

УДК 551.521 3 : 551 576

## ПЕРЕНОС ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В МОДЕЛИ РАЗОРВАННОЙ ОБЛАЧНОСТИ В ВИДЕ ПУАССОНОВСКОГО ИНДИКАТОРНОГО ПОЛЯ

*В. Н. Скоринов, Г. А. Титов*

Получены уравнения для моментов интенсивности коротковолнового оптического излучения в конструктивно заданной модели облачного поля. Приведены оценки точности приближений, сделанных при выводе и решении уравнений

Основной задачей оптики облачности как стохастического образования является установление взаимосвязи между статистическими характеристиками полей облачности и радиации. Строгое решение этой задачи можно получить двумя методами, основанными на стохастическом уравнении переноса. Для удобства условимся называть их методом непосредственного моделирования и методом замкнутых уравнений.

Сущность метода непосредственного моделирования состоит в численном моделировании на ЭВМ выборочных случайных реализаций облачного поля, решении уравнения переноса в данной реализации и усреднении полученных решений по ансамблю реализаций облачного поля с целью получения искомых статистических характеристик излучения. Уравнение переноса решается методом Монте-Карло; другие известные методы практически непригодны, поскольку выборочная реализация облачности представляет собой трехмерную неоднородную рассеивающую среду весьма сложной структуры. Данный метод разработан и реализован для расчета средних характеристик оптического излучения, преобразованного облачностью в виде пуассоновского индикаторного поля [1-3].

Смысл метода замкнутых уравнений заключается в следующем. Основываясь на стохастическом уравнении переноса, можно получить замкнутую систему уравнений для вероятностных характеристик светового поля, например для моментов интенсивности. Решая эту систему, можно определить статистические характеристики излучения по заданным статистическим характеристикам облачности. Путем усреднения стохастического уравнения переноса по пространству [4, 5] и по ансамблю реализаций облачного поля [6] получены уравнения для моментов интенсивности излучения в неконструктивно заданной модели индикаторного облачного поля. Решение методом Монте-Карло системы уравнений для средней интенсивности содержится в [7]; результаты расчетов приведены в [8]. Отметим, что такой метод широко и весьма успешно используется при решении задач статистической физики (см., например, [9]).

В данной работе получены уравнения моментов интенсивности излучения в модели разорванной облачности в виде пуассоновского индикаторного поля. Показано, что в частном случае они эквивалентны соответствующим уравнениям в марковском приближении, и получены оценки точности приближений, сделанных при выводе уравнений.

1. Рассмотрим задачу о переносе оптического излучения в разорванной облачности, модель которой задается в виде пуассоновского индикаторного поля  $x(\mathbf{r})$  или  $\eta(\mathbf{r}) = 1 - x(\mathbf{r})$  [10] в слое  $\Lambda$ :  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$ ,  $0 \leq z \leq H$ . Будем считать, что облачное вещество присутствует в точках, где  $\eta(\mathbf{r}) = 1$  и  $x(\mathbf{r}) = 0$  (обратная модель). В рассматриваемых ранее пуассоновских моделях облачности [1-3] считалось, что облака присутствуют в точках, где  $x(\mathbf{r}) = 1$  и  $\eta(\mathbf{r}) = 0$  (прямая модель).

Приведем без доказательства некоторые результаты работы [10], которые нам понадобятся в дальнейшем. Для упорядоченной последовательности точек  $r_1, \dots, r_n$ , расположенных на одной прямой  $G$ , получены точные формулы для расщепления корреляций вида

$$\langle \eta(r_1) \eta(r_2) R[\eta(\mathbf{r})] \rangle = V(r_1, r_2) \langle \eta(r_2) R[\eta(\mathbf{r})] \rangle; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \langle x(r_1) x(r_2) R[x(\mathbf{r})] \rangle &= \langle x(r_1) R[x(\mathbf{r})] \rangle - \\ &- [1 - V(r_1, r_2)] \langle \eta(r_2) R[x(\mathbf{r})] \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $R[\ ]$  — некоторый функционал, зависящий от значений  $\eta(\mathbf{r})$  или  $x(\mathbf{r})$  на заданной прямой  $G$  до точки  $r_2$  включительно,  $V(r_1, r_2)$  — условная вероятность того, что  $\eta(r_1) = 1$  при условии  $\eta(r_2) = 1$ . Если поле  $\eta(\mathbf{r})$  статистически однородно и на прямой  $G$  процесс  $\eta(\mathbf{r})$  заменен на марковский случайный процесс  $\eta_a(\mathbf{r})$  с двумя состояниями, то формулы (1) и (2) можно записать в виде

$$\langle \eta_a(r_1) \eta_a(r_2) R[\eta_a(\mathbf{r})] \rangle = V_a(r_1, r_2) \langle \eta_a(r_2) R[\eta_a(\mathbf{r})] \rangle; \quad (3)$$

$$\langle x_a(r_1) x_a(r_2) R[x_a(\mathbf{r})] \rangle = V_a^x(r_1, r_2) \langle x_a(r_2) R[x_a(\mathbf{r})] \rangle; \quad (4)$$

$$V_a(r_1, r_2) = (1 - q) \exp[-A(\omega) |r_1 - r_2|] + q, \quad q = \langle \eta \rangle; \quad (5)$$

$$V_a^x(r_1, r_2) = (1 - p) \exp[-A(\omega) |r_1 - r_2|] + p, \quad p = 1 - q, \quad (6)$$

где  $A(\omega)$  — параметр,  $\omega = (r_1 - r_2) / |r_1 - r_2|$ . Равенства (1) — (4) можно использовать как приближение при произвольной конфигурации точек  $r_1, \dots, r_n$ , если

$$l_{\max} \ll L \quad \text{или} \quad l_{\min} \gg L, \quad (7)$$

где  $l$  — расстояние между точками,  $L$  — размер геометрических фигур  $\Gamma$ , совокупность которых образует пуассоновское индикаторное поле  $x(\mathbf{r})$ .

Обратив в стохастическом уравнении переноса дифференциальный оператор, получим уравнение [4], которому удовлетворяет в  $\Lambda$  случайная интенсивность

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') \eta(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \omega) d\xi &= \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') d\xi \times \\ &\times \int_{\Omega} g(\mathbf{r}', \omega \omega') \eta(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \omega') d\omega' + I_*(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma(\mathbf{r})$  — коэффициент ослабления,  $\lambda(\mathbf{r})$  — вероятность выживания кванта,  $g(\mathbf{r}, \omega \omega')$  — индикатриса рассеяния,  $\omega = (a, b, c)$  — единичный вектор направления,  $I_*(\mathbf{r}, \omega)$  — интенсивность внешних источников на границах слоя  $\Lambda$ ,  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\xi - z) c^{-1} \omega$ ,

$$E_z = \begin{cases} (0, z), & c > 0 \\ (z, H), & c < 0 \end{cases}. \quad (9)$$

Здесь оптические характеристики являются заданными неслучайными функциями.

Усредним (8) по ансамблю реализаций поля  $\eta(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}', \omega) d\xi = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') d\xi \times \\ \times \int_{4\pi} g(\mathbf{r}', \omega\omega') \theta(\mathbf{r}', \omega') d\omega' + I_*(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\theta(\mathbf{r}, \omega) = \langle \eta(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}, \omega) \rangle$ . Умножим (8) на  $\eta(\mathbf{r})$  и снова усредним:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') \langle \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \omega) \rangle d\xi = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') d\xi \times \\ \times \int_{4\pi} g(\mathbf{r}', \omega\omega') \langle \eta(\mathbf{r}) \eta(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \omega') \rangle d\omega' + \langle \eta(\mathbf{r}) \rangle I_*(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (8) следует, что  $I(\mathbf{r}, \omega)$  зависит функционально через  $I(\mathbf{r}', \omega')$  от значений поля  $\eta(\mathbf{r})$  во всем слое  $L$ . Это обстоятельство делает, вообще говоря, невозможным использование формулы (1) для расщепления корреляции в (11). Однако равенство (1) можно использовать как приближение, приемлемость которого обосновывается следующими соображениями. Здесь для удобства будем пользоваться терминологией теории методов Монте-Карло.

1) Подавляющее число траекторий фотонов будет близко, в определенном смысле, к прямой линии из-за сильной вытянутости вперед индикатрисы рассеяния элементарного объема облаков.

2) Среднее расстояние между точками  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  равно средней длине свободного пробега фотона в разорванной облачности, которая определяется выражением

$$\langle \bar{l} \rangle = M_\eta \bar{l} = M_\eta \int_0^\infty l f(l/\eta) dl, \quad (12)$$

где  $M_\eta$  — знак математического ожидания по ансамблю реализаций  $\eta(\mathbf{r})$ ,  $f(l/\eta)$  — условная (при данном  $\eta$ ) плотность вероятности длины свободного пробега. Формула (12) справедлива в пределах, определяемых формулой полного математического ожидания. Из (7) следует, что при  $\langle \bar{l} \rangle \ll L$  равенство (1) можно использовать в качестве приближения. Случай  $\langle \bar{l} \rangle \gg L$  не представляет интереса и в пределе приводит к задаче о переносе излучения в детерминированном облачном слое со средними значениями оптических характеристик. Можно ожидать, что для реальных облачных систем при умеренных и больших значениях  $q\langle \bar{l} \rangle$  не превышает десятки метров, тогда как  $L$  порядка сотен метров и даже нескольких километров [11]; поэтому соотношение (1) приближенно выполняется. При малых значениях  $q$  рассеянное излучение становится значительно меньше прямого [8], а для последнего (1) выполняется точно.

Используя формулу (1), из (11) получим уравнение

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}', \omega) d\xi = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\xi \times \\ \times \int_{4\pi} g(\mathbf{r}', \omega\omega') \theta(\mathbf{r}', \omega') d\omega' + \langle \eta(\mathbf{r}) \rangle I_*(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (13)$$

Для средней интенсивности излучения получена замкнутая система уравнений (9) и (13). Единственное приближение, сделанное при выводе этих уравнений, есть предположение о приемлемости соотноше-

ния (1) для расщепления корреляций при произвольном расположении точек. Отметим, что система уравнений для средней интенсивности нерассеянной радиации, которую легко получить из (9) и (13), является в рамках рассматриваемой модели облачного поля точной, поскольку в этом случае мы имеем дело с упорядоченной последовательностью точек на прямой. Используя изложенную выше методику, нетрудно получить уравнения для моментов интенсивности любого порядка.

Если сделать дополнительное предположение об экспоненциальности условной вероятности, т. е. заменить  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  на  $V_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , то уравнения моментов интенсивности в модели пуассоновского индикаторного поля эквивалентны соответствующим уравнениям, полученным в марковском приближении [6]. Следует отметить, что в обратной модели предположение о марковости процесса  $\eta_a$  совсем не обязательно, и экспоненциальную функцию  $V_a$  можно рассматривать лишь как удобную аппроксимацию, в рамках которой получено решение уравнений (9) и (13) [7].

2. Рассмотрим задачу о переносе излучения в прямой модели. Уравнение (8) имеет вид

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') \kappa(\mathbf{r}') I(\mathbf{r}', \omega) d\xi = \\ = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \kappa(\mathbf{r}') \Phi(\mathbf{r}', \omega) d\xi + I_*(\mathbf{r}, \omega), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{4\pi} g(\mathbf{r}, \omega \omega') I(\mathbf{r}, \omega') d\omega'. \quad (15)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \langle \kappa(\mathbf{r}) I(\mathbf{r}', \omega) \rangle, \quad U(\mathbf{r}, \omega) = F(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \\ \Phi_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \langle \kappa(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}', \omega) \rangle, \quad \Phi_U(\mathbf{r}, \omega) = \Phi_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}, \omega), \\ \Phi_\theta(\mathbf{r}, \omega) = \langle \eta(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \omega) \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

После усреднения (14) по ансамблю реализаций поля  $\kappa(\mathbf{r})$  получим

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}', \omega) d\xi = \\ = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \Phi_U(\mathbf{r}', \omega) d\xi + I_*(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Умножим (14) на  $\kappa(\mathbf{r})$ , усредним и для расщепления корреляции воспользуемся равенством (2):

$$\begin{aligned} U(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \sigma(\mathbf{r}') \{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - [1 - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \theta(\mathbf{r}', \omega)\} d\xi = \\ = \frac{1}{|c|} \int_{E_z} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') \{\Phi_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) - [1 - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \Phi_\theta(\mathbf{r}', \omega)\} d\xi + \\ + \langle \kappa(\mathbf{r}) \rangle I_*(\mathbf{r}, \omega). \end{aligned} \quad (18)$$

В (18) содержится новая неизвестная функция  $F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega)$ , так как  $\theta(\mathbf{r}, \omega) = \langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle - U(\mathbf{r}, \omega)$  и  $\Phi$  с индексом выражается через соответствующую функцию (15). Запишем (14) для точки  $\mathbf{r}'$ , умножим на  $\kappa(\mathbf{r})$  и снова усредним

$$\begin{aligned}
 & F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{\xi} \sigma(\mathbf{r}'') \{F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) - [1 - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')] \theta(\mathbf{r}'', \omega)\} dt = \\
 & = \frac{1}{|c|} \int_{\xi} \lambda(\mathbf{r}'') \sigma(\mathbf{r}'') \{\Phi_F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \omega) - [1 - V(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')] \Phi_\theta(\mathbf{r}'', \omega)\} dt + \quad (19) \\
 & \quad + \langle \mathbf{x}(\mathbf{r}) \rangle I_*(\mathbf{r}, \omega),
 \end{aligned}$$

где  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' + (t - \xi)c^{-1}\omega$ . В отличие от обратной модели в прямой для  $\langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  получена система из трех уравнений (17)–(19). Аналогичные системы уравнений можно получить для моментов интенсивности любого порядка.

В частном случае статистически однородного поля  $\mathbf{x}(\mathbf{r})$  и экспоненциальной функции  $V_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  для расщепления корреляций можно воспользоваться равенством (4), которое является следствием марковости аппроксимирующего процесса  $\eta_a$  [10]. В результате для  $U(\mathbf{r}, \omega)$  получаем уравнение

$$\begin{aligned}
 & U(\mathbf{r}, \omega) + \frac{1}{|c|} \int_{\xi} \sigma(\mathbf{r}') V_a^x(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(\mathbf{r}', \omega) d\xi = \\
 & = \frac{1}{|c|} \int_{\xi} \lambda(\mathbf{r}') \sigma(\mathbf{r}') V_a^x(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_U(\mathbf{r}', \omega) d\xi + pI_*(\mathbf{r}, \omega). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Уравнения (17) и (20) для расчета  $\langle I(\mathbf{r}, \omega) \rangle$  совпадают с соответствующими уравнениями в обратной модели и в марковском приближении [6].

Таким образом, используя (1) или (2) для расщепления корреляций, получены приближенные уравнения для рассеянной и точные уравнения для прямой средней интенсивности излучения в конструктивно заданной модели облачного поля. В эти уравнения в качестве коэффициентов входят вероятность присутствия облаков ( $\langle \eta(\mathbf{r}) \rangle$  — в обратной и  $\langle \mathbf{x}(\mathbf{r}) \rangle$  — в прямой моделях) и условная вероятность  $V(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , которые однозначно определяются через параметры модели [10]. Полученные выше результаты показывают, что как методом непосредственного моделирования, так и методом замкнутых уравнений удается решить задачу о переносе излучения в модели облачности в виде пуассоновского индикаторного поля. Это позволяет не только качественно, но и количественно оценить точность приближений, сделанных при выводе и решении уравнений.

Если принять экспоненциальную аппроксимацию условной вероятности, то уравнения для средней интенсивности в обратной модели эквивалентны уравнениям, полученным в приближении марковского случайного процесса [6]. Чтобы получить подобное совпадение в прямой модели, необходимо сделать дополнительное предположение о статистической однородности модельного облачного поля.

Все сказанное выше справедливо для моментов интенсивности произвольного порядка.

3. Пусть пуассоновское индикаторное поле образовано совокупностью цилиндров радиуса  $R$  и высоты  $H$ . Центры цилиндров, за которые примем геометрические центры фигур, расположены в одной плоскости  $z=0$ , так что облачное вещество сосредоточено в слое  $|z| \leq H/2$ . Используя результаты работы [10], можно показать, что в прямой модели вероятность наличия облаков

$$p = n = 1 - \exp(-\nu\pi R^2), \quad (21)$$

где  $v$  — параметр Пуассона,  $n$  — балл облачности, который можно определить из эксперимента. Вероятность одновременного наличия облаков  $P_{11}^x$  зависит от горизонтального разнота  $d$  точек  $r_1$  и  $r_2$  и определяется выражением

$$P_{11}^x(t) = 2p - 1 + (1 - p)^{2-\alpha(t)}; \quad (22)$$

$$\alpha(t) = 2\pi^{-1}[\arccos t - (t/2)\sqrt{1-t^2}], \quad (23)$$

где  $t = d/2R$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Из (21) и (22) вытекает, что индикаторное поле  $x(r)$  статистически однородно и неизотропно. В обратной модели  $p$  и  $P_{11}^x$  означают соответствующие вероятности отсутствия облаков, а для вероятностей присутствия имеем

$$q = 1 - p, \quad P_{11}(t) = q^{2-\alpha(t)}. \quad (24)$$

Отметим, что цилиндры в прямой модели означают отдельное облако, а в обратной — просветы в облачном слое.

Предположим, что на верхнюю границу облачности (плоскость  $z = H/2$ ) падает параллельный поток солнечной радиации в направлении  $\omega_c$ . Задачу переноса излучения как в прямой, так и в обратной модели можно решить двумя упоминавшимися выше методами. В методе непосредственного моделирования (МНМ) не накладывается каких-либо ограничений на модель облачного поля, что позволяет считать результаты расчетов эталонными. Что касается метода замкнутых уравнений (МЗУ), то здесь в зависимости от типа рассматриваемой модели нужно, вообще говоря, решать либо систему уравнений (9) и (13), либо (17) — (19). Из (24) следует, что условная вероятность, входящая в качестве коэффициента в эти уравнения, имеет довольно сложную структуру, что создает серьезные трудности при создании методов решения указанных систем. В настоящее время таких методов не существует.

Однако в рамках МЗУ системы уравнений (9) и (13) или (17) — (19) при дополнительных предположениях эквивалентны уравнениям для средней интенсивности в марковском приближении, для которых в [7] разработан алгоритм решения методом Монте-Карло. Наша задача состоит в оценке пригодности уравнений средней интенсивности в марковском приближении для описания переноса излучения в обсуждаемой модели разорванной облачности. Другими словами, нужно выяснить, насколько приемлема формула (1) для расщепления корреляций в случае произвольной конфигурации точек и экспоненциальная аппроксимация  $V_a$  истинной условной вероятности  $V$ . Для этого сравним средние характеристики солнечной радиации, рассчитанные двумя независимыми методами. Напомним, что такое сравнение корректно и для прямой модели, поскольку в случае цилиндрических облаков пуассоновское индикаторное поле  $x(r)$  статистически однородно.

Параметр  $A$  в экспоненциальной условной вероятности  $V_a^x$  определим с помощью метода наименьших квадратов:

$$\int_0^1 [P_{11}^x(t) - pV_a^x(t)]^2 dt = \min. \quad (25)$$

Результаты расчетов показывают, что в данной модели  $A$  с точностью не хуже 6,5% аппроксимируется выражением

$$A = A(p, R) = (2,32p^2 - 0,92p + 1,69)/2R. \quad (26)$$

Рассматриваемое модельное облачное поле является неизотропным, поэтому  $A$  зависит от направления  $\omega$ . Горизонтальный разнос точек  $d = \sqrt{1 - c^2} |r_1 - r_2|$ , и из (6) получаем

$$A = A(p, R) \sqrt{1 - c^2}. \quad (27)$$

В расчетах по МЗУ использованы значения  $A$ , вычисляемые по формулам (26) и (27).

Оптические характеристики элементарного рассеивающего объема облаков считаются постоянными и рассчитаны по формулам теории Ми для облака  $C_1$  [12] и длины волны 0,69 мкм. Во всех расчетах, если это специально не оговаривается, приняты следующие значения параметров задачи: зенитный угол Солнца  $\xi_s = 30^\circ$ , коэффициент ослабления  $\sigma = 30 \text{ км}^{-1}$ , цилиндры радиуса  $R = 0,5 \text{ км}$  и высоты  $H = 0,5 \text{ км}$ .

В табл. 1 приведены результаты расчетов в прямой модели по МНМ относительных потоков прямого  $S$  и рассеянного  $Q$  излучения и средних длин пробегов  $\bar{L}$  ( $\uparrow$  — для отраженного,  $\downarrow$  — для пропущенного света),  $\delta$  — относительная погрешность. Определения средних длин пробегов фотонов приведены в [14].

Таблица 1

$p$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$S$	0,869	0,623	0,400	0,204	0,046
$\delta_S, \%$	0,12	0,45	0,33	0,67	1,27
$Q^\uparrow$	0,054	0,165	0,283	0,407	0,519
$\delta_{Q^\uparrow}, \%$	1,29	1,19	0,44	0,36	0,29
$Q^\downarrow$	0,071	0,202	0,310	0,386	0,433
$\delta_{Q^\downarrow}, \%$	1,08	1,29	0,49	0,38	0,33
$\bar{L}^\uparrow, \text{ км}$	0,045	0,147	0,261	0,382	0,486
$\delta_{\bar{L}^\uparrow}, \%$	1,97	1,73	0,81	0,60	0,51
$\bar{L}^\downarrow, \text{ км}$	0,070	0,211	0,335	0,436	0,520
$\delta_{\bar{L}^\downarrow}, \%$	1,20	1,61	0,62	0,62	0,45

В табл. 2 сравниваются потоки и средние длины пробегов, рассчитанные по МНМ в прямой модели и по МЗУ (индекс «1»). В табл. 3 представлены аналогичные результаты, но расчеты по МНМ выполнены в обратной модели.

Из табл. 2 видно, что расхождения между средними лучистыми потоками, рассчитанными двумя независимыми методами, не превышают  $\sim 4,5\%$  при  $p \geq 0,3$ , исключая лишь значения средних потоков нерассеянного излучения при  $p = 0,9$ , где различие достигает  $\sim 15\%$ .

$p$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\frac{S_1 - S}{S}, \%$	-0,4	-0,7	-0,2	-0,3	+15,2
$\frac{Q_1^\dagger - Q^\dagger}{Q^\dagger}, \%$	-10,5	+4,4	+2,2	-0,1	-1,0
$\frac{Q_1^\ddagger - Q^\ddagger}{Q^\ddagger}, \%$	+8,6	+1,7	-4,4	-0,6	-0,3
$\frac{\bar{L}_1^\dagger - \bar{L}^\dagger}{\bar{L}^\dagger}, \%$	+32,7	+16,3	+11,4	+3,8	-0,3
$\frac{\bar{L}_1^\ddagger - \bar{L}^\ddagger}{\bar{L}^\ddagger}, \%$	-19,6	+10,4	-0,2	+1,2	+0,5

При  $p=0,1$  средние потоки рассеянного света совпадают несколько хуже, расхождения увеличиваются до  $\sim 10\%$ . Средние длины пробегов фотонов в области  $p \geq 0,3$  совпадают с точностью не хуже  $\sim 15\%$ , а при  $p=0,1$  точность снижается до  $\sim 30\%$ . Четко прослеживается тенденция к увеличению расхождений между соответствующими радиационными характеристиками при уменьшении  $p$ . Это объясняется тем, что с уменьшением  $p$  происходит увеличение усредненной по ансамблю реализаций облачности средней длины свободного пробега фотонов и, следовательно, неравенство (7) выполняется хуже. Расчеты, выполненные при  $\sigma=60 \text{ км}^{-1}$ ,  $R=0,5 \text{ км}$  и при  $\sigma=30 \text{ км}^{-1}$ ,  $R=0,25 \text{ км}$  и  $1 \text{ км}$  (остальные параметры не изменялись), приводят практически к тем же результатам. Отметим, что согласно имеющимся экспериментальным данным [11, 13] средний радиус кучевых облаков изменяется в пределах от  $0,25 \text{ км}$  до  $1 \text{ км}$ . Различие между радиационными характеристиками, рассчитанными для стохастической облачности и средней среды, под которой понимается плоскопараллельный однородный облачный слой толщины  $H$  со средними значениями оптических параметров, составляет при средних значениях  $p$  десятки и даже сотни процентов.

Сравним угловые распределения интенсивности и распределения фотонов по пробегам, рассчитанные двумя методами. Угловая структура пропущенного  $I^\dagger$  и отраженного  $I^\ddagger$  рассеянного света представлена гистограммами на рис. 1, где  $\varphi=0$  — азимут Солнца,  $\vartheta$  — косинус зенитного угла визирования. Гистограммы распределения фотонов по пробегам в пропущенном  $J^\dagger(l)$  и отраженном  $J^\ddagger(l)$  свете приведены на рис. 2. Отметим, что распределения  $J(l)$  ненормированы, т. е., например, для пропускания  $\int_0^\infty J^\dagger(l) dl = Q^\dagger$ . Относительная погрешность

расчета указанных характеристик не превосходит  $\sim 10\%$ . Из рисунков видно, что угловые распределения и распределения фотонов по пробегам, рассчитанные по МНМ и МЗУ, удовлетворительно согласуются между собой, отклонения не превышают  $10\text{--}15\%$  при заданных параметрах задачи.



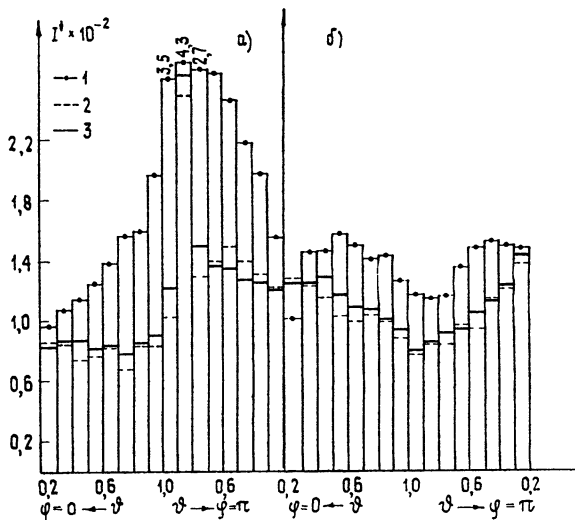


Рис. 1. Угловые распределения интенсивности пропущенного (а) и отраженного (б) излучения при  $p = 0,5$ , 1 — средняя среда, 2 — МНМ, прямая модель, 3 — МЗУ.

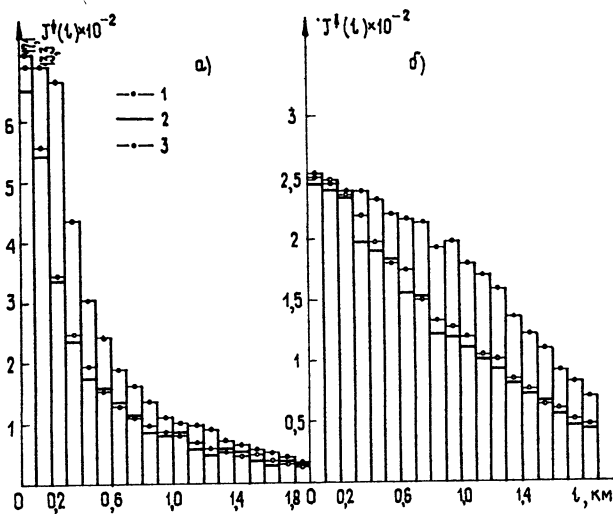


Рис. 2. Распределение фотонов по пробегам для пропущенного (а) и отраженного (б) излучения при  $p = 0,5$ ; 1 — средняя среда, 2 — МЗУ, 3 — МНМ, прямая модель.

Таблица 3

$q$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$\frac{S_1 - S}{S}, \%$	+0,1	-4,8	-11,1	-18,9	-35,4
$\frac{Q_1^\dagger - Q^\dagger}{Q^\dagger}, \%$	+3,5	+3,4	+5,0	+2,6	+0,4

$\frac{Q_1^+ - Q^+}{Q^+}, \%$	+7,8	+19,8	+11,2	+13,6	+7,5
$\frac{\bar{L}_1^+ - \bar{L}^+}{\bar{L}^+}, \%$	+27,3	+18,2	+16,1	+8,0	+3,6
$\frac{\bar{L}_1^+ - \bar{L}^+}{\bar{L}^+}, \%$	+28,2	+27,3	+14,7	+10,7	+5,8

Наличие поглощения облачными частицами ( $\lambda < 1$ ) не приводит к существенному изменению приведенных выше оценок.

Таким образом, уравнения средней интенсивности в марковском приближении дают удовлетворительную точность при решении задачи переноса оптического излучения в пуассоновской модели разорванной облачности.

В заключение авторы выражают благодарность Г. Н. Глазову и Г. А. Михайлову за полезные обсуждения результатов работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Авасте О. А., Вайникко Г. М., Глазов Г. Н., Креков Г. М., Титов Г. А. В кн.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 232.
2. Титов Г. А.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1979, 15, № 6, с. 633.
3. Титов Г. А.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1980, 16, № 7, с. 712.
4. Вайникко Г. М. В кн.: Статистические исследования разорванной облачности.— Тр. МГК СССР, Метеорологические исследования, 1973, № 21, с. 28.
5. Глазов Г. Н., Титов Г. А.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1976, 12, № 9, с. 963.
6. Глазов Г. Н., Титов Г. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 424.
7. Глазов Г. Н., Титов Г. А. В кн.: Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1979, 2, с. 41.
8. Глазов Г. Н., Титов Г. А.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1979, 15, № 11, с. 1151.
9. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами.— М.: Наука, 1975.
10. Титов Г. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 26, № 8, с. 966.
11. Стохастическая структура полей облачности и радиации. /Под ред. Ю.-А. Р. Мулламаа.— Тарту: 1972, 281 с.
12. Дейрменджан Д. Рассеяние электромагнитного излучения сферическими полидисперсными частицами — М.: Мир, 1971.
13. Plank V. G.— J. Appl. Meteor., 1969, 8, № 1, p. 46.
14. Радиация в облачной атмосфере. /Под ред. Е. М. Фейгельсон.— Л.: Гидрометиздат, 1981.

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
17 мая 1982 г.,  
в окончательном варианте  
5 января 1983 г.

#### OPTICAL RADIATION TRANSFER OF BROKEN CLOUDINESS MODELLED BY THE POISSON INDICATING FIELD

V. N. Skorinov, G. A. Titov

Equations for intensity moments of short-wave optical radiation in a constructive given model of cloudy field have been obtained. The estimates of accuracy of approximations made when deriving and solving the equations are given.