ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 8 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 519.217

ОПТИМАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПРИ СОВМЕСТНОМ ДЕЙСТВИИ ИМПУЛЬСНЫХ И ШУМОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

А. А. Мальцев, А. М. Силаев

Методами теории условных марковских процессов решается задача оптимального оценивания состояния динамической системы, подверженной совместному воздействию импульсных и шумовых возмущений. В предположении пуассоновской априорной статистики моментов появления импульсов получена замкнутая система взаимосвязанных уравнений для апостериорных вероятностей появления определенного числа импульсов к текущему моменту времени и вспомогательных условных плотностей вероятности состояния динамической системы В случае линейной модели динамической системы и линейных наблюдений с использованием для апостериорных плотностей вероятности гауссовой аппроксимации получены уравнения для оптимальной в среднеквадратическом смысле оценки состояния системы. Обсуждена структура полученной схемы оптмальной фильтрации.

Задача нахождения оптимальной оценки состояния динамической системы, на которую совместно воздействуют случайные импульсные возмущения и гауссов шум, представляется весьма актуальной [1]. К настоящему времени имеется ряд работ, посвященных оптимальной нелинейной фильтрации импульсных процессов, описываемых интегро-дифференциальным уравнением Колмогорова — Феллера [2,3]. В работах авторов [4,5] рассматривалась задача опимального нелинейного оценивания состояния динамической системы в предположении, что импульсные возмущения происходят достаточно редко. Это позволило несколько упростить исходную задачу, заменив ее задачей синтеза системы оптимального оценивания, учитывающей наличие только одного импульса. Если импульсные возмущения происходят достаточно часто или интенсивность гауссова шума велика, то такая система оценивания не успевает «отработать» каждый импульс в отдельности. Улучшить оценку в этом случае, очевидно, можно путем построения системы оптимального оценивания, учитывающей наличие нескольких импульсов одновременно (пачки импульсов).

1. Рассмотрим задачу нахождения оптимальной оценки состояния динамической системы, на которую совместно воздействуют случайные импульсные возмущения и гауссов шум. Предположим, что расширенный вектор состояния системы $\boldsymbol{z}(t)$ описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением, и наблюдения $\boldsymbol{y}(t)$ также линейны:

$$\begin{cases} \dfrac{d\boldsymbol{z}}{dt} = D(t)\boldsymbol{z} + \sum\limits_{l=1}^{M} \boldsymbol{A}_l\,\delta(t-\tau_l) + G(t)\boldsymbol{\xi}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) = H(t)\boldsymbol{z}(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $D(t)$, $G(t)$, $H(t)$ — заданные матрицы, характеризующие динамическую систему и наблюдения, $\boldsymbol{\xi}(t)$, $\boldsymbol{\eta}(t)$ — независимые белые гауссовы шумы с нулевыми средними значениями и заданными матрицами интенсивностей $Q(t)$, $N(t)$; $\sum_{i=1}^{M} A_i \delta(t-\tau_i)$ — последовательность δ-функций, описывающая импульсные возмущения, возникающие в случайные упорядоченные моменты времени τ_i $(\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_M)$ со случайными векторными интенсивностями A_i; M — число одновременно учитываемых импульсов.

Будем считать, что в начальный момент времени $t=0$ случайные величины τ_i не зависят от $\boldsymbol{z}$, A_j $(i, j = 1, 2, \ldots, M)$, так что совместная начальная плотность вероятности этих величин априорно равна

$$P_{zA\tau}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\tau}) = P_{zA}(\boldsymbol{z}, A) P_\tau(\tau),$$

где $\boldsymbol{A} \equiv \{A_1, A_2, \ldots, A_M\}$, $\boldsymbol{\tau} \equiv \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M\}$, $P_{zA}(\boldsymbol{z}, A)$, $P_\tau(\boldsymbol{\tau})$ — начальные априорные плотности вероятности $\boldsymbol{z}$, A и $\boldsymbol{\tau}$. Предположим, что априорная плотность вероятности момента первого импульсного возмущения задана и в общем случае имеет произвольный вид $P_{\tau_1}(\tau_1)$; интервалы времени между соседними импульсами $u_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ взаимно независимы и имеют одинаковые распределения вида

$$P_{u_n}(u_n) \equiv P_u(u_n) = \nu \exp(-\nu u_n) 1(u_n), \tag{2}$$

$$n = 2, 3, \ldots, M,$$

где ν — параметр пуассоновского импульсного процесса. Предположим также для простоты изложения, что интенсивности импульсных возмущений A_i при разных i взаимно независимы, не зависят от $\boldsymbol{z}$ и имеют одинаковые априорные плотности вероятности $P_a(A_i)$, т. е. полагаем

$$\begin{aligned} P_{zA}(\boldsymbol{z}, A) &= P_z(\boldsymbol{z}) P_A(A) = P_z(\boldsymbol{z}) P_{A_1}(A_1) P_{A_2}(A_2) \ldots P_{A_M}(A_M) = \\ &= P_z(\boldsymbol{z}) P_a(A_1) P_a(A_2) \ldots P_a(A_M). \end{aligned} \tag{3}$$

Задача состоит в том, чтобы по известным на интервале времени $[0, t]$ наблюдениям $\boldsymbol{y}(t)$ получить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ вектора состояния системы $\boldsymbol{z}(t)$.

Для удобства анализа введем новую переменную

$$q_0(t) = \boldsymbol{z}(t) - \sum_{i=1}^{M} A_i 1(t - \tau_i) \tag{4}$$

и преобразуем систему уравнений (1) к виду

$$\begin{cases} \dfrac{dq_0}{dt} = D(t)\left[q_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{M} A_i 1(t-\tau_i)\right] + G(t)\xi(t), \\ \boldsymbol{y}(t) = H(t)\left[q_0(t) + \sum\limits_{i=1}^{M} A_i 1(t-\tau_i)\right] + \eta(t) \end{cases} \tag{5}$$

где $1(t-\tau_i)$ — единичная функция:

$$1(t-\tau_i) \equiv \begin{cases} 0, & t \leqslant \tau_i \\ 1, & t > \tau_i \quad (i = 1, 2, \ldots, M) \end{cases}.$$

Задача оптимального оценивания вектора состояния динамической системы $\boldsymbol{z}(t)$ с помощью замены (4) сводится к задаче оптимальной оценки вектора $q_0(t)$, удовлетворяющего системе уравнений (5), правые части которых меняются скачком в некоторые случайные моменты времени τ_i.

2. Рассмотрим сначала общий случай оценивания вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$ некоторой системы при нелинейных наблюдениях. Предположим, что уравнения наблюдений имеют вид

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{s}[\boldsymbol{x}(t), \ \boldsymbol{\tau}, \ t] + \boldsymbol{\eta}(t).$$

$$\boldsymbol{s}[\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{\tau}, t] = \begin{cases} \boldsymbol{s}_0(\boldsymbol{x}, t), & t \leqslant \tau_1 \\ \boldsymbol{s}_n(\boldsymbol{x}, t), & \tau_n < t \leqslant \tau_{n+1} \\ \boldsymbol{s}_M(\boldsymbol{x}, t), & \tau_M < t \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases}. \tag{6}$$

Здесь $\boldsymbol{s}_j(\boldsymbol{x}, t)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ — векторы заданных функций состояния динамической системы $\boldsymbol{x}(t)$ и времени t; $\boldsymbol{\tau} \equiv \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_M\}$. Будем считать, что совокупность $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}\}$ состояния динамической системы и моментов переключений марковская, причем априорная плотность вероятности $P_x(\boldsymbol{x}, t)$ векторного процесса $\boldsymbol{x}(t)$ удовлетворяет априорному уравнению вида

$$\partial P_x(\boldsymbol{x}, t)/\partial t = L P_x(\boldsymbol{x}, t) \quad (t \geqslant 0), \tag{7}$$

где оператор $L(\cdot)$ в интервалах между скачками сохраняется неизменным и в моменты τ_i скачком может изменяться

$$L(\cdot) = \begin{cases} L_0(\cdot), & t \leqslant \tau_1 \\ L_n(\cdot), & \tau_n < t \leqslant \tau_{n+1} \\ L_M(\cdot), & \tau_M < t \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases}. \tag{8}$$

На основании общих результатов теории условных марковских процессов [6–8] для апостериорной плотности вероятности $W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t)$ марковской совокупности $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}\}$ запишем уравнение Стратоновича

$$\frac{\partial W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t)}{\partial t} = L W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) + [F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) - \\ - \langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) \rangle_{x\tau}] W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{9}$$

с начальным условием

$$W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t)|_{t=0} = P_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}). \tag{10}$$

Здесь $L(\cdot)$ — тот же оператор, что и в уравнении (8), и приняты следующие обозначения:

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) = \boldsymbol{s}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) N^{-1}(t) [\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t)/2] \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} F_0(\boldsymbol{x}, t), & t \leqslant \tau_1 \\ F_n(\boldsymbol{x}, t), & \tau_n < t \leqslant \tau_{n+1} \\ F_M(\boldsymbol{x}, t), & \tau_M < t \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases}, \tag{11}$$

$$\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) \rangle_{x\tau} \equiv \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}; t) d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{\tau},$$

т — знак транспонирования, $N^{-1}(t)$ — матрица, обратная матрице интенсивностей шумов наблюдений $N(t)$; $P_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau})$ — плотность вероятности совокупности $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}\}$ в начальный момент времени $t = 0$. Будем полагать, что $P_{x\tau}\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}\}$ имеет вид

$$P_{x\tau}(x, \tau) = \begin{cases} P_{0x}(x) P_\tau(\tau), & 0 \leqslant \tau_1 \\ P_{nx}(x) P_\tau(\tau), & \tau_n < 0 \leqslant \tau_{n+1} \\ P_{Mx}(x) P_\tau(\tau), & \tau_M < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases}, \tag{12}$$

где $P_{jx}(x)$ — заданные плотности вероятности x $(j=0, 1, \ldots, M)$.

Преобразуем уравнение (9). Пусть $W_x(x, t)$, $W_\tau(\tau, t)$ — апостериорные плотности вероятности x и τ в момент времени t:

$$W_x(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, d\tau, \qquad W_\tau(\tau, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, dx.$$

Введем следующие вспомогательные функции:

$$p_0(t) \equiv \langle 1(\tau_1 - t) \rangle_\tau \equiv \int_t^\infty d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^\infty d\tau_n \ldots \int_{\tau_{M-1}}^\infty d\tau_M\, W_\tau(\tau, t),$$

$$p_n(t) \equiv \langle 1(t - \tau_n)\, 1(\tau_{n+1} - t) \rangle_\tau \equiv \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^t d\tau_n \int_t^\infty d\tau_{n+1} \ldots$$

$$\ldots \int_{\tau_{M-1}}^\infty d\tau_M\, W_\tau(\tau, t), \tag{13}$$

$$p_M(t) \equiv \langle 1(t - \tau_M) \rangle_\tau \equiv \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^t d\tau_n \ldots \int_{\tau_{M-1}}^t d\tau_M\, W_\tau(\tau, t)$$

$$(n = 1, 2, \ldots, M-1),$$

имеющие смысл апостериорных вероятностей непоявления ни одного скачка к моменту времени t, появления только n скачков, появления всех M скачков соответственно. Введем также вспомогательные плотности вероятности $W_j(x, t)$, где $j = 0, 1, \ldots, M$, с помощью соотношений

$$W_0(x, t) \equiv \frac{1}{p_0(t)} \int_t^\infty d\tau_1 \int_{\tau_1}^\infty d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^\infty d\tau_n \ldots \int_{\tau_{M-1}}^\infty d\tau_M\, W_{x\tau}(x, \tau; t), \tag{14}$$

$$W_n(x, t) \equiv \frac{1}{p_n(t)} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^t d\tau_n \int_t^\infty d\tau_{n+1} \ldots \int_{\tau_{M-1}}^\infty d\tau_M\, W_{x\tau}(x, \tau; t),$$

$$W_M(x, t) \equiv \frac{1}{p_M(t)} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{\tau_1}^t d\tau_2 \ldots \int_{\tau_{n-1}}^t d\tau_n \ldots \int_{\tau_{M-1}}^t d\tau_M\, W_{x\tau}(x, \tau; t)$$

$$(n = 1, 2, \ldots, M-1).$$

Введение таких вспомогательных функций позволяет представить апостериорную плотность вероятности $W_x(x, t)$ в виде следующей суммы:

$$W_x(x, t) = \sum_{j=0}^{M} p_j(t)\, W_j(x, t). \tag{15}$$

Для вероятностей $p_j(t)$ в силу нормировки $W_\tau(\tau, t)$ выполняется соотношение

$$\sum_{j=0}^{M} p_j(t) \equiv 1. \tag{16}$$

Представим совместную плотность вероятности $W_{x\tau_i}(\boldsymbol{x}, \tau_i; t)$ совокупности вектора $\boldsymbol{x}$ и случайного момента i-го скачка τ_i в виде произведения одномерной $W_{\tau_i}(\tau_i, t)$ и условной $W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/\tau_i, t)$ плотностей:

$$W_{x\tau_i}(\boldsymbol{x}, \tau_i; t) = W_{\tau_i}(\tau_i, t)\, W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/\tau_i; t). \tag{17}$$

Используя как исходное уравнение для апостериорной плотности вероятности (9) и представления (13), (14), (17), (8), (11), найдем уравнения для вспомогательных функций $p_j(t)$, $W_j(\boldsymbol{x}, t)$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$:

$$\begin{gathered}
\frac{dp_0}{dt} = - W_{\tau_1}(t, t) + [\langle F_0(\boldsymbol{x}, t)\rangle_0 - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_0, \\
\frac{dp_n}{dt} = W_{\tau_n}(t, t) - W_{\tau_{n+1}}(t, t) + [\langle F_n(\boldsymbol{x}, t)\rangle_n - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_n, \\
\frac{dp_M}{dt} = W_{\tau_M}(t, t) + [\langle F_M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_M - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_M, \\
\frac{\partial W_0(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = L_0 W_0(\boldsymbol{x}, t) + [F_0(\boldsymbol{x}, t) - \langle F_0(\boldsymbol{x}, t)\rangle_0]\, W_0(\boldsymbol{x}, t) - \\
- \frac{W_{\tau_1}(t, t)}{p_0}\, [W_{x/\tau_1}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_0(\boldsymbol{x}, t)], \\
\frac{\partial W_n(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = L_n W_n(\boldsymbol{x}, t) + [F_n(\boldsymbol{x}, t) - \langle F_n(\boldsymbol{x}, t)\rangle_n] \times \\
\times W_n(\boldsymbol{x}, t) + \frac{W_{\tau_n}(t, t)}{p_n}\, [W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_n(\boldsymbol{x}, t)] - \\
- \frac{W_{\tau_{n+1}}(t, t)}{p_n}\, [W_{x/\tau_{n+1}}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_n(\boldsymbol{x}, t)], \\
\frac{\partial W_M(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = L_M W_M(\boldsymbol{x}, t) + [F_M(\boldsymbol{x}, t) - \langle F_M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_M]\, W_M(\boldsymbol{x}, t) + \\
+ \frac{W_{\tau_M}(t, t)}{p_M}\, [W_{x/\tau_M}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_M(\boldsymbol{x}, t)] \\
(n = 1, 2, \ldots, M - 1; \quad t \geqslant 0).
\end{gathered} \tag{18}$$

Здесь приняты обозначения:

$$W_{\tau_i}(t, t) = W_{\tau_i}(\tau_i, t)|_{\tau_i = t}, \quad W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/t; t) = W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/\tau_i; t)|_{\tau_i = t},$$

$$\langle F_j(\boldsymbol{x}, t)\rangle_j \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_j(\boldsymbol{x}, t)\, W_j(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x} \quad (i = 1, 2, \ldots, M; \quad j = 0, 1, \ldots, M).$$

Заметим, что в силу (13), (14) выполняется равенство

$$\langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau} = \sum_{j=0}^{M} p_j(t) \langle F_j(\boldsymbol{x}, t)\rangle_j. \tag{19}$$

Начальные условия к уравнениям (18) определяются при $t=0$ из (10), (12) — (14). Предположим, что априорное распределение момента первого скачка имеет вид $P_{\tau_1}(\tau_1)$, интервалы времени между скачками независимы и имеют одинаковые распределения (2). Тогда из (12) — (14) находим начальные условия к системе (18) в виде

$$p_0(t)|_{t=0} = \int_0^\infty P_{\tau_1}(u)\,du,$$

$$p_n(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^0 \frac{(-\nu u)^{n-1}}{(n-1)!} P_{\tau_1}(u) e^{\nu u} du \qquad (n = 1, 2, \ldots, M-1),$$

$$p_M(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^0 \left[1 - \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-\nu u)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\nu u}\right] P_{\tau_1}(u)\,du, \tag{20}$$

$$W_j(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = P_{jx}(\boldsymbol{x}) \quad (j = 0, 1, \ldots, M).$$

Чтобы система уравнений (18) стала замкнутой, необходимо определить значения апостериорных плотностей вероятности $W_{\tau_i}(\tau_i, t)|_{\tau_i=t} = W_{\tau_i}(t,t)$ появления i-го скачка в момент времени $\tau_i = t$ и условные плотности вероятности вектора $\boldsymbol{x}$ в этот же момент времени $W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/\tau_i;\ t)|_{\tau_i=t} = W_{x/\tau_i}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$, где $i = 1, 2, \ldots, M$. Оказывается, что эти плотности вероятности просто определяются в случае пуассоновской априорной статистики моментов переключения τ_i. В Приложении показывается, что в случае пуассоновской статистики моментов скачков (2) выполняются следующие равенства:

$$W_{\tau_1}(t, t) = \nu_0(t) p_0(t), \qquad \nu_0(t) \equiv P_{\tau_1}(t) \Big/ \int_t^\infty P_{\tau_1}(u)\,du,$$

$$W_{\tau_n}(t, t) = \nu p_{n-1}(t) \quad (n = 2, 3, \ldots, M), \tag{21}$$

$$W_{x/\tau_j}(\boldsymbol{x}/t;\ t) \equiv W_{j-1}(\boldsymbol{x}, t) \quad (j = 1, 2, \ldots, M).$$

Поэтому систему уравнений (18) с учетом (21) можно упростить и записать в виде

$$\frac{dp_0}{dt} = -\nu_0(t) p_0 + [\langle F_0(\boldsymbol{x}, t)\rangle_0 - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_0,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \nu_0(t) p_0 - \nu p_1 + [\langle F_1(\boldsymbol{x}, t)\rangle_1 - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_1,$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \nu p_{n-1} - \nu p_n + [\langle F_n(\boldsymbol{x}, t)\rangle_n - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_n,$$

$$\frac{dp_M}{dt} = \nu p_{M-1} + [\langle F_M(\boldsymbol{x}, t)\rangle_M - \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, p_M$$

$$(n = 2, 3, \ldots, M-1), \tag{22}$$

$$\frac{\partial W_0(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = L_0 W_0(\boldsymbol{x}, t) + [F_0(\boldsymbol{x}, t) - \langle F_0(\boldsymbol{x}, t)\rangle_0]\, W_0(\boldsymbol{x}, t),$$

$$\frac{\partial W_1(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} = L_1 W_1(\boldsymbol{x},\ t) + [F_1(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_1(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_1]\, W_1(\boldsymbol{x},\ t) + $$
$$+ \frac{\nu_0(t)\, p_0}{p_1}\,[W_0(\boldsymbol{x},\ t) - W_1(\boldsymbol{x},\ t)],$$
$$\frac{\partial W_j(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} = L_j W_j(\boldsymbol{x},\ t) + [F_j(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_j(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_j] \times$$
$$\times W_j(\boldsymbol{x},\ t) + \frac{\nu\, p_{j-1}}{p_j}\,[W_{j-1}(\boldsymbol{x},\ t) - W_j(\boldsymbol{x},\ t)]$$
$$(j = 2,\ 3, \ldots,\ M; \quad t \geqslant 0).$$

Начальные условия к системе уравнений (22) даются соотношениями (20).

Уравнения (22) решают задачу нахождения оптимальной оценки вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$. Оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$ можно, используя равенство (15), представить в виде взвешенной суммы элементарных оценок $\hat{\boldsymbol{x}}_j(t)$, являющихся математическими ожиданиями вспомогательных плотностей вероятности $W_j(\boldsymbol{x},\ t)$:

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t) = \sum_{j=0}^{M} p_j(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_j(t) \equiv \sum_{j=0}^{M} p_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x}\, W_j(\boldsymbol{x},\ t)\, d\boldsymbol{x}. \tag{23}$$

Алгоритм получения вероятностей $p_j(t)$ и элементарных оценок $\hat{\boldsymbol{x}}_j(t)$ вытекает из уравнений (22). В случае линейной модели динамической системы и линейных по $\boldsymbol{x}$ наблюдений, а также гауссовых априорных распределений $P_{j\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$ вспомогательная плотность вероятности $W_0(\boldsymbol{x},\ t)$ остается гауссовой при всех $t \geqslant 0$, тогда как другие вспомогательные плотности вероятности $W_j(\boldsymbol{x},\ t)$, где $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ M$, с течением времени в общем случае теряют свойство гауссовости. Поэтому уравнения для элементарной оценки $\hat{\boldsymbol{x}}_0(t)$ и матрицы ковариаций $K_0(t)$ находятся из (22) точно, а для нахождения квазиоптимальных элементарных оценок $\hat{\boldsymbol{x}}_j(t)$ и их матриц ковариаций $K_j(t)$ при $j \geqslant 1$ можно пользоваться, например, гауссовой аппроксимацией функций $W_j(\boldsymbol{x},\ t)$[7].

3. Полученные выше общие уравнения (22) и формула (23) могут быть применены для решения поставленной задачи оценивания состояния системы при совместном действии импульсных и шумовых возмущений. Если не требуется находить оценки величин импульсных возмущений $\boldsymbol{A}_i$, то задача может быть упрощена путем сокращения числа решаемых дифференциальных уравнений. Для этого введем вместо векторов $\boldsymbol{A}_i$ новые переменные $\boldsymbol{q}_i(t)$:

$$\boldsymbol{q}_i(t) \equiv \boldsymbol{q}_0(t) + \sum_{j=1}^{i} \boldsymbol{A}_j \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ M). \tag{24}$$

Тогда система уравнений (5) преобразуется к виду

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{d\boldsymbol{q}_0}{dt} = D(t)\boldsymbol{q}_0 + G(t)\boldsymbol{\xi}(t) \\ &\boldsymbol{y}(t) = H(t)\boldsymbol{q}_0(t) + \boldsymbol{\eta}(t) \end{aligned}\right. \quad t \leqslant \tau_1;$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dq_n}{dt} = D(t)\,q_n + G(t)\,\xi(t), \\
 & \tau_n < t \leqslant \tau_{n+1}; \\
y(t) = H(t)\,q_n(t) + \eta(t),
\end{cases}
\tag{25}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{dq_M}{dt} = D(t)\,q_M + G(t)\,\xi(t), \\
 & \tau_M < t \quad (n = 1,\ 2, \dots,\ M-1). \\
y(t) = H(t)\,q_M(t) + \eta(t),
\end{cases}
$$

С учетом замен (4), (24) найдем плотность вероятности случайной совокупности $\{q,\ \tau\}$, удовлетворяющей уравнениям (24), (25), в начальный момент времени $t = 0$. Т. е. выразим $P_{q\tau}(q,\ \tau)$ через плотности вероятности $P_z(z)$, $P_A(A)$, $P_\tau(\tau)$:

$$
P_{q\tau}(q,\ \tau) =
$$
$$
= \begin{cases}
P_z(q_0)\,P_{A_1}(q_1 - q_0)\,P_{A_2}(q_2 - q_1) \dots P_{A_M}(q_M - q_{M-1})\,P_\tau(\tau), & 0 \leqslant \tau_1, \\
P_z(q_n)\,P_{A_1}(q_1 - q_0)\,P_{A_2}(q_2 - q_1) \dots P_{A_M}(q_M - q_{M-1})\,P_\tau(\tau), & \tau_n < 0 \leqslant \tau_{n+1} \\
P_z(q_M)\,P_{A_1}(q_1 - q_0)\,P_{A_2}(q_2 - q_1) \dots P_{A_M}(q_M - q_{M-1})\,P_\tau(\tau), & \tau_M < 0
\end{cases}
$$
$$
(n = 1,\ 2, \dots,\ M-1).
\tag{26}
$$

Если обозначить марковскую совокупность величин $q \equiv \{q_0,\ q_1, \dots,\ q_M\}$, заданную уравнениями (24), (25), через x, то, используя уравнения (20), (22), (23), можно решить задачу оптимального оценивания состояния $z(t)$ динамической системы (1).

Решим задачу фильтрации для q. Из соотношений (20), (12), (26), (3) найдем начальные условия для вспомогательных плотностей вероятности $W_j(q,\ t)$:

$$
W_j(q,\ t)|_{t=0} = P_z(q_j)\,P_a(q_1 - q_0)\,P_a(q_2 - q_1) \dots P_a(q_M - q_{M-1})
$$
$$
(j = 0,\ 1, \dots,\ M).
\tag{27}
$$

Начальные значения элементарных оценок

$$
\hat{q}_j(t) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_j W_j(q,\ t)\,dq \quad (j = 0,\ 1, \dots,\ M)
\tag{28}
$$

и начальные матрицы их ковариаций из (27) равны

$$
\hat{q}_j|_{t=0} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} z P_z(z)\,P_A(A)\,dz\,dA \equiv \hat{z}_0,
$$
$$
K_j|_{t=0} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} (z - \hat{z}_0)(z - \hat{z}_0)^{\mathrm{T}}\,P_z(z)\,P_A(A)\,dz\,dA \equiv K_{z_0}.
\tag{29}
$$

Предположим, что начальные распределения $P_z(z)$ и $P_a(A_l)$ гауссовы: $\hat{A}_0$ и K_{A_0} — среднее значение и дисперсия плотности $P_a(A_l)$. Тогда, используя (22) в применении к рассматриваемому случаю (24), (25), получим в гауссовом приближении уравнения для вспомогательных функций $p_j(t)$, векторов элементарных оценок $\hat{q}_j(t)$ и матриц ковариаций $K_j(t)$:

$$\frac{dp_0}{dt} = -\nu_0(t)p_0 + \left[\langle F_0\rangle_0 - \sum_{j=0}^{M} p_j \langle F_j\rangle_j\right]p_0,$$

$$\frac{dp_1}{dt} = \nu_0(t)p_0 - \nu p_1 + \left[\langle F_1\rangle_1 - \sum_{j=0}^{M} p_j \langle F_j\rangle_j\right]p_1,$$

$$\frac{dp_n}{dt} = \nu p_{n-1} - \nu p_n + \left[\langle F_n\rangle_n - \sum_{j=0}^{M} p_j \langle F_j\rangle_j\right]p_n, \tag{30}$$

$$\frac{dp_M}{dt} = \nu p_{M-1} + \left[\langle F_M\rangle_M - \sum_{j=0}^{M} p_j \langle F_j\rangle_j\right]p_M,$$

$$\nu_0(t) \equiv P_{\tau_1}(t) \Big/ \int_t^\infty P_{\tau_1}(u)\,du \quad (n = 2,\ 3, \ldots,\ M-1);$$

$$\frac{d\hat{q}_0}{dt} = D(t)\hat{q}_0 + K_0H^\text{т}(t)N^{-1}(t)\,[\mathbf{y}(t) - H(t)\hat{q}_0],$$

$$\frac{dK_0}{dt} = D(t)K_0 + K_0D^\text{т}(t) + G(t)Q(t)G^\text{т}(t) - K_0H^\text{т}(t)N^{-1}(t)H(t)K_0,$$

$$\frac{d\hat{q}_1}{dt} = D(t)\hat{q}_1 + K_1H^\text{т}(t)N^{-1}(t)\,[\mathbf{y}(t) - H(t)\hat{q}_1] +$$

$$+ (\nu_0(t)p_0/p_1)\,[\hat{q}_0 + \hat{A}_0 - \hat{q}_1], \tag{31}$$

$$\frac{dK_1}{dt} = D(t)K_1 + K_1D^\text{т}(t) + G(t)Q(t)G^\text{т}(t) - K_1H^\text{т}(t)N^{-1}(t)\times$$

$$\times H(t)K_1 + (\nu_0(t)p_0/p_1)\,[(\hat{q}_0 + \hat{A}_0 - \hat{q}_1)(\hat{q}_0 + \hat{A}_0 - \hat{q}_1)^\text{т} + (K_0 + K_{A_0} - K_1)],$$

$$\frac{d\hat{q}_n}{dt} = D(t)\hat{q}_n + K_nH^\text{т}(t)N^{-1}(t)\,[\mathbf{y}(t) - H(t)\hat{q}_n] +$$

$$+ \frac{\nu p_{n-1}}{p_n}\,[\hat{q}_{n-1} + \hat{A}_0 - \hat{q}_n],$$

$$\frac{dK_n}{dt} = D(t)K_n + K_nD^\text{т}(t) + G(t)Q(t)G^\text{т}(t) - K_nH^\text{т}(t)N^{-1}(t)H(t)K_n +$$

$$+ \frac{\nu p_{n-1}}{p_n}\,[(\hat{q}_{n-1} + \hat{A}_0 - \hat{q}_n)(\hat{q}_{n-1} + \hat{A}_0 - \hat{q}_n)^\text{т} + (K_{n-1} + K_{A_0} - K_n)]$$

$$(n = 2,\ 3, \ldots,\ M).$$

Здесь средние значения от скалярных функций

$$F_j(q_j,\ t) = q_j^{\text{т}} H^{\text{т}} N^{-1} (y - Hq_j/2)$$

по распределениям $W_j(q,\ t)$ выражаются через средние значения $\hat{q}_j$ и ковариации K_j следующим образом:

$$\langle F_j(q_j,\ t)\rangle_j = \hat{q}_j^{\text{т}} H^{\text{т}} N^{-1} (y - H\hat{q}_j/2) - (1/2)\,\mathrm{Tr}\,(N^{-1} HK_j H^{\text{т}})$$

$$(j = 0,\ 1, \ldots,\ M). \tag{32}$$

Начальные условия к уравнениям (31) имеют вид (29). Начальные условия для функций $p_j(t)$, где $j = 0, 1, \ldots, M$, удовлетворяющих уравнениям (30), имеют вид (20).

Используя выражения (4), (24), несложно найти представление оптимальной оценки $\hat{z}(t)$ через элементарные оценки $\hat{q}_0(t)$, $\hat{q}_1(t), \ldots, \hat{q}_M(t)$:

$$\hat{z}(t) = \left\langle q_0(t) + \sum_{l=1}^{M} A_l\, 1\,(t - \tau_l)\right\rangle = \langle q_0 + (q_1 - q_0)\, 1\,(t - \tau_1) +$$

$$+ (q_2 - q_1)\, 1\,(t - \tau_2) + \ldots + (q_M - q_{M-1})1\,(t - \tau_M)\rangle = \sum_{j=0}^{M} p_j(t)\, q_j(t). \tag{33}$$

Уравнения (30) — (33) решают поставленную задачу оптимального оценивания вектора состояния динамической системы (1) в условиях возмущений шумового и импульсного типов.

4. Обсудим работу схемы оптимальной фильтрации. Для простоты предположим, что плотность вероятности времени появления первого возмущающего δ-импульса в системе имеет вид (2), как и плотности вероятностей интервалов времени между соседними импульсами:

$$P_{\tau_1}(\tau_1) = \nu \exp(-\nu\tau_1)\, 1\,(\tau_1).$$

Тогда можно показать, что выполняется равенство в (30), (31):

$$\nu_0(t) \equiv \nu \quad (t \geqslant 0). \tag{34}$$

Из уравнений (30)—(33) видно, что схему оптимального оценивания вектора состояния системы $z(t)$ можно условно разделить на две взаимосвязанные части — блок «обнаружения» возмущений импульсного типа, описываемый уравнениями (30), и собственно блок оценки, описываемый уравнениями (31), (33). Если шумовое возмущение системы $\xi(t)$ и шумы наблюдений $\eta(t)$ достаточно малы, то, как можно показать из (30), до прихода первого импульса схема обнаружения вырабатывает значение функции $p_0(t)$, близкое к единице, а функции $p_1(t)$, $p_2(t)$, ..., $p_M(t)$ близки к нулю (система находится в устойчивом стационарном состоянии $p_0(t) \approx 1$). При этом оценка $\hat{z}(t)$, вырабатываемая всей схемой, в силу (33) остается близкой к оценке $\hat{q}_0(t)$, для которой уравнения (31), по существу, совпадают с уравнениями оптимального фильтра Калмана — Бьюси. Оценка $\hat{q}_1(t)$ и ее дисперсия $K_1(t)$ поддерживаются на уровнях, близких к уровням $\hat{q}_0(t) + \hat{A}_0$ и $K_0(t) + K_{A_0}$, за счет большого коэффициента $\nu p_0(t)/p_1(t)$ перед слагаемыми, пропорциональными разностям $(\hat{q}_0+\hat{A}_0-\hat{q}_1)$, $(K_0-K_{A_0}-K_1)$ в правых частях уравнений (31). После прихода первого δ-импульса ошибка «невязки» оценки $H(t)\hat{q}_0(t)$ и наблюдения $\boldsymbol{y}(t)$ увеличивается, оценка $\hat{q}_1(t)$ в силу уравнений (31) несколько изменяется, что приводит к быстрому увеличению $p_1(t)$ от нуля до единицы (схема обнаружения «опрокидывается» к другому стационарному состоянию $p_1(t)\approx 1$, которое становится устойчивым). Оценка $\hat{\boldsymbol{z}}(t)$ при этом становится близкой к оценке $\hat{q}_1(t)$. Коэффициент $\nu p_0(t)/p_1(t)$ стремится к нулю, и блок оценивания начинает вырабатывать оценку $\hat{q}_1(t)$ снова как обычный фильтр Калмана — Бьюси. Дисперсия оценки $\hat{q}_1(t)$ в момент «переброса» функции $p_1(t)$ от нуля к единице больше дисперсии оценки $\hat{q}_0(t)$ на величину дисперсии интенсивности импульсного возмущения K_{A_0}. Таким образом, коэффициент усиления фильтра Калмана—Бьюси в момент прихода импульсного возмущения резко увеличивается на величину K_{A_0}. Это и позволяет оптимально оценить состояние системы $\boldsymbol{z}(t)$ с учетом прихода импульсного возмущения. Заметим, что до прихода первого δ-импульса уравнения для функций $p_2, p_3, \ldots, p_M$ и оценок $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3, \ldots$, $\boldsymbol{q}_M$ несущественны, если только шумы $\xi(t)$, $\eta(t)$ достаточно малы. После «отрабатывания» первого импульсного возмущения становятся несущественными уравнения для $p_0(t)$ и $\hat{q}_0(t)$. Зато «включаются» уравнения для $p_2(t)$ и оценки $\hat{q}_2(t)$, и система обнаружения начинает ожидать прихода второго δ-импульса. После прихода второго δ-импульса происходит вновь «опрокидывание» к новому стационарному состоянию $p_2(t)\approx 1$, и далее процесс повторяется.

В заключение авторы выражают глубокую признательность А. Н. Малахову за внимание к работе и обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем уравнения для функций $W_{\tau_n}(t, t)$; $W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t; t)$ при $n = 1, 2, \ldots, M$. С этой целью сначала запишем представления этих функций через переменные u_i, связанные с интервалами времени между соседними скачками соотношениями

$$u_1\equiv\tau_1,\quad u_n\equiv\tau_n-\tau_{n-1}\quad (n=2, 3, \ldots, M). \tag{П.1}$$

Преимущество новых переменных $\boldsymbol{u}\equiv\{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$ заключается в том, что априорные распределения моментов скачков τ_i более физично задавать именно с помощью них. Как уже отмечалось, будем считать, что априорное распределение интервала до первого скачка равно $P_{\tau_1}(u_1)$, интервалы между скачками независимы и имеют одинаковые распределения (2). В новых переменных уравнение Стратоновича для апостериорной плотности вероятности $W_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t)$ марковской совокупности $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}\}$ имеет вид

$$\frac{\partial W_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t)}{\partial t}=LW_{xu}(\boldsymbol{x}, u; t)+[F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)-\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t)\rangle_{xu}]\times$$
$$\times W_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t)\quad (t\geqslant 0), \tag{П.2}$$
$$W_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t)|_{t=0}=P_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),$$

где, по аналогии с (8), (11), (14),

$$L(\cdot) \equiv \begin{cases} L_0(\cdot), & t \leqslant u_1 \\ L_n(\cdot), & u_1 + u_2 + \ldots + u_n < t \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}; \\ L_M(\cdot), & u_1 + u_2 + \ldots + u_M < t \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases} \qquad (\text{П. } 3)$$

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \equiv \begin{cases} F_0(\boldsymbol{x}, t), & t \leqslant u_1 \\ F_n(\boldsymbol{x}, t), & u_1 + u_2 + \ldots + u_n < t \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}, \\ F_M(\boldsymbol{x}, t), & u_1 + u_2 + \ldots + u_M < t \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases} \qquad (\text{П } 4)$$

$$\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \rangle_{xu} \equiv \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) W_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) d\boldsymbol{x}\, d\boldsymbol{u};$$

$$P_{xu}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \equiv \begin{cases} P_{0x}(\boldsymbol{x}) P_u(\boldsymbol{u}), & 0 \leqslant u_1 \\ P_{nx}(\boldsymbol{x}) P_u(\boldsymbol{u}), & u_1 + u_2 + \ldots + u_n < 0 \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}; \\ P_{Mx}(\boldsymbol{x}) P_u(\boldsymbol{u}), & u_1 + u_2 + \ldots + u_M < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases} \qquad (\text{П. } 5)$$

$$P_u(\boldsymbol{u}) = P_{\tau_1}(u_1) P_u(u_2) P_u(u_3) \ldots P_u(u_M) =$$
$$= P_{\tau_1}(u_1) \nu \exp(-\nu u_2)\, 1(u_2) \nu \exp(-\nu u_3) \times \qquad (\text{П. } 6)$$
$$\times 1(u_3) \ldots \nu \exp(-\nu u_M)\, 1(u_M).$$

Интегрируя (П. 2) по $\boldsymbol{x}$, получим уравнение для апостериорной плотности вероятности $W_u(\boldsymbol{u}, t)$ интервалов времени между скачками:

$$\frac{\partial W_u(\boldsymbol{u}, t)}{\partial t} = [\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \rangle_{x/u} - \langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \rangle_{xu}]\, W_u(\boldsymbol{u}, t) \quad (t \geqslant 0),$$
$$W_u(\boldsymbol{u}, t)|_{t=0} = P_u(\boldsymbol{u}). \qquad (\text{П.} 7)$$

Здесь приняты обозначения:

$$\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \rangle_{x/u} \equiv \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t) d\boldsymbol{x},$$

$W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t)$ — апостериорная плотность вероятности $\boldsymbol{x}$ при условии фиксированных интервалов $\boldsymbol{u} \equiv \{u_1, u_2, \ldots, u_M\}$, уравнение для которой получим из (П.2), (П.7):

$$\partial W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t)/\partial t = L W_{xu}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t) + [F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) -$$
$$- \langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t) \rangle_{x/u}]\, W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t) \quad (t \geqslant 0),$$

$$W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t)|_{t=0} = \begin{cases} P_{0x}(\boldsymbol{x}), & 0 \leqslant u_1 \\ P_{nx}(\boldsymbol{x}), & u_1 + u_2 + \ldots + u_n < 0 \leqslant u_1 + u_2 + \ldots + u_{n+1}. \\ P_{Mx}(\boldsymbol{x}), & u_1 + u_2 + \ldots + u_M < 0 \quad (n = 1, 2, \ldots, M-1) \end{cases} \qquad (\text{П. } 8)$$

Решение уравнения (П. 7) имеет вид

$$W_u(\boldsymbol{u}, t) = P_u(\boldsymbol{u}) \exp\left\{ \int\limits_0^t [\langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t') \rangle_{x/u} - \langle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}; t') \rangle_{xu}]\, dt' \right\}$$
$$(t \geqslant 0), \qquad (\text{П. } 9)$$

а для $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u};\ t)$ из (П. 8) получим следующее свойство: условная плотность вероятности $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}; t)$ не зависит от $u_n, u_{n+1}, .., u_M$ в момент времени t, если $0 \leqslant t \leqslant \tau_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Действительно, при этом условии вид уравнения (П. 8) не зависит от $u_n, u_{n+1}, ..., u_M$ (см. выражения (П. 3), (П.4) для $L(\cdot)$ и $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t)$). Начальные условия также не зависят от $u_n, u_{n+1}, ..., u_M$ (см. (П. 8)). Поэтому и решение уравнения (П. 8) — функция $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u};\ t)$ — не зависит от u_n, $u_{n+1}, ..., u_M$.

Запишем представления плотностей $W_{\tau_n}(\tau_n,\ t)$, $W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ \tau_n;\ t)$ через плотности вероятности $W_u(\boldsymbol{u},\ t)$ и $W_{xu}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t)$ при произвольном τ_n $(n = 1,\ 2,\ ...,\ M)$:

$$W_{\tau_n}(\tau_n,\ t) = \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} W_\tau(\tau_1,\ \tau_2, ..,\ \tau_M;\ t)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n-1}\, d\tau_{n+1} \ldots d\tau_M =$$
$$= \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} W_u(u_1,\ u_2, ...,\ u_M;\ t)|_{\tau_n}\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}\, du_{n+1} \ldots du_M; \tag{П. 10}$$

$$W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ \tau_n;\ t) = \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} W_{x\tau}(\boldsymbol{x},\ \tau_1,\ \tau_2, ...,\ \tau_M;\ t) \times$$
$$\times\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_{n-1}\, d\tau_{n+1} \ldots d\tau_M = \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} [W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u},\ t) W_u(\boldsymbol{u},\ t)]\,|_{\tau_n} \times$$
$$\times\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}\, du_{n+1} \ldots du_M, \tag{П. 11}$$

где принято обозначение $|_{\tau_n}$ для условия $u_n = \tau_n - u_1 - u_2 - \ldots - u_{n-1}$. В момент времени $\tau_n = t$ из (П. 6), (П. 9), (П. 10) получим

$$W_{\tau_n}(t,\ t) = \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} P_{\tau_1}(u_1) P_u(u_2) \ldots P_u(u_{n-1}) P_u(t - u_1 -$$
$$- u_2 - \ldots - u_{n-1}) P_u(u_{n+1}) \ldots P_u(u_M) \exp\left\{\int_0^t [\langle F(\boldsymbol{x},\right.$$
$$\left.\boldsymbol{u},\ t')\rangle_{x/u}|_{\tau_n = t} - \langle F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u},\ t')\rangle_{xu}]\, dt'\right\} du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}\, du_{n+1} \ldots du_M \tag{П. 12}$$
$$(n = 1,\ 2, ...,\ M; \quad t \geqslant 0).$$

Здесь показатель экспоненты не зависит от $u_n, u_{n+1}, ..., u_M$, так как функции $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t')$ и $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u};\ t')$ не зависят от этих величин, поскольку $t' \leqslant t = \tau_n$. Поэтому при $n = 1$ из (П. 4), (П. 12) имеем

$$W_{\tau_1}(t,\ t) = P_{\tau_1}(t) \exp\left\{\int_0^t [\langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_{x/\tau_1 = t} -\right.$$
$$\left. - \langle F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\tau},\ t')\rangle_{x\tau}]\, dt'\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{П. 13}$$

Продифференцируем выражение (П. 12) по времени, считая $n > 1$, и учтем, что принята пуассоновская статистика (П. 6) для длительностей интервалов между скачками и что в силу (П. 4) выполняется соотношение

$$\underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} [\langle F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t)\rangle_{x/u} W_u(\boldsymbol{u},\ t)]\,|_{\tau_n = t}\, du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}\, dn_{n+1} \ldots du_M =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{x} \underbrace{\iint\ldots\int}_{M-1} du_1\, du_2 \ldots du_{n-1}\, du_{n+1} \ldots du_M \times$$

$$\times F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t) W_{xu}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{u};\ t)|_{\tau_n=t} = \langle F_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_{x/\tau_n=t} W_{\tau_n}(t,\ t).$$

В результате получим дифференциальные уравнения для функций $W_{\tau_n}(t,t)$:

$$\frac{dW_{\tau_n}(t,\ t)}{dt} = \nu W_{\tau_{n-1}}(t,\ t) - \nu W_{\tau_n}(t,\ t) + [\langle F_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_{x/\tau_n=t} -$$

$$- \langle F(\boldsymbol{x},\ \tau;\ t)\rangle_{x\tau}] W_{\tau_n}(t,\ t) \quad (n = 2,\ 3, \ldots,\ M;\quad t \geqslant 0). \tag{П. 14}$$

Уравнение для условной плотности вероятности $W_{x/\tau_1}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$ находим из (П. 3), (П. 4), (П. 8), используя независимость $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u};\ t)|_{\tau_1=t}$ от $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_M$:

$$\frac{\partial W_{x/\tau_1}(\boldsymbol{x}/t;\ t)}{\partial t} = L_0 W_{x/\tau_1}(\boldsymbol{x}/t;\ t) + [F_0(\boldsymbol{x},\ t) -$$

$$- \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_{x/\tau_1=t}] W_{x/\tau_1}(\boldsymbol{x}/t;\ t) \quad (t \geqslant 0). \tag{П. 15}$$

Чтобы найти уравнение для $W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$ при $n = 2,\ 3,\ \ldots,\ M$, продифференцируем выражение (П. 11) для $W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ \tau_n;\ t)$ по времени, считая $\tau_n = t$. Используя (П. 3), (П. 4), (П. 6)—(П. 9) и независимость $W_{x/u}(\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u};\ t)|_{\tau_n=t}$ от $u_n,\ u_{n+1},\ \ldots,\ u_M$, в результате получим

$$\frac{\partial W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t)}{\partial t} = L_{n-1} W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t) + [F_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t) -$$

$$- \langle F(\boldsymbol{x},\ \tau;\ t)\rangle_{x\tau}] W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t) + \nu W_{x\tau_{n-1}}(\boldsymbol{x},\ t;\ t) - \tag{П. 16}$$

$$- \nu W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t) \quad (n = 2,\ 3, \ldots,\ M;\quad t \geqslant 0).$$

Представив теперь $W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t)$ в виде

$$W_{x\tau_n}(\boldsymbol{x},\ t;\ t) = W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)\, W_{\tau_n}(t,\ t), \tag{П. 17}$$

из (П. 14), (П. 16) получим дифференциальные уравнения для условных плотностей $W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$:

$$\frac{\partial W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)}{\partial t} = L_{n-1} W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t) + [F_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t) -$$

$$- \langle F_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_{x/\tau_n=t}] W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t) + \tag{П. 18}$$

$$+ \frac{\nu W_{\tau_{n-1}}(t,\ t)}{W_{\tau_n}(t,\ t)} [W_{x/\tau_{n-1}}(\boldsymbol{x}/t;\ t) - W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)]$$

$$(n = 2,\ 3, \ldots,\ M;\quad t \geqslant 0).$$

Начальные условия к уравнениям (П. 14) найдем из (П. 6), (П. 12), а к уравнениям (П. 15), (П. 18) из (П. 8), (П. 10), (П. 11), (П. 17). Они имеют вид

$$W_{\tau_n}(t,\ t)|_{t=0} = \nu \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{(-\nu u)^{n-2}}{(n-2)!} P_{\tau_1}(u)\, e^{\nu u} du$$

$$(n = 2,\ 3, \ldots,\ M), \tag{П. 19}$$

$$W_{x/\tau_j}(\boldsymbol{x}/t;\ t)|_{t=0} = P_{j-1x}(\boldsymbol{x}) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ M).$$

Сопоставляя уравнения (П. 14), (П. 15), (П. 18) для функций $W_{\tau_n}(t,\ t)$, $W_{x/\tau_n}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$ с уравнениями (18) для функций $p_{n-1}(t)$, $W_{n-1}(\boldsymbol{x},\ t)$, а также начальные условия (П. 19) с условиями (20), делаем вывод, что выполняются соотношения

$$W_{\tau_1}(t,\ t) = P_{\tau_1}(t)\, e^{-g(t)}, \qquad g(t) \equiv \int\limits_0^t [\langle F(\boldsymbol{x},\ \tau;\ t')\rangle_{x\tau} - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_0]dt',$$

$$W_{\tau_n}(t,\ t) = \nu p_{n-1}(t) \quad (n = 2,\ 3, \ldots,\ M), \tag{П. 20}$$

$$W_{x/\tau_j}(\boldsymbol{x}/t;\ t) \equiv W_{j-1}(\boldsymbol{x},\ t) \quad (j = 1,\ 2, \ldots,\ M).$$

Используя первое уравнение в (18) для $p_0(t)$, можно показать, что выражение для $W_{\tau_1}(t,\ t)$ упрощается, если ввести функцию $\nu_0(t) \equiv \equiv P_{\tau_1}(t) \Big/ \int\limits_t^\infty P_{\tau_1}(u)du$. В итоге получим представление

$$W_{\tau_1}(t,\ t) = \nu_0(t)\, p_0(t). \tag{П. 21}$$

ЛИТЕРАТУРА

1 Джонсон С. Теория регуляторов, приспосабливающихся к возмущениям. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. /Под ред. К Т. Леондеса.— М : Мир, 1980, с. 253.

2. Тихонов В. И., Ершов Л. А. — Радиотехника и электроника, 1979, **24**, № 3, с. 551.

3 Шмелев А. Б — Радиотехника и электроника, 1975, **20**, № 12, с. 2467.

4. Мальцев А А, Силаев А. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1983, **26**, № 1, с. 49.

5 Мальцев А А, Силаев А. М — Автоматика и телемеханика (в печати).

6. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.— М.: МГУ, 1966.

7 Тихонов В. И, Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.— М : Сов. радио, 1975

8 Липцер Р. Ш, Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов.— М : Наука, 1974.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 4 августа 1982 г.

OPTIMAL ESTIMATION IN DYNAMICAL SYSTEMS WITH SIMULTANEOUS IMPULSE AND NOISE DISTURBANCES

A. A. Mal'tsev, A. M. Silaev

The optimal estimation problem of the state vector of the dynamical system driven by simultaneous impulse and noise disturbances is solved in the paper by the methods of the conditional Markov processes theory. It is assumed a priori that impulse-type disturbances have Poissonian statistics. The closed system of equations for a pesteriori probabilities and auxiliary conditional probability density finctions of dynamical system state is derived. In the case of the linear dynamical systems and linear observations the equations for the least mean square estimate of the state vector is obtained in Gaussian approximation The structure of the derived optimal filtering scheme is discussed