ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 9 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 621.396.677.49

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ (ААР) НА ОСНОВЕ УЧЕТА ИЗВЕСТНЫХ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И ДИАГОНАЛИЗАЦИИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПОМЕХИ

В. Т. Ермолаев

Из весового вектора ААР выделяется компонента, которая принадлежит инвариантному подпространству, связанному с неизвестными собственными числами корреляционной матрицы. В данном подпространстве выбирается базис, векторы которого рассматриваются как весовые векторы адаптивной диаграммообразующей схемы (АДОС). Предлагается алгоритм формирования ортогональной АДОС, на выходе которой помеховые колебания декоррелированы. Дается способ определения весового вектора обработки сигнала на выходе ортогональной АДОС. Показана возможность использования корреляторов для реализации обработки сигнала в ААР.

1. Весовой вектор W, обеспечивающий на выходе N-элементной ААР максимальное отношение $|W^+S|^2(W^+MW)^{-1}$ мощностей сигнала и помехи, удовлетворяет уравнению [1]

$$MW = S, \tag{1}$$

где $M=\overline{XX^+}$—корреляционная матрица помехи на входе ААР, X—случайный вектор помехи, S — вектор сигнала, «$+$» — знак эрмитова сопряжения, черта сверху обозначает статистическое среднее.

В случае I некоррелированных дискретных источников помехи, согласно [2],

$$M = E + \sum_{i=1}^{I} \nu_i \Phi_i \Phi_i^+, \tag{2}$$

где единичная матрица E описывает корреляционные свойства собственного шума ААР, вектор Φ_i дает амплитудно-фазовое распределение помехового колебания i-го источника, а число ν_i является отношением мощности этого колебания к мощности собственного шума в одном элементе ААР.

В работе [3] с помощью разложения $W=AC$ показано, что уравнение (1) можно преобразовать к уравнению для определения вектора C:

$$LC=q_1, \quad L=(A^+A)^{-1}A^+MA, \quad q_1^т=(1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0). \tag{3}$$

Здесь A — преобразующая матрица некоторой АДОС. Эта матрица в качестве первого столбца содержит вектор S. Действительный вектор C является вектором весовой обработки сигнала на выходе АДОС. Индекс «т» обозначает транспонирование.

Используя свойства минимального многочлена матрицы M, нетрудно показать [3], что матрицу A можно составить из линейно-независимых векторов степенной последовательности S, MS, M^2S, ... или из ортогональных векторов, полученных с помощью ортогонализации данной последовательности. В случае $I < N-1$ число компонент весового вектора C определяется числом $I+1$ источников помехи (I внешних источников и собственный шум). На выходе ортогональной АДОС корреляционная матрица помехи A^+MA симметричная трехдиагональная, а корреляционная матрица A^+A собственного шума — диагональная. Весовой вектор C совпадает с первым столбцом матрицы L^{-1}. Для АДОС, построенной на основе степенной последовательности, матрица L имеет вид матрицы Фробениуса, а для ортогональной АДОС — трехдиагональный вид. Собственные числа матрицы L являются простыми и совпадают с попарно различными собственными числами матрицы M.

В данной работе рассматривается возможность определения весового вектора ААР в случае, если ряд собственных значений матрицы M известен. Показано, что из весового вектора ААР можно выделить неизвестную компоненту, которая принадлежит инвариантному подпространству, связанному с неизвестными собственными числами. Определение этой компоненты возможно методами, отмеченными выше и примененными в [3] для определения полного весового вектора. В дополнение к этим методам в данной работе рассматривается такая преобразующая матрица A, которая обеспечивает диагональный вид корреляционной матрицы A^+MA. Это позволяет более простым способом определять весовой вектор C. Матрица M и вектор S в (1) считаются известными точно.

2. Предположим вначале, что все собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ($p \leqslant N$) матрицы M известны. Рассмотрим оператор $D_i = \lambda_i E - M$. Он является вырожденным, и поэтому пространство K весовых векторов расщепляется на два инвариантных подпространства, ядро F_i и область определения T_i этого оператора [4]. Ядро оператора D_i является также корневым подпространством собственных векторов матрицы M, соответствующих собственному числу λ_i. Оно не расщепляется на более элементарные инвариантные подпространства. С помощью операторов $D_1, D_2, \ldots, D_p$ многими способами пространство K можно расщепить на инвариантные подпространства, что позволяет получить различные виды разложений для вектора W.

Рассмотрим следующий алгоритм построения оптимального весового вектора. Выберем собственное число λ_1 и представим искомый вектор в виде $W = (1/\lambda_1)(S + W_1)$. Из (1) находим уравнение $MW_1 = S_1$, где $S_1 = D_1 S$. Выберем λ_2 и вектор W_1 найдем аналогично: $W_1 = (1/\lambda_2) \times \times (S_1 + W_2)$. Для воктора W_2 получим уравнение $MW_2 = S_2$, где $S_2 = = D_1 D_2 S$. Применяя процедуру последовательно для всех собственных чисел, получим следующее разложение для искомого вектора:

$$W = \frac{1}{\lambda_1} S + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} S_1 + \ldots + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_p} S_{p-1},$$
$$S_n = \prod_{l=1}^{n} D_l S \quad (n = 1, 2, \ldots, p). \tag{4}$$

Каждый последующий вектор из ряда векторов $S, S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ принадлежит инвариантному подпространству меньшей размерности: $S \in K$, $S_1 \in T_1 = K - F_1$, $S_2 \in K - F_1 - F_2$ и т. д. Отсюда следует, что последний вектор $S_{p-1} \in F_p$, т. е. является собственным вектором матрицы M, соответствующим собственному числу λ_p. Нетрудно также видеть, что вектор S_p всегда является нулевым вектором.

Составим преобразующую матрицу A из векторов $S, S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$. Используя равенство $MA = AL$, легко найти, что матрица L из (3) имеет в данном случае следующий вид:

$$L=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что определение вектора C в соответствии с (3) путем обращения матрицы L и выделения первого столбца матрицы L^{-1} дает вектор, компоненты которого, как и должно быть, совпадают с коэффициентами разложения в (4). Видно также, что собственные числа матрицы L совпадают с собственными числами матрицы M.

3. Пусть известно только k ($k<p$) собственных чисел матрицы M. Тогда с помощью приведенного выше алгоритма можно получить следующее разложение:

$$W=\tilde{W}+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_k}W_k. \tag{5}$$

Здесь $\tilde{W}$ — известная часть весового вектора. Она определяется по формуле (4), где необходимо положить $p=k$. Вектор W_k находится из уравнения

$$MW_k=S_k,\quad S_k=\prod_{l=1}^{k}D_lS. \tag{6}$$

Внешне уравнение (6) аналогично (1). Однако имеется существенное отличие, заключающееся в том, что вектор S_k принадлежит инвариантному подпространству, связанному с $p-k$ неизвестными собственными числами матрицы M, в то время как вектор S в (1) принадлежит всему N-мерному пространству.

В силу инвариантности указанное подпространство можно рассматривать как самостоятельное пространство меньшей размерности. В связи с этим имеет смысл подчеркнуть отличия обратных операторов, определяющих решения уравнений (1) и (6). Действительно, решения этих уравнений формально можно записать как $W=M^{-1}S$ и $W_k=M^{-1}S_k$, где M^{-1}—обратный оператор, действующий во всем пространстве. Но поскольку вектор S_k принадлежит инвариантному подпространству, вместо оператора M^{-1} для определения вектора W_k из (6) следует использовать обратный оператор, действующий в указанном подпространстве. Он называется индуцированным оператором, порожденным оператором M^{-1} [5]. Обозначим индуцированный оператор как $M_{S_k}^{-1}$, подчеркивая индексом S_k тот факт, что оператор действует в подпространстве, содержащем вектор S_k. Индуцированный оператор всегда имеет более простой вид, чем оператор M^{-1}. Например, вектор S_{p-1}, как отмечалось, является собственным вектором матрицы M, соответствующим собственному значению λ_p. Поэтому решение уравнения (6) при $k=p-1$ выглядит наиболее просто: $W_{p-1}=(1/\lambda_p)S_{p-1}$ и, следовательно, $M_{S_{p-1}}^{-1}=(1/\lambda_p)E$. Вектор S_{p-2} является линейной комбинацией двух собственных векторов, соответствующих двум различным собственным числам λ_p и λ_{p-1}. Поскольку они линейно-независимые, то векторы S_{p-2} и MS_{p-2} также будут линейно-независимые. Следовательно, решение уравнения (6) при $k=p-2$ можно найти в виде разложения $W_{p-2}=c_1S_{p-2}+c_2MS_{p-2}$. Это означает, что индуцированный оператор $M_{S_{p-2}}^{-1}=c_1E+c_2M$ и зависит только от двух независимых коэффициентов c_1 и c_2. Ясно, что этот результат можно обобщить и для других значений индекса k в (6). Кроме того, если в (1) вектор S принадлежит не всему пространству, а только его инвариантной части, то использование векторов степенной последовательности S, MS, M^2S, ..., а также других порожденных ею систем векторов эквивалентно использованию индуцированного оператора M_S^{-1}.

В качестве примера применения данного подхода рассмотрим случай, когда число источников помехи $I < N - 1$. В этом случае заранее известно собственное число $\lambda_1 = 1$ кратности $N - I$. Ядро F_1 и область определения T_1 оператора $D_1 = E - M$, имеют, соответственно, размерности $N - I$ и I. Согласно (4), (5) и (6)

$$W = \widetilde{W} + W_1, \quad \widetilde{W} = S, \quad MW_1 = S_1, \quad S_1 = (E - M)S.$$

Рассматривая в подпространстве T_1 степенную последовательность векторов S_1, MS_1, ..., заключаем, что число линейно-независимых векторов не может быть больше, чем I. Используя (2), легко показать, что каждый из этих векторов является линейной комбинацией векторов Φ_1, Φ_2, ..., Φ_I. Это означает, что при выключении источников помехи векторы данной степенной последовательности автоматически становятся нулевыми и решение имеет вид $W = S$. В случае одного источника помехи легко найти, что

$$W = S + c_1 (E - M) S, \quad c_1 = 1/(1 + \nu_1 \Phi_1^+ \Phi_1).$$

4. Сущность примененных в [3] методов определения весового вектора ААР заключается в использовании разложения $W = AC$ и решении относительно C уравнения (3). Отличие методов состоит в выборе вида матрицы A. Эти методы полностью применимы и для определения вектора W_k из (6). В этом случае размерность вектора C будет равна числу $p - k$ неизвестных собственных значений матрицы M.

В дополнение к этим методам рассмотрим такой вид преобразующей матрицы A, который приводит к диагональному виду матрицу A^+MA. Применим следующий процесс ортогонализации [5]:

$$f_0 = S, \quad f_1 = Mf_0 - \alpha_0 f_0, \quad f_{k+1} = Mf_k - \alpha_k f_k - \beta_{k-1} f_{k-1}, \quad k > 0,$$
$$\alpha_k = \frac{(Mf_k, f_k)}{(f_k, f_k)}, \quad k \geqslant 0, \quad \beta_{k-1} = \frac{(Mf_k, f_{k-1})}{(f_{k-1}, f_{k-1})}, \quad k > 0. \tag{7}$$

Здесь выражение вида (f_i, f_j) является скалярным произведением векторов f_i и f_j. Введем скалярное произведение с помощью выражения

$$(f_i, f_j) = f_i^+ M f_j. \tag{8}$$

Оно имеет смысл функции корреляции помеховых колебаний $f_i^+ X$ и $f_j^+ X$ на выходах двух приемных каналов ААР, весовая обработка в которых задается векторами f_i и f_j.

В [3] использовалась схема ортогонализации (7) со скалярным произведением вида

$$(f_i, f_j) = f_i^+ M f_j. \tag{9}$$

Это выражение имеет смысл функции корреляции собственного шума на выходах каналов с характеристиками f_i и f_j. Оно может иметь и другой физический смысл. Если функция f_j описывает амплитудно-фазовое распределение колебаний некоторого источника излучения, а функция f_i является весовой функцией обработки приемного канала, то величина $f_i^+ f_j$ дает комплексную амплитуду колебания на выходе канала.

Целесообразно называть векторы f_i M- или E-ортогональными в зависимости от выбора скалярного произведения в виде (8) или (9).

Составляя преобразующую матрицу A из M-ортогональных векторов, найдем, что матрица A^+MA является диагональной. Поскольку вектор C определяется из (3) как первый столбец матрицы $L^{-1}=(A^+MA)^{-1}\times\times(A^+A)$, его компоненты будут

$$c_i = f_i^+ f_0 / f_i^+ M f_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Важно отметить, что c_i, а также коэффициенты α_k и β_{k-1} в (7) выражаются в виде отношений физических величин, которые могут быть измерены, например, с помощью корреляторов. В схеме ортогонализации (7) используется операция умножения матрицы M на вектор. Эта операция также может быть выполнена с помощью корреляторов. Действительно, пусть необходимо вычислить Mf_j. Рассмотрим колебание $y_j=f_j^+X$ и вычислим корреляционный вектор $\overline{Xy_j^+}$. Нетрудно видеть, что $Mf_j=\overline{Xy_j^+}$.

Таким образом, если часть (k из p) собственных чисел корреляционной матрицы M известна, то оптимальный весовой вектор формируется из двух векторов, один из которых является неизвестным и принадлежит инвариантному подпространству, связанному с неизвестными собственными числами. В данном подпространстве можно выбрать базисные векторы; первый S_k формируется из вектора сигнала S с помощью последовательного воздействия на него вырожденными операторами вида $\lambda_i E - M$, где λ_i — известное собственное число ($i=1, 2, \ldots$ $\ldots, k$), а каждый последующий — путем циклического воздействия матрицей M на вектор S_k. На основе этого базиса можно построить ортогональные базисы. Число коэффициентов в разложении искомого вектора в любом базисе равно числу неизвестных собственных чисел матрицы M. Наибольший практический интерес представляет базис, в котором матрица M диагонализируется (помеховые колебания декоррелируются). Алгоритм определения весового вектора можно реализовать в этом случае на основе использования корреляторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Applebaum S. P.— IEEE Trans., 1976, **AP-24**, № 5, p. 585.
2. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех.— М.: Радио и связь, 1981.
3. Ермолаев В. Т., Краснов Б. А., Флаксман А. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 7, с. 874.
4. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.: Гостехиздат, 1953.
5. Воеводин В. В. Линейная алгебра.— М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
31 мая 1982 г.,
после переработки
26 января 1983 г.

DEFINITION OF WEIGHT FACTORS IN ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS (AAA) TAKING ACCOUNT OF THE KNOWN EIGEN NUMBERS AHD DIAGONALIZATION OF THE NOISE CORRELATION MATRIX

V. T. Ermolayev

From the weight factor of AAA a component is isolated which belongs to the invariant subspace connected with unknown eigen numbers of the correlation matrix. In the given subspace a basic is chosen, the vectors of which are considered to be weight ones of the adaptive diagram-forming scheme (ADFS). An algorithm is suggested for the shaping of the orthogonal ADFS at the output of which noise oscillations are decorrelated. A method is given for the definition of the weight vector of the signal processing at the output of the orthogonal ADFS. A possibility is shown of the use of correlators for the realization of the signal processing in AAA.