

УДК 519.248

## НЕКОТОРЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СВОЙСТВА ПУАССОНОВСКОГО ИНДИКАТОРНОГО ПОЛЯ

Г. А. Титов

Получены формулы для моментов пуассоновского индикаторного поля; решена задача о расщеплении корреляций.

В теоретических исследованиях стохастической структуры полей облачности и радиации используется модель облачности в виде пуассоновского индикаторного поля  $\kappa(\mathbf{r})$  [1-3], одно- и двухточечные статистики которого изучены в [4, 5]. В данной работе другим, более удобным, чем в [4, 5], способом определены статистические характеристики поля  $\kappa(\mathbf{r})$  и получено приближенное решение задачи о расщеплении корреляций вида  $\langle \kappa(\mathbf{r}_1) \kappa(\mathbf{r}_2) R[\kappa] \rangle$ , где  $R[\kappa]$  — некоторый функционал, угловые скобки означают усреднение по ансамблю реализаций поля  $\kappa$ .

Следуя [6] с. 40, дадим конструктивное определение случайного поля  $\kappa$ . В объеме  $V$  пространства координат  $\mathbf{r}$  по закону Пуассона  $P(m) = (\bar{m})^m \exp(-\bar{m})/m!$  случайным образом выберем  $m$  точек  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_m$ , которые статистически независимо и равномерно распределены в  $V$ . Здесь  $\bar{m}$  — среднее значение случайной величины  $m$ . Пуассоновское индикаторное поле  $\kappa(\mathbf{r})$  определим в объеме  $V' \supset V$  выражением

$$\kappa(\mathbf{r}) = \bigcup_{k=0}^m g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = 1 - \prod_{k=0}^m g^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k), \quad (1)$$

$$g(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in A_k \\ 0, & \mathbf{r} \notin A_k \end{cases}, \quad g^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in A_k^c \\ 0, & \mathbf{r} \notin A_k^c \end{cases},$$

где  $A_k$  — множество точек, принадлежащих геометрической фигуре  $\Gamma$  с центром в  $\mathbf{r}_k$ ,  $A_0$  — пустое множество,  $g$  и  $g^c$  — индикаторные функции множеств  $A_k$  и  $A_k^c = V' \setminus A_k$  соответственно; размеры и форма объема  $V'$  зависят от  $V$  и размеров и формы множеств  $A_k$ . В отличие от пуассоновского случайного поля [6] в определении (1) вместо суммы стоит теоретико-множественная операция объединения множеств. Аналогично [6] будем полагать, что объем  $V$  может быть и неограниченным, если при  $V \rightarrow \infty$  и  $\bar{m} \rightarrow \infty$   $v = \bar{m}/V = \text{const}$ ,  $v$  — средняя плотность случайных точек.

Наряду со случайнм полем  $\kappa(\mathbf{r})$  будем рассматривать индикаторное поле  $\eta(\mathbf{r}) = 1 - \kappa(\mathbf{r})$ , для которого из (1) получаем

$$\eta(\mathbf{r}) = \prod_{k=0}^m g^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (2)$$

В дальнейшем для простоты будем считать, что фигуры  $\Gamma$  имеют одинаковую форму и размеры.

**Моменты случайного поля  $\eta(\mathbf{r})$ .** Усредним (2) по ансамблю реализаций поля  $\eta$ :

$$\langle \eta(\mathbf{r}) \rangle = M_1(\mathbf{r}) = \left\langle \left\langle \prod_{k=0}^m g^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right\rangle_{\mathbf{r}_k} \right\rangle_m,$$

где каждая из угловых скобок с индексом внизу означает усреднение по соответствующей случайной величине. Опуская промежуточные выкладки, которые содержатся в [6], стр. 52, запишем конечный результат:

$$M_1(\mathbf{r}) = \exp \{-\nu V_0(\mathbf{r})\}, \quad (3)$$

где  $V_0(\mathbf{r}) = V - \int_V g^c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'$  — объем фигуры  $\Gamma$  с центром в точке  $\mathbf{r}$ , принадлежащей  $V$ . Для корреляционной функции из (2) получим

$$\begin{aligned} \langle \eta(\mathbf{r}_1) \eta(\mathbf{r}_2) \rangle &= M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \exp \{-\nu [V_0(\mathbf{r}_1) + \\ &+ V_0(\mathbf{r}_2) - V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)]\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $V_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k)$  — общий объем принадлежащей  $V$  части пересечения фигур  $\Gamma$  с центрами в  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k$ ,  $k=2, \dots, n$ . Отметим, что формулы (3) и (4) другим способом получены в [4].

Можно показать, что

$$\begin{aligned} M_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) &= \exp \{-\nu [V_0(\mathbf{r}_1) + V_0(\mathbf{r}_2) + V_0(\mathbf{r}_3) - \\ &- V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - V_s(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) - V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)]\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы для моментов более высокого порядка имеют аналогичную структуру, весьма громоздки и неудобны для анализа.

Для упорядоченной последовательности точек  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$ , расположенных на одной прямой, формулы для расчета  $M_n$ ,  $n \geq 3$ , удается существенно упростить. Действительно, в этом случае  $V_s(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_k) = -V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_k)$ ,  $k=3, \dots, n$  и выражение (5) с учетом (3) и (4) можно записать в виде

$$M_3(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) = M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) M_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) / M_1(\mathbf{r}_2). \quad (6)$$

По индукции для момента  $n$ -го порядка можно получить рекуррентную формулу

$$M_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = M_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) M_{n-1}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) / M_1(\mathbf{r}_2), \quad n \geq 3. \quad (7)$$

Нетрудно показать, что  $M_n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = P_{\overbrace{n}^{1..1}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n)$  —  $n$ -точечная вероятность того, что  $\eta(\mathbf{r}_i) = 1$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Из (7) следует, что эта вероятность факторизуется, т. е.

$$P_{\overbrace{n}^{1..1}}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n) = V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) P_{\overbrace{n-1}^{1..1}}(\mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n), \quad (8)$$

где  $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  — условная вероятность того, что  $\eta(\mathbf{r}_1) = 1$  при условии  $\eta(\mathbf{r}_2) = 1$ . Получить формулы типа (7) или (8) для моментных функций поля  $\chi(\mathbf{r})$  не удается.

Для произвольно расположенных точек  $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  равенство (7) не выполняется, и его можно использовать лишь в качестве приближения для расчета моментов  $M_n$ ,  $n \geq 3$ . Обсудим вопрос о точности такого приближения. Из (3) — (5) и очевидного неравенства  $V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) \leq V_s(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3)$  вытекает, что

$$M_3(r_1, r_2, r_3) \geq M_2(r_1, r_2) M_2(r_2, r_3)/M_1(r_2).$$

Далее можно показать, что момент порядка  $n$  удовлетворяет неравенству

$$M_n(r_1, \dots, r_n) \geq M_2(r_1, r_2) M_{n-1}(r_2, \dots, r_n)/M_1(r_2), \quad n \geq 3, \quad (9)$$

знак равенства в случае, когда точки упорядочены и расположены на одной прямой. Из (9) получаем, что использование (7) как приближения приводит к тому, что первые два момента поля  $\eta$  являются точными, а остальные задаются меньше истинных.

Отклонение рассчитанных по формуле (7) приближенных моментов поля  $\eta$  от истинных зависит от параметров задачи:  $L$  — размера области  $\Gamma$  и  $l$  — расстояния между точками. Рассмотрим два возможных предельных случая:

1)  $l_{\max} \ll L$ ,  $V_s(r_1, \dots, r_n) \approx V_0(r_1)$ ,  $n=2, \dots$ , и равенство (7) становится справедливым;

2)  $l_{\min} \gg L$ ,  $V_s(r_1, \dots, r_n) \approx 0$  при  $n=2, \dots$ , и (7) выполняется. Поэтому при выполнении условий

$$l_{\max} \ll L \text{ или } l_{\min} \gg L \quad (10)$$

соотношение (7) как приближение становится приемлемым.

**Расщепление корреляций.** С необходимостью расщеплять корреляции мы сталкиваемся при решении самых разнообразных задач статистической физики, например в задачах о распределении волн в турбулентной атмосфере [6] и о переносе оптического излучения в разорванной облачности [7].

Будем считать, что точки  $r_1, \dots, r_n$  упорядочены и расположены на одной прямой  $r + \tau \omega$ . Каждую точку  $r_i$  из этой последовательности будем обозначать через  $t_i$ ,  $0 \leq t_n \leq t_{n-1} \leq \dots \leq t_1 \leq t$ . В дальнейшем будем рассматривать функционалы  $R[\eta(\tau)]$ ,  $0 \leq \tau \leq t_2$ , для которых имеет смысл операция разложения в функциональный ряд Тейлора [6]. Функционал  $R[\eta(\tau)]$  может зависеть от процесса  $\eta(\tau)$  как явным, так и неявным образом. Используя разложение функционала  $R[\eta(\tau) + \xi(\tau)]$ , где  $\xi(\tau)$  — произвольная детерминированная функция, в функциональный ряд Тейлора по  $\eta(\tau)$ , получим

$$\begin{aligned} \langle \eta(t_2) R[\eta(\tau) + \xi(\tau)] \rangle &= \left\{ \langle \eta(t_2) \rangle + \int_0^{t_2} dt_3 \langle \eta(t_2) \eta(t_3) \rangle \frac{\delta}{\delta \xi(t_3)} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \langle \eta(t_2) \eta(t_3) \eta(t_4) \rangle \frac{\delta^2}{\delta \xi(t_3) \delta \xi(t_4)} + \dots \right\} R[\xi(\tau)], \\ \langle \eta(t_1) \eta(t_2) R[\eta(\tau) + \xi(\tau)] \rangle &= \left\{ \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle + \int_0^{t_2} dt_3 \times \right. \\ &\quad \times \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \eta(t_3) \rangle \frac{\delta}{\delta \xi(t_3)} + \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \langle \eta(t_1) \eta(t_2) \times \right. \\ &\quad \times \langle \eta(t_3) \eta(t_4) \rangle \frac{\delta^2}{\delta \xi(t_3) \delta \xi(t_4)} + \dots \left. \right\} R[\xi(\tau)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку последовательность точек  $t_1, \dots, t_n$  упорядочена и расположена на одной прямой, то для расчета моментов  $\langle \eta(t_1) \dots \eta(t_n) \rangle$ ,  $n \geq 3$ ,

можно использовать рекуррентную формулу (7), что позволяет записать полученное выше равенство в виде

$$\begin{aligned} \langle \eta(t_1) \eta(t_2) R[\eta(\tau) + \xi(\tau)] \rangle &= \frac{\langle \eta(t_1) \eta(t_2) \rangle}{\langle \eta(t_2) \rangle} \times \\ &\times \left\{ \langle \eta(t_2) \rangle + \int_0^{t_2} dt_3 \langle \eta(t_2) \eta(t_3) \rangle \frac{\delta}{\delta \xi(t_3)} + \right. \\ &\left. + \int_0^{t_2} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \langle \eta(t_2) \eta(t_3) \eta(t_4) \rangle \frac{\delta^2}{\delta \xi(t_3) \delta \xi(t_4)} + \dots \right\} R[\xi(\tau)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Если положить  $\xi(\tau) \equiv 0$ , то из (11) и (12) для интересующей нас корреляции получаем выражение

$$\langle \eta(t_1) \eta(t_2) R[\eta(\tau)] \rangle = V(t_1, t_2) \langle \eta(t_2) R[\eta(\tau)] \rangle. \quad (13)$$

Используя равенство (13), нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \langle \kappa(t_1) \kappa(t_2) R[\kappa(\tau)] \rangle &= \langle \kappa(t_1) R[\kappa(\tau)] \rangle - \\ &- [1 - V(t_1, t_2)] \langle \eta(t_2) R[\kappa(\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (14)$$

При выполнении неравенств (10) формулами (13) и (14) можно пользоваться как приближением при произвольном расположении точек.

Условная вероятность  $V(t_1, t_2)$  имеет довольно сложную зависимость от  $v$ ,  $t_1$ ,  $t_2$ , формы и размеров области  $\Gamma$ <sup>[4]</sup>, что создает весьма серьезные трудности при использовании формул (13) и (14) для решения практических задач. Чтобы избежать этих затруднений, нужно упростить вид функции  $V(t_1, t_2)$ , например, в предположении о статистической однородности поля  $\eta(\mathbf{r})$  аппроксимировать  $V(t_1, t_2)$  экспоненциальной функцией

$$V_a(t_1, t_2) = (1 - q) \exp[-A(w)|t_1 - t_2|] + q,$$

где  $q = \langle \eta \rangle$ ,  $A(w)$  — параметр, который можно определить, например, с помощью метода наименьших квадратов:

$$\int_0^L [V(x) - V_a(x)]^2 dx = \min, \quad x = |t_1 - t_2|.$$

Если в (7), (8), (13) и (14) заменить  $V(t_1, t_2)$  на  $V_a(t_1, t_2)$ , то эти равенства будут справедливы лишь приближенно. Точно они выполняются для некоторого случайного процесса  $\eta_a(t)$ , который можно рассматривать как аппроксимацию процесса  $\eta(t)$ . Можно доказать, что аппроксимирующий процесс  $\eta_a(t)$  является марковским процессом с двумя состояниями. Используя марковское свойство процесса  $\eta_a(t)$  и изложенный выше способ расщепления корреляций, нетрудно показать, что

$$\langle \eta_a(t_1) \eta_a(t_2) R[\eta_a(\tau)] \rangle = V_a(t_1, t_2) \langle \eta_a(t_2) R[\eta_a(\tau)] \rangle; \quad (13')$$

$$\langle \kappa_a(t_1) \kappa_a(t_2) R[\kappa_a(\tau)] \rangle = V_a^*(t_1, t_2) \langle \kappa_a(t_2) R[\kappa_a(\tau)] \rangle, \quad (14')$$

$$V_a^*(t_1, t_2) = (1 - p) \exp[-A(w)|t_1 - t_2|] + p,$$

где  $p = 1 - q$ ,  $V_a^*(t_1, t_2) = P\{\eta_a(t_1) = 0 / \eta_a(t_2) = 0\}$ .

Автор благодарен Глазову Г. Н. и Михайлову Г. А. за полезные замечания при обсуждении данной работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Авасте О. А. В кн.: Радиация в атмосфере. — Тарту: ИФА АН ЭССР, 1969, с. 17.
2. Авасте О. А., Вайникко Г. М., Глазов Г. Н., Креков Г. М., Титов Г. А. В кн. Методы Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике — Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 232.
3. Титов Г. А. — Изв. АН СССР Сер. Физика атмосферы и океана, 1979, 15, № 6, с. 633.
4. Глазов Г. Н., Титов Г. А. В кн.: Вопросы лазерного зондирования атмосферы — Новосибирск: Наука, 1976, с. 126.
5. Глазов Г. Н., Титов Г. А. — Изв. вузов — Физика, 1975, № 9, с. 151.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику Ч. II. Случайные поля — М: Наука, 1978, 463 с.
7. Глазов Г. Н., Титов Г. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 4, с. 424.

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
3 мая 1982 г.  
в окончательном варианте  
22 декабря 1982 г.

## SOME RANDOM CHARACTERISTICS OF THE POISSON INDICATOR FIELD

G. A. Titov

The formulas for the moments of the Poisson indicator field have been obtained. The problem on correlation splitting has been solved.

---

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 59, вып. 4, 1982 г.

(Окончание)

Попов М. В., Смирнова Т. В. Дрейфовое поведение PSR 0809 + 74.

В работе рассмотрено поведение параметров дрейфа PSR 0809+74, особое внимание уделено поведению их в районе нуллингов. Проведен анализ мгновенных скоростей дрейфа, в результате чего получена зависимость средней мгновенной скорости от долготы. Рассмотрено поведение параметров миллиструктурь в зависимости от долготы дрейфующих субимпульсов. Полученные результаты обсуждаются в рамках модели полого конуса.

Бескин В. С. Динамическая экранировка области ускорения в магнитосфере пульсара.

Обсуждается вопрос о существовании области ускорения в магнитосфере пульсара. Показано, что возрастание тока при каскадном рождении частиц будет остановлено их собственным радиационным электрическим полем. При этом новая «искра» не может возникнуть вблизи существующей, так что возможно образование как долгоживущей области ускорения, так и долгоживущих нитей, в которых и происходит рождение частиц.

Шишова Т. Д. Влияние крупномасштабных неоднородностей межпланетной плазмы на форму временных спектров мерцаний

Показано, что вариации формы экспериментальных временных спектров мерцаний могут быть объяснены наличием крупномасштабных неоднородностей межпланетной плазмы (МПП) с единым степенным спектром турбулентности по всей среде. Существование таких неоднородностей может приводить к ошибочным оценкам скорости и показателя степени спектра турбулентности МПП (как к завышенным, так и к заниженным), если используется стандартная модель МПП.

Леденев В. Г. К теории всплесков радиоизлучения Солнца IV типа

В квазилинейном приближении рассмотрено возбуждение плазменных волн в магнитной ловушке (арке) при постоянном действующем источнике энергичных электронов с учетом одновременного возбуждения электромагнитных волн — вистлеров. Получены оценки плотности энергии плазменных волн и концентрации энергичных частиц в ловушке. Слияние плазменных волн дает наблюдаемый во всплесках IV типа поток радиоизлучения на второй гармонике плазменной частоты.