УДК 538.574.6

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА НОЖЕВОЙ РЕШЕТКЕ

С. Н. Воробьев, С. Л. Просвирнин

1. Рассмотрим дифракционную решетку, образованную идеально проводящими лентами, параллельными оси $0x$ (рис. 1). Пусть на решетку падает H-поляризованная электромагнитная волна $H_i = \exp[-ik(y\cos\alpha + z\sin\alpha)]$, где $k = 2\pi/\lambda$; зависимость от времени — $e^{-i\omega t}$. Требуется определить рассеянное поле.

При использовании обращения части оператора соответствующей задачи дифракции на решетке из полуплоскостей в [1] было получено решение в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Система решается методом редукции, ее порядок должен быть тем выше, чем больше $\varkappa = a/\lambda$ и меньше d/a.

Цель данной работы — получение методически нового решения Для этого использован спектральный подход и обращение статической части оператора задачи дифракции на ленте. Решение оказывается тем эффективнее, чем меньше kd и больше $\varkappa$.

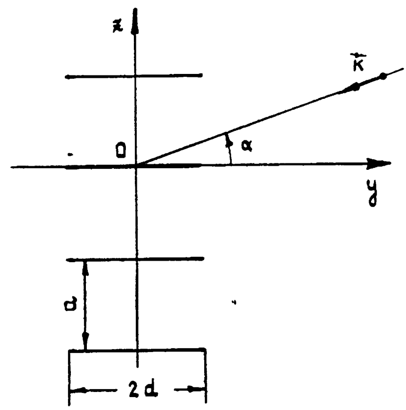

Рис. 1 Ножевая решетка.

2. Полное поле будем искать в виде суперпозиции падающего и рассеянного полей $H = H_i + H_s$. Представим рассеянное поле в области $a(n-1) < z < an$ в виде $H_s^{(n)} = H_s^{+(n)} + H_s^{-(n)}$, где

$$H_s^{+(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\xi)\exp\{iky\xi + ik\gamma[z - a(n-1)]\}\,d\xi,$$

$$H_s^{-(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} F_n(\xi)\exp[iky\xi - ik\gamma(z - an)]\,d\xi, \tag{1}$$

$$\gamma = \sqrt{1-\xi^2},\quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Амплитуды Фурье рассеянного поля связаны между собой соотношениями $B_n = B_{n-1}e^{-ikah}$, $F_n = F_{n-1}e^{-ikah}$, где $h = \sin\alpha$. Рассеянное поле можно представить с помощью функций B_0 и F_0. Из граничных условий на плоскости $z = 0$ следует равенство

$$F_0\left[1 - e^{ika(\gamma - h)}\right] = B_0\left(e^{ika\gamma} - e^{-ikah}\right) \tag{2}$$

и парные интегральные уравнения

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)\,e^{iky\xi}\,d\xi = 0,\qquad |y| > d; \tag{3'}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)\,G(\xi, k)\,e^{iky\xi}\,d\xi = ih\exp[ik(ah - y\cos\alpha)],\qquad |y| < d, \tag{3''}$$

где $\quad b(\xi) = B_0[1 - \exp(ika(\gamma + h))],\qquad G(\xi, k) = \dfrac{\sin(ka\gamma)}{\cos(ka\gamma) - \cos(kah)}.$

3. Получим формулы для вычисления рассеянного поля. Используя (1), (2), представим рассеянное поле в виде

$$H_s^{(n)} = e^{-ikanh}\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)\frac{\cos[k\gamma(z - an)] - e^{-ikah}\cos[k\gamma(z - a(n-1))]}{\cos(ka\gamma) - \cos(kah)}\,e^{iky\xi}\,d\xi,$$

$$a(n-1) < z < an. \tag{4}$$

Заменим вычисление интеграла по вещественной оси в (4) интегрированием по замкнутому контуру в виде полуокружности с радиусом R в верхней (при $y > d$) или нижней (при $y < -d$) полуплоскости комплексной плоскости ξ. Подынтегральная функция аналитическая во всей плоскости, за исключением точек $\pm\xi_m$, $\xi_m = \sqrt{1-(h-m/\varkappa)^2}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, которые являются простыми полюсами, если среди пространственных гармоник нет скользящей. Решение в окрестности точки скольжения строится аналогично приведенному ниже, но значительно более громоздко.

Найдем рассеянное поле в области $y > d$. При $R \to \infty$ интеграл по дуге окружности в полуплоскости $\operatorname{Im}\xi > 0$ стремится к нулю и рассеянное поле равно сумме вычетов в ξ_m:

$$H_s = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m \exp\left\{ik\left[z\left(\frac{m}{\varkappa} - h\right) + y\xi_m\right]\right\}, \quad |y| > d,$$

где $A_m = (1/\varkappa) b(\xi_m)(m/\varkappa - h)\xi_m^{-1} e^{-i2\pi\varkappa h}$ — амплитуды гармоник. Амплитуды гармоник прошедшего поля имеют вид

$$D_m = \frac{1}{\varkappa} b(-\xi_m) \frac{m/\varkappa - h}{\xi_m} e^{-i2\pi\varkappa h} + \delta_{0m}.$$

4. Перейдем к решению уравнений (3). Введем функцию $\varepsilon(\xi)$ с помощью равенства $|\xi|[1-\varepsilon(\xi)] = \gamma G(\xi, k)$. Функция $\varepsilon(\xi)$ вещественная и при $|\xi| \to \infty$ $\varepsilon(\xi) = O(\xi^{-2}) + O(\exp(-ka|\xi|))$. Уравнение (3″) представим в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)|\xi| e^{iky\xi} d\xi = -ih \exp[ik(ah - y\cos\alpha)] + \int_{-\infty}^{\infty} b(\xi)|\xi|\varepsilon(\xi) e^{iky\xi} d\xi, \quad |y| < d. \tag{5}$$

Решение парных интегральных уравнений (3′), (5) ищем в виде [2] $b(\xi) = b_0(\xi) + b_1(\xi)$, где

$$b_j(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} g_{2m+j-1}\varphi_{2m+j-1}(\xi) \quad (j = 0, 1), \qquad \varphi_m(\xi) = \left(\sqrt{2m}/\xi\right) J_m(kd\xi). \tag{6}$$

Коэффициенты g_m удовлетворяют системе уравнений

$$g_{2m+j-1} = b_{2m+j-1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2m+j-1,\,2n+j-1}\, g_{2n+j-1} \quad (j = 0, 1), \tag{7}$$

где

$$b_{2m+j-1} = (ih/2)\operatorname{sign}(2j-1)\, e^{i2\pi\varkappa h}\varphi_{2m+j-1}(\cos\alpha),$$

$$A_{mn} = \int_0^Q \Phi_{mn}(\xi)\, d\xi + \int_Q^{\infty} \Phi_{mn}(\xi)\, d\xi,$$

$$\Phi_{mn}(\xi) = \varphi_m(\xi)\varphi_n(\xi)\varepsilon(\xi)\xi, \qquad Q \geqslant 1,$$

полюса на вещественной оси в Φ_{mn} следует обходить снизу.

Подынтегральная функция во втором интеграле для A_{mn} особенностей на интервале интегрирования не имеет. Преобразуем первый интеграл, учитывая, что $\xi\varepsilon(\xi) \underset{\xi \to \xi_p}{\sim} \dfrac{\gamma^2(\xi_p)}{ka\xi_p(\xi - \xi_p)}$, что позволит исключить особенности в подынтегральном выражении:

$$A_{mn} = \int_0^Q \left[\Phi_{mn}(\xi) - \frac{1}{ka}\sum_{p=-m^-}^{m^+} \varphi_m(\xi_p)\varphi_n(\xi_p)\frac{(p/\varkappa - h)^2}{\xi_p(\xi - \xi_p)}\right] d\xi + \tag{8}$$

$$+\int\limits_{Q}^{\infty}\Phi_{mn}(\xi)\,d\xi+\frac{1}{ka}\sum_{p=-m^-}^{m^+}\varphi_m(\xi_p)\,\varphi_n(\xi_p)\,\frac{(p/\varkappa-h)^2}{\xi_p}\left(\ln\frac{Q-\xi_p}{\xi_p}+i\varkappa\right),$$

$$m^{\pm}=[\varkappa(1\pm h)].$$

Система уравнений (7) имеет вполне непрерывный в l_2 оператор, и для ее решения пригоден метод редукции. Матрица системы симметрическая, а матричные элементы удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A_{mn}=\sqrt{\frac{m}{n}(m-1)}\left(\frac{A_{m-1,\,n-1}}{\sqrt{n-1}}+\frac{A_{m-1,\,n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)-\sqrt{\frac{m}{m-2}}\,A_{m-2,\,n}.$$

Для нахождения матрицы системы уравнений порядка N необходимо вычислять по интегральной формуле (8) только $3N$ матричных элементов. Решение редуцированной системы уравнений удовлетворяет закону сохранения энергии независимо от N.

Можно показать, что построенное решение получено в результате обращения «статической» части оператора, соответствующего задаче дифракции на одной ленте.

5. В качестве примера рассчитаны дисперсионные зависимости амплитуд основной волны и высших из распространяющихся гармоник прошедшего поля (рис. 2). Порядок N редуцированной системы зависит от kd. Абсолютная точность расчета амплитуд гармоник не хуже, чем 10^{-3} при $N=\mathrm{entier}(kd)$.

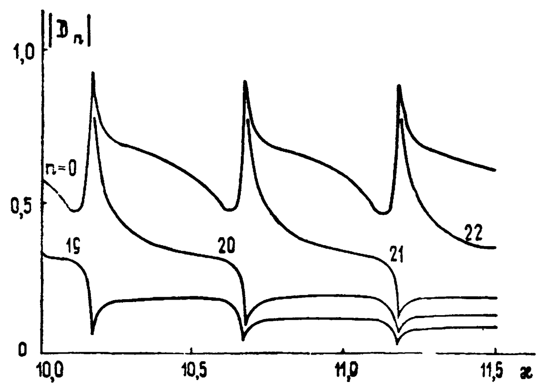

Рис 2. Дисперсионные зависимости амплитуд основной волны и высших из распространяющихся дифракционных гармоник в прошедшем поле, $\alpha=75°$, $d/a=0{,}05$.

Использованный подход может быть применен для решения задачи дифракции волн на решетке типа «жалюзи» [1] — без каких-либо принципиальных ограничений на геометрию структуры, т. е. и в том случае, когда между соседними лентами нет волноводной области, и для которого строгое решение в настоящее время еще не получено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А, Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках.— Харьков: ХГУ, 1973.
2. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.— М.: Мир, 1964.

Институт радиофизики и электроники АН УССР

Поступила в редакцию 10 ноября 1982 г.

УДК 621.372 823

О ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКАХ МОЩНОСТИ В НЕКОТОРЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ИЗОТРОПНЫХ СТРУКТУРАХ

Г. И. Веселов, С. Б. Раевский

В ряде работ [1–3] отмечалось, что в сложных изотропных направляющих структурах при определенных условиях в пределах поперечного сечения могут существовать встречные потоки мощности. Рассмотрим процесс их образования на примерах двухслойных круглых экранированного и открытого диэлектрических волноводов.