 \theta (z=0)}} \right]. \tag{23}$$

Для вычисления функции распределения $f_2(\boldsymbol{k}_2^+)$ следует воспользоваться граничным условием (20) на шероховатой границе раздела лед — воздух. Уравнение для f_2^+ при этом имеет вид

$$f_2^+ - \lambda \int d\boldsymbol{k}_2'^+ |V_2^{(1)} (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^-)|^2 f_2 (\boldsymbol{k}_2'^+) = \lambda S_2 (\boldsymbol{k}_2^-), \tag{24}$$

где

$$\lambda = \exp \left[-2 \int_{-L}^{0} \frac{\nu_2}{c_2 (z')} \frac{dz'}{\sqrt{1 - c_2^2 (z') c_2^{-2} (0) \sin^2 \theta (z=0)}} \right]$$ — часть излучения источника, прошедшего в толщу льда

$$S_2 (\boldsymbol{k}_2^-) = \int d\boldsymbol{k}_1^- |U_1 (\boldsymbol{k}_2^-, \boldsymbol{k}_1^-)|^2 I_0 (\boldsymbol{k}_1^-). \tag{25}$$

В (24) $\boldsymbol{k}^- = \boldsymbol{k}^+ - 2 \boldsymbol{N} (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{k}^+)$.

Решение уравнения (24) можно представить в виде

$$f_2 (\boldsymbol{k}_2^+) = \lambda S_2 + \lambda \int d\boldsymbol{k}_2'^+ K (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^+) \lambda S_2 (\boldsymbol{k}_2'^-), \tag{26}$$

где

$$K (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^+) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^+), \quad K_n = \int d\boldsymbol{k} \, K_{n-1} (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}) \times$$

$$\times \lambda |V_2^{(1)} (\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}_2'^+)|^2, \quad K_0 = \lambda |V_2^{(1)} (\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^+ - 2 \boldsymbol{N} (\boldsymbol{N}, \boldsymbol{k}_2'^+))|^2.$$

Выражение для функции распределения поля в верхней среде имеет вид

$$f_1(\boldsymbol{k}_1^+) = \int d\boldsymbol{k}_2{}^+ \, |U_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_1^+, \boldsymbol{k}_2^+)|^2 \lambda S_2(\boldsymbol{k}_2^-) +$$
$$+ \int d\boldsymbol{k}_2^+ \, |U_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_1^+)|^2 \lambda \int d\boldsymbol{k}_2'{}^+ K(\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'{}^+) \lambda S_2(\boldsymbol{k}_2'{}^-) + S_1(\boldsymbol{k}_1^+), \tag{27}$$

где

$$S_1(\boldsymbol{k}_1^+) = \int d\boldsymbol{k}_1'{}^- \, |V_1(\boldsymbol{k}_1^+, \boldsymbol{k}_1'{}^-)|^2 I_0(\boldsymbol{k}_1'{}^-). \tag{28}$$

Полученное решение описывает распределение интенсивности поля, рассеянного слоем с неровной верхней границей и объемными неоднородностями. Подобным образом может быть рассмотрена диссипация энергии поля в слое льда, которая в ряде случаев, особенно для соленых морских льдов, играет весьма существенную роль.

б) *Случай сильного объемного рассеяния.* Концентрация объемных неоднородностей предполагается малой для того, чтобы были справедливы предположения, сделанные при выводе кинетических уравнений, но в то же время достаточно большой, так что $l \ll L_r \ll L$, где $l = c_2/\nu_2$ — длина свободного пробега волн при рассеянии на объемных неоднородностях, L_r — масштаб изменения $\varepsilon_2^r(z)$.

В этом случае главным в уравнении (17) является интегральное слагаемое. Решение уравнения (17) в нулевом приближении по l/L, l/L_r имеет вид

$$f_2(\boldsymbol{k}_2^{\mp}) = f_{2s} = \mathrm{const}. \tag{29}$$

Это решение является автомодельным, т. е. не зависит от явного вида граничных условий и устанавливается на расстояниях порядка l от границ. Связь между f_{2s} и интенсивностью источника находится из условия непрерывности потока излучения через границу раздела воздух—лед, которое получается при интегрировании соответствующего граничного условия по углам и выглядит следующим образом:

$$\int d\boldsymbol{k}_2^+ \, d\boldsymbol{k}_1^+ \, |U_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_1^+)|^2 f_{2s} = \int d\boldsymbol{k}_2^+ \, S_2(\boldsymbol{k}_2^+ - 2N(N, \boldsymbol{k}_2^+)).$$

При этом распределение поля в верхней среде будет иметь вид

$$f_1(\boldsymbol{k}_1^+) = \int d\boldsymbol{k}_2^+ \, |U_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_1^+, \boldsymbol{k}_2^+)|^2 \left\{ \int d\boldsymbol{k}_2'{}^+ S_2(\boldsymbol{k}_2'{}^-) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\int d\boldsymbol{k}_2''{}^+ d\boldsymbol{k}_1'{}^+ \, |U_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_2''{}^+, \boldsymbol{k}_1'{}^+)|^2 \right]^{-1} \right\} + S_1(\boldsymbol{k}_1^+). \tag{30}$$

Как видно из выражения (30), функция распределения интенсивности рассеянного поля в первой среде в этом случае равна сумме изотропной (первое слагаемое) и направленной (второе слагаемое) частей. Второе слагаемое описывает вклад в интенсивность части излучения, рассеянной на границе первой и второй среды, и несет информацию о статистических свойствах неровной поверхности. В отсутствие поглощения во второй среде изотропная часть будет преобладать. Случай объемного поглощения будет рассмотрен отдельно.

в) *Случай анизотропного объемного рассеяния.* Этот случай имеет место, когда амплитуда рассеяния в поперечном направлении (x, y) значительно больше амплитуды рассеяния в направлении z, так что

$$l_\perp \ll L_r \ll l_z, L.$$

При этом происходит быстрая изотропизация функции распределения в плоскости x, y, а соответствующее решение кинетического уравнения (21) имеет вид

$$f_2(k_2^\sigma) = f_2(k_{2z}^\sigma).$$

Граничное условие для $f_2(k_{2z}^\sigma)$ получается из условия на границе лед—воздух, проинтегрированного по $\boldsymbol{k}_{2\perp}$, и сводится к одномерному интегральному уравнению для функции распределения

$$f_2(k_{2z}^+) = \int dk_{2z}'^+ \, T_2(k_{2z}^+, -k_{2z}'^+) f_2(k_{2z}'^+) + \widetilde{S}_2(-k_{2z}^+), \tag{31}$$

где

$$T_2(k_{2z}^+, -k_{2z}'^+) = \int d\boldsymbol{k}_{2\perp} d\boldsymbol{k}_{2\perp}' |V_2^{(1)}(\boldsymbol{k}_2^+, \boldsymbol{k}_2'^-)|^2,$$

$$\widetilde{S}_2(-k_{2z}^+) = \int d\boldsymbol{k}_{2\perp} S_2(\boldsymbol{k}_2^-).$$

Если дисперсия углов наклона верхней границы мала, то уравнение (31) можно привести к виду

$$f_2^+(\theta) = R_2^2(\theta_{20}) \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \, w(\theta - \theta') f_2(\theta') + S_2(|\theta - \theta_{20}|), \tag{32}$$

где R_2^2 — коэффициент отражения Френеля для плоской поверхности, $w(\theta-\theta')$ — функция распределения углов наклона поверхности, имеющая, в силу сделанного ограничения, острый максимум при $\theta-\theta'=0$, θ_{20} — угол преломления для волны, падающей от источника, находящегося в среде 1, на границу раздела, которую при этом можно считать плоской. Условие, при котором величину R_2^2 можно считать медленно меняющейся, приведено в [10] (формулы (20.35), (20 36)).

Решение уравнения (32) имеет вид

$$f_2^+(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\widetilde{S}_2(\xi)}{1 - \sqrt{2\pi} R_2^2(\theta_{20}) w(\xi)} \exp[-i\xi(\theta - \theta_{20})]. \tag{33}$$

Как видно из (33), распределение интенсивности во второй среде сосредоточено, в основном, вблизи конуса с углом при вершине и «размыто» вблизи образующей на угол, определяемый шириной функции $w(\theta)$,

$$w(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi\theta} w(\theta), \quad \widetilde{S}_2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi}} e^{i\xi\theta} \widetilde{S}_2(\theta).$$

Распределение интенсивности в верхней среде при этом также сосредоточено вблизи образующей конуса с углом при вершине, равном углу падения волн от источника, и имеет вид

$$f_1^+(\theta) = \tag{34}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \, |U_2^{(1)}(\theta_1, \theta)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \, \frac{\widetilde{S}_2(\xi) \exp[-i\xi(\theta - \theta_{20})]}{1 - \sqrt{2\pi} R_2^2(\theta_{20}) w(\xi)} + \widetilde{S}_1(\theta_1).$$

При решении задачи о рассеянии радиоволн ледовыми покровами может возникнуть необходимость рассмотреть «трехслойную» модель (воздух, снег, лед). Роль снега в этом случае сводится к плавному изменению траектории лучей (вследствие зависимости его диэлектрической проницаемости от глубины) и значительному уменьшению отражения радиоволн от границы снег—лед, что наблюдается экспериментально. Эти эффекты также могут быть рассмотрены с помощью уравнений (17), (20) при выполнении условий применимости теории переноса излучения.

Рассмотренные примеры решения системы кинетических уравнений с граничными условиями соответствуют предельным значениям параметров, при которых удается провести до конца аналитические расчеты. Применительно к рассеянию на ледовых покровах на основании полученной в данной работе системы уравнений проведены численные расчеты, которые являются предметом отдельного сообщения.

Автор благодарит Ф. Г. Басса за многочисленные дискуссии, А. И. Калмыкова, чье постоянное внимание стимулировало данную работу, а также И. М. Фукса за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арманд Н. А., Башаринов А. Е, Шутко А. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, с. 809.
2 Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. Физические свойства. Современные методы гляциологии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980
3. Финкельштейн М. И., Мендельсон В. Л., Кутев В. А. Радиолокация слоистых земных покровов. — М.: Сов. радио, 1977.
4 Fung A K. — Radio Sci., 1982, **17**, p. 1007.
5. Fung A. K., Stiles W. H., Ulaby F. T. — Int. Conf. Commun. — Seattle, Washington, 1980.
6 Tsang L, Kubasci M. S., Kong J. A. — Radio Sci., 1981, **16**, p.321.
7. Onstott R. G., Moore R. K., Weeks W. F. — IEEE Trans, 1979, **GE-17**, p. 78
8 Басс Ф. Г, Синицын Ю. А — Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 6, с 746.
9 Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере — М· Наука, 1967.
10 Басс Ф Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. — М: Наука, 1972.
11. Барабаненков И. Н Диссертация М, 1980
12 Боголюбов И. Н Проблемы динамической теории в статистической физике. — М.· Гостехиздат, 1946.
13. Синицын Ю А. Диссертация. Харьков, 1975.
14 Малахов А. Н, Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, **23**, с. 968.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.—М: Наука, 1982.
16 Wigner E. — Phys. Rev., 1932, **40**, p. 749.
17. Nakamura K, Yamashita J. — Progr. Theor. Phys., 1968, **39**, p. 545.
18 Кравцов Ю А., Саичев А. И. — УФН, 1982, **137**, с. 501.
19. Beckmann P., Spizzichino A. The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces. — N. Y.: The Macmillan Co., 1963.
20. Адаменко И Н, Фукс И. М. — ЖЭТФ, 1970, **59**, с 2071.
21. Окулов В. И, Устинов В В. — Физика низких температур, 1979, **5**, с. 213.
22 Копилович Л. Е, Фукс И. М — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, с 840.
23. Hoekstra P., Cappilino P. — J. Geophys. Res., 1971, **76**, p. 4922.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
5 июля 1983 г.,
после доработки
12 марта 1984 г.

ON THE THEORY OF WAVE SCATTERING BY AN INHOMOGENEOUS MULTILAYER MEDIUM WITH STATISTICALLY ROUGH BOUNDARIES

Yu. A. Sinitsyn

In terms of the Hamiltonian formalism the system of transfer equation with the boundary conditions has been obtained which describes wave propagation in the multilayer medium with bulk inhomogeneities and random boundaries. The model might describe the radio wave scattering by ice. The analytical form of some solution of the system has been obtained.