$$b = v_{0n}k\left\{\left[sB - \frac{8-2s}{3}A\right]\left(\frac{11-8s}{6}\hat{D}_i k^2 + \frac{1}{3}\nu_{in}\right) - \right.$$

$$\left. -\left(sB - \frac{11-8s}{3}A\right)\hat{D}_i k^2 - \frac{2}{3}(sB-A)\nu_{in}\right\}.$$

Из (7) видно, что в отсутствие нейтрального ветра ($v_0 = 0$)

$$\gamma = -\left(\frac{11-8s}{3}\hat{D}_i k^2 + \frac{1}{3}\nu_{in}\right) + \left\{\left(\frac{11-8s}{6}\hat{D}_i k^2 + \frac{1}{3}\nu_{in}\right)^2 - 2(1-s)\times\right.$$

$$\left.\times\left(\hat{D}_i k^2 + \frac{2}{3}\nu_{in}\right)\hat{D}_i k^2\right\}^{1/2} < 0,$$

т. е. неустойчивость исчезает и γ описывает процесс релаксации неоднородностей за счет диффузии и отдачи тепла от ионов к нейтральному газу.

Оценим пороги возникновения неустойчивости в случае, когда вызывающее нагрев поляризационное поле максимально ($\alpha = \pi/2$, $\psi = \pi/2$, $\operatorname{tg}\beta = -\Omega_n/\nu_{in}$ или $\boldsymbol{k}\uparrow\uparrow\boldsymbol{v}_{i\perp}$). В этом случае $A = B = 1$, и для неоднородностей с масштабами $l \gtrsim 3$ *м* (отдача тепла за счет столкновений превышает диффузию) получаем следующие значения для пороговых скоростей нейтрального ветра:

1) $\nu_{in}^2 \gg \Omega_H^2$ (ниже 100 *км*), $v_{0n} \gtrsim 0{,}4\ v_{iT} \approx 120$ *м/с*,

2) $\nu_{in} \approx \Omega_H$ (100—120 *км*), $v_{0n} \gtrsim 80$ *м/с*.

Оценка инкремента, проведенная по формуле (7), дает значения $\gamma \simeq 0{,}13$ на высоте 110 *км* ($\nu_{in} = 1{,}85\cdot10^3$, $\nu_{en} = 5\cdot10^3$ [2]) при скорости ветра 150 *м/с*

В рассмотренном случае ($\alpha = \pi/2$) геомагнитное поле перпендикулярно скорости нейтрального ветра. Такие ветры соответствуют зональным перемещениям нейтрального газа на экваторе или горизонтальным нейтральным ветрам в полярных областях.

На средних широтах пороговые значения скоростей для тех же масштабов неоднородностей увеличиваются до $v_{0n} \gtrsim 140$ *м/с* для $\nu_{in}^2 \gg \Omega_H^2$ и $v_{0n} \gtrsim 93$ *м/с* на высотах, где $\nu_{in} \approx \Omega_H$.

Полученная неустойчивость соответствует вытянутым вдоль H неоднородностям и может, как нам кажется, объяснить появление магнитно-ориентированных неоднородностей (МОН), ответственных за H_E рассеяние, которое наблюдалось в вечернее и ночное время в слое E при больших скоростях нейтрального ветра [3]*.

Отметим, однако, что рассматриваемый механизм неустойчивости работает и в случае $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{v}_{0n}$. Поэтому в области сильного E_s указанный механизм может, по-видимому, привести к образованию вытянутых вдоль слоя мелкомасштабных неоднородностей с $l \gtrsim 3$ *м*.

В заключение заметим, что критерием проверки предложенного механизма является наличие флуктуаций ионной температуры $\left(\theta_i \gg T_e'/T_0\right)$, которые должны составлять около половины величины n_i'.

ЛИТЕРАТУРА

1 Фельдштейн А Я.— Геомагнетизм и аэрономия, 1980, 20, с. 333.
2. Фаткуллин М. Н., Зеленова Т И., Козлов В. К. и др. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы — М.: Наука, 1981.
3. Филипп Н. Д. Сб. тезисов XII Всесоюзной конференции по распространению радиоволн — М : Наука, 1978, с. 171

Научно-исследовательский радиофизический институт

Поступила в редакцию 28 октября 1982 г.

УДК 538 56 : 519.25

К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОЛЕБАНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

С. Ю. Медведев

1. Изучение статистических характеристик фазы колебания нелинейной параметрической системы представляет интерес для широкого круга радиофизических проблем. В настоящей работе с помощью усреднения по быстрому времени получены выраже-

* Эксперименты Филиппа Н. Д. для МОН проводились на частотах 44 и 74 *МГц*, что соответствует неоднородностям с масштабами ~6,8 *м* и 4,2 *м*.

ния для нестационарной плотности вероятностей фазы колебания параметрической системы в случае гауссовой белошумовой или резонансной накачек и коэффициента диффузии фазы в случае, когда накачка представляет собой смесь гармонического сигнала и гауссова шума.

2. Рассмотрим резонансную систему с нелинейным затуханием, испытывающую как случайные, так и гармонические параметрические воздействия:

$$y'' + 2h(1+f(y) + \beta(t) + b\cos 2\Omega t)y' + \Omega^2(1+\alpha(t) + a\sin 2\Omega t)y = 0. \tag{1}$$

Как известно (см., например, [1-3]), в такой системе при интенсивностях накачки, превышающих некоторые пороговые значения, возможен режим параметрической генерации. От уравнения (1) стандартной заменой переменных $y = A\sin\Phi$, $y' = \Omega A\cos\Phi$, $\Phi = \Omega t + \varphi$ перейдем к уравнениям для амплитуды и фазы выходного колебания:

$$\begin{aligned} A' = &-2h(1 + f(A\sin\Phi) + b\cos 2\Omega t + \beta(t))A\cos^2\Phi - \\ &-(\Omega A/2)a\sin 2\Omega t\sin 2\Phi - (\Omega/2)\alpha(t)A\sin 2\Phi; \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varphi' = &h(1 + f(A\sin\Phi) + b\cos 2\Omega t + \beta(t))\sin 2\Phi + \\ &+\Omega a\sin 2\Omega t\sin^2\Phi + \Omega\alpha(t)\sin^2\Phi. \end{aligned} \tag{2'}$$

Пусть шумовые параметрические воздействия $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — дельта-коррелированные процессы с $\langle\alpha(t)\rangle = \langle\beta(t)\rangle = 0$, $\langle\alpha(t)\alpha(t-\tau)\rangle = D_\alpha\delta(\tau)$, $\langle\beta(t)\beta(t-\tau)\rangle = D_\beta\delta(\tau)$. Можно записать уравнение Лиувилля для среднего значения произвольной функции $\Psi(A, \varphi)$:

$$\partial\langle\Psi\rangle/\partial t = \langle(\partial\Psi/\partial A)A'\rangle + \langle(\partial\Psi/\partial\varphi)\varphi'\rangle, \tag{3}$$

где A' и φ' — правые части уравнений (2) и (2'). После размыкания входящих в (3) статистических средних $\langle\alpha(t)\sin^2\Phi(\partial\Psi/\partial\varphi)\rangle$ и $\langle\beta(t)\sin 2\Phi(\partial\Psi/\partial\varphi)\rangle$ с помощью формулы Фурутцу—Новикова проведем усреднение полученного уравнения по периоду квазигармонического колебания Поскольку единственный член $\langle f(A\sin\Phi)\times\sin 2\Phi(\partial\Psi/\partial\varphi)\rangle$, «завязывающий» фазу с амплитудой, при усреднении по времени обращается в нуль,

$$\overline{\left\langle f(A\sin\Phi)\sin 2\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right\rangle}^T = \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n\sin^n\Phi\sin 2\Phi\,d\Phi\right\rangle =$$

$$= \left\langle\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}a_nA^n\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n\Phi\sin 2\Phi\,d\Phi\right\rangle = 0,$$

то фазовые статистические характеристики «развязываются» с амплитудными и не зависят от вида нелинейного затухания. (Последнее необходимо лишь для существования стационарного режима параметрической генерации.) В итоге для среднего значения произвольной функции фазы получим уравнение

$$\frac{\partial\langle\Psi(\varphi)\rangle}{\partial\tau} = \frac{1}{2}(b + aQ)\left\langle\sin 2\varphi\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\right\rangle + \frac{\mu}{4}\left\langle\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right\rangle. \tag{4}$$

Здесь $\tau = ht$, $Q = \Omega/2h$, $\mu = 3\mu_\alpha + \mu_\beta/2$, $\mu_\alpha = \Omega^2 D_\alpha/4h$, $\mu_\beta = 2hD_\beta$ — эффективные мощности воздействующих шумов [2].

3. Пусть шумовые воздействия $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ имеют симметричные спектры с максимумом на основной параметрической частоте 2Ω. Представим их в виде

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \alpha_s(t)\sin 2\Omega t + \alpha_c(t)\cos 2\Omega t, \\ \beta(t) &= \beta_s(t)\sin 2\Omega t + \beta_c(t)\cos 2\Omega t, \end{aligned} \tag{5}$$

считая огибающие $\alpha_{s,c}(t)$, $\beta_{s,c}(t)$ медленными по сравнению с периодом колебаний. Подставим (5) в (2) и проведем усреднение по времени. В случае, когда огибающие параметрических воздействий имеют ширину спектра, значительно большую полосы системы, для размыкания статистических средних можно вновь воспользоваться формулой Фурутцу—Новикова. В результате получим уравнение, совпадающее по форме с (4), где теперь

$$\mu = \mu_\alpha + \mu_\beta, \quad \mu_\alpha = \Omega^2 D_\alpha/8h, \quad \mu_\beta = hD_\beta/2.$$

4. Полагая $\Psi(\varphi) = \delta[\varphi - \varphi(t)]$, приходим к уравнению Фоккера—Планка для плотности вероятностей $W(\varphi;\ \tau)$:

$$\frac{\partial W(\varphi;\ \tau)}{\partial \tau} = p\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\,[\sin 2\varphi W(\varphi;\ \tau)] + \frac{\mu}{4}\,\frac{\partial^2 W(\varphi;\ \tau)}{\partial \varphi^2}, \qquad (6)$$

здесь $p = -(1/2)(b + aQ)$. В случае чисто шумовой накачки ($p = 0$) (6) — уравнение диффузии. Его решение

$$W(\varphi;\ \tau) = (\sqrt{\pi\mu\tau})^{-1} \exp(-\varphi^2/\mu\tau)$$

— гауссово распределение с дисперсией $\sigma_\varphi^2 = \mu\tau/2$. Заметим, что такой же будет плотность вероятностей фазы выходного колебания томсоновского генератора (уравнение (1) с отрицательной линейной частью затухания), находящегося под воздействием параметрических шумов

5 Пусть теперь в накачке присутствует и гармонический сигнал. В этом случае решить уравнение (6) не удается, поэтому ограничимся лишь нахождением коэффициента диффузии фазы

$$D = \lim_{t\to\infty} (d \langle \varphi^2(t) \rangle / dt).$$

Воспользовавшись предложенным в [4] методом нахождения коэффициента диффузии фазы синхронизованного генератора (соответствующее уравнение ЭФП близко к (6)), получим

$$D = \mu/2I_0^2(2p/\mu),$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

В заключение приведем асимптотическое выражение для коэффициента диффузии фазы в случае сильных шумов (малых отношений p/μ).

$$D = (\mu/2)(1 - 2p^2/\mu^2).$$

Автор выражает благодарность А. Н Малахову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1 Диментберг М Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. — М.: Наука, 1980
2. Медведев С. Ю, Музычук О. В. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 1, с 49.
3 Медведев С. Ю, Музычук О. В — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, **25**, № 1, с. 53.
4. Медведев С. Ю, Саичев А. И — Радиотехника и электроника, 1979, **24**, № 10, с. 2058.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 5 января 1983 г.

УДК 537 86 : 519 281 1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППРОКСИМАЦИИ ПАДЕ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО КОНЕЧНОМУ ЧИСЛУ КУМУЛЯНТОВ

Б. А. Зон

1. Кумулянтный подход к описанию негауссовых случайных величин является весьма эффективным [1]. Задание кумулянтов k_n, $n = 1, 2, \ldots$ эквивалентно заданию функции распределения

$$W(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ixt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{n!}(it)^n\right] dt. \qquad (1)$$

Практически, однако, часто бывает известно лишь несколько первых кумулянтов, поэтому возникает задача о приближенном восстановлении функции распределения по конечному числу кумулянтов. Наиболее очевидным вариантом решения этой