4. Полагая $\Psi(\varphi) = \delta[\varphi - \varphi(t)]$, приходим к уравнению Фоккера—Планка для плотности вероятностей $W(\varphi;\ \tau)$:

$$\frac{\partial W(\varphi;\ \tau)}{\partial\tau} = p\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,[\sin 2\varphi W(\varphi;\ \tau)] + \frac{\mu}{4}\,\frac{\partial^2 W(\varphi;\ \tau)}{\partial\varphi^2}\,, \tag{6}$$

здесь $p = -(1/2)(b + aQ)$. В случае чисто шумовой накачки ($p = 0$) (6) — уравнение диффузии. Его решение

$$W(\varphi;\ \tau) = (\sqrt{\pi\mu\tau})^{-1} \exp(-\varphi^2/\mu\tau)$$

— гауссово распределение с дисперсией $\sigma_\varphi^2 = \mu\tau/2$. Заметим, что такой же будет плотность вероятностей фазы выходного колебания томсоновского генератора (уравнение (1) с отрицательной линейной частью затухания), находящегося под воздействием параметрических шумов

5 Пусть теперь в накачке присутствует и гармонический сигнал. В этом случае решить уравнение (6) не удается, поэтому ограничимся лишь нахождением коэффициента диффузии фазы

$$D = \lim_{t\to\infty} (d\langle\varphi^2(t)\rangle/dt).$$

Воспользовавшись предложенным в [4] методом нахождения коэффициента диффузии фазы синхронизованного генератора (соответствующее уравнение ЭФП близко к (6)), получим

$$D = \mu/2I_0^2(2p/\mu),$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

В заключение приведем асимптотическое выражение для коэффициента диффузии фазы в случае сильных шумов (малых отношений $p/\mu$).

$$D = (\mu/2)(1 - 2p^2/\mu^2).$$

Автор выражает благодарность А. Н Малахову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1 Диментберг М Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980
2. Медведев С. Ю, Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 1, с 49.
3 Медведев С. Ю, Музычук О. В — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 1, с. 53.
4. Медведев С. Ю, Саичев А. И — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 10, с. 2058.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 5 января 1983 г.

---

УДК 537 86 : 519 281 1

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ КУМУЛЯНТОВ

*Б. А. Зон*

1. Кумулянтный подход к описанию негауссовых случайных величин является весьма эффективным [1]. Задание кумулянтов $k_n$, $n = 1, 2, \ldots$ эквивалентно заданию функции распределения

$$W(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ixt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n}{n!}(it)^n\right]dt. \tag{1}$$

Практически, однако, часто бывает известно лишь несколько первых кумулянтов, поэтому возникает задача о приближенном восстановлении функции распределения по конечному числу кумулянтов. Наиболее очевидным вариантом решения этой задачи является запись функции распределения в виде интеграла (1), в котором в показателе экспоненты оставлен лишь конечный отрезок бесконечного степенного ряда. Однако на этом пути возникают серьезные трудности, поскольку интеграл (1) оказывается сходящимся отнюдь не для всех допустимых значений кумулянтов [1].

В данной работе для решения поставленной задачи предлагается использовать для степенного ряда в (1) паде-аппроксимацию.

2 Ограничимся восстановлением функции распределения по четырем первым кумулянтам, а именно: по среднему значению $\overline{x} \equiv k_1$, дисперсии $D \equiv k_2$, асимметрии $k_3$ и эксцессу $k_4$. Нетрудно видеть, что если в показателе экспоненты в (1) оставить четыре первых члена, то интеграл (1) будет сходиться только в том случае, если $k_4 < 0$. Такое ограничение никак не связано с ограничением на эксцесс, следующим из общей теории [1]:

$$k_4 \geqslant k_3^2/k_2 - 2k_2^2. \tag{2}$$

Поэтому вместо замены в (1) бесконечного ряда полиномом четвертого порядка заменим этот ряд его паде-аппроксимацией.

Напомним основные принципы построения паде-аппроксимаций [2] Пусть

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n. \tag{3}$$

Оказывается, что сумма первых $M+N+1$ членов ряда (3) (обозначим эту сумму $F_{M+N}$), как правило, хуже аппроксимирует функцию $F(t)$, чем $[M, N]$-аппроксиманта Паде, являющаяся частным от деления полинома $M$-го порядка $A_M(t)$ на полином $N$-го порядка $B_N(t)$. Поэтому можно положить

$$F(t) \approx [M,\ N] \equiv A_M(t)/B_N(t). \tag{4}$$

Коэффициенты полиномов $A_M$ и $B_N$ находятся из сравнения выражений (3) и (4) при $t \to 0$.

В нашем случае удобно использовать [3, 1]-аппроксиманту:

$$F_4(t) = ik_1 t - \frac{1}{2} k_2 t^2 - \frac{i}{6} k_3 t^3 + \frac{1}{24} k_4 t^4 \approx \frac{a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3}{b_0 + b_1 t}. \tag{5}$$

Умножая обе части равенства (5) на $b_0 + b_1 t$ и приравнивая последовательно члены с наименьшими показателями, получим

$$a_1 = ik_1k_3,\quad a_2 = (1/4)(k_1k_4 - 2k_2k_3),\quad a_3 = (i/24)\left(3k_2k_4 - 4k_3^2\right),\quad b_0 = k_3,\quad b_1 = -(i/4)\,k_4. \tag{6}$$

С учетом этих значений выражение для функции распределения можно записать в следующем виде:

$$W(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[k_2k_3^2t^2 + \left(\frac{1}{16}k_2k_4^2 - \frac{1}{12}k_3^2k_4\right)t^4\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left(k_3^2 + \frac{1}{16}k_4^2t^2\right)^{-1}\right\}\cos\left\{xt - \left[k_1k_3^2t + \right.\right. \tag{7}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{1}{16}k_1k_4^2 - \frac{1}{6}k_3^3\right)t^3\right]\left(k_3^2 + \frac{1}{16}k_4^2t^2\right)^{-1}\right\}dt.$$

Из формулы (7) видно, что интеграл существует при $k_4 \leqslant 0$, как и в случае аппроксимации бесконечного ряда полиномом четвертого порядка. Но, кроме того, этот интеграл существует и при выполнении условия

$$k_4 \geqslant 4k_3^2/3k_2^2. \tag{8}$$

Неравенство (8) является более сильным, чем неравенство (2), однако корреляция этих двух условий очевидна. Поэтому естественно предположить, что с повышением порядка паде-аппроксимаций неравенства, следующие из условия существования интегрального представления для функции распределения, будут приближаться к точным неравенствам для кумулянтов.

Недостатком формулы (7) является, по-видимому, то обстоятельство, что для симметричных распределений, при $k_3 = 0$, эта формула вырождается в обычную гауссову функцию, не содержащую эксцесса $k_4$.

Формула (7) может быть упрощена, если отцентрировать переменную $x$ так, чтобы $k_1 = 0$, и измерять ее в единицах стандартного отклонения, так что $k_2 = 1$. Обозначив $k_3^2 + (1/16)k_4^2 t^2 \equiv a$, перепишем

$$W(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{1}{2a}\left[k_3^2 t^2 + \left(\frac{1}{16} k_4^2 - \frac{1}{12} k_3^2 k_4\right) t^4\right]\right\} \times \times \cos\left(xt + (1/6a)\, k_3^2 t^3\right) dt. \tag{9}$$

3. Для выяснения точности четырехкумулянтной паде-аппроксимации функции распределения рассмотрим полуэкспоненциальное распределение

$$W(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \tag{10}$$

Формулой (10) описывается в некоторых случаях распределение энергии в спектре спонтанного излучения атома, помещенного в сильное световое поле многомодового лазера (см., например, [3]). Используя выражения кумулянтов через моменты [1], для распределения (10) легко получаем

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 2, \quad k_4 = 6. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что величины (11) удовлетворяют условию (8), поэтому интегральное представление (7) существует.

На рисунке в полулогарифмическом масштабе приведены точное распределение (10) и результат расчета по формуле (7) в том диапазоне изменения переменной $x$, в котором функция $W(x)$ имеет заметную величину Как видно, точность формулы (7) весьма удовлетворительна, хотя распределение (10) является сильно асимметричным и разрывным. Особо следует отметить, что в данном случае распределение, рассчитанное по формуле (7), с точностью, определяемой точностью вычислений, не принимает отрицательных значений в интервале $-3 \leqslant x \leqslant 10$, в котором вычисления проводились. Этот факт не противоречит теореме Марцинкевича [1], поскольку последняя связана с аппроксимацией бесконечного ряда его конечным отрезком Вопрос о неотрицательности функции распределения, получаемой с помощью аппроксимации Паде, требует специального анализа.

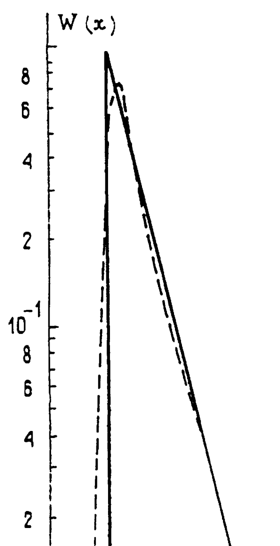


Рис 1. Распределение (10) — сплошная линия и ее восстановление по формуле (7) — штриховая линия

## ЛИТЕРАТУРА


1 Малахов А. Н Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. — М: Сов. радио, 1978.

2. The Pade Approximant in Theoretical Physics./ed. Baker G. A. Jr, Gammel J. L. — N.-Y: Academic Press, 1970

3. Делоне Н. Б., Зон Б. А, Крайнов В П, Ходовой В. А.— УФН, 1976. 120, вып 3.



Воронежский государственный университет



Поступила в редакцию 28 сентября 1982 г.