ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 8 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 537.87.535 24

МОДУЛИРОВАННЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ

А. П. Киселев

С помощью аналога метода параболического уравнения построены нестационарные волновые поля, сосредоточенные вблизи пространственных лучей и содержащие быстроосциллирующую временну́ю зависимость довольно общего вида. Исследовано влияние «быстрой» временно́й зависимости поля на его поперечное распределение. Обнаружена возможность нарушения сосредоточенности пучка в процессе распространения.

Высокочастотные колебания, сконцентрированные около геометрооптических лучей, называмые в теории дифракции гауссовыми пучками, а в квантовой механике — когерентными состояниями, представляют интерес для разных областей физики и техники. Хорошо известна теория стационарных (гармонических по времени) пучков в однородных [1, 2] и неоднородных [3, 4] средах. Преобразование Фурье стационарных пучков дает нестационарные колебания, имеющие сингулярность, бегущую вдоль заданного луча [5].

В настоящей заметке строятся гладкие асимптотические решения линейного уравнения без дисперсии с гладкой (бесконечно дифференцируемой) скоростью $c(\boldsymbol{r}) > 0$,

$$\Delta_r u - (1/c^2(\boldsymbol{r}))\, u_{tt} = 0, \tag{1}$$

обладающие свойством сосредоточенности около луча, причем «быстрая» зависимость поля от времени содержит достаточно произвольную функцию *. Имеется в виду пространственный (а не пространственно-временно́й [6]) луч геометрической оптики.

Мы исследуем связь между «быстрой» временно́й зависимостью поля и его распределением в поперечном сечении. Оказывается, что для модулированных пучков (в отличие от стационарного случая) возможно нарушение локализованного характера поля, причем фронт этого нарушения бежит со скоростью $c(\boldsymbol{r})$ навстречу колебаниям.

Построенные поля, по-видимому, нельзя получить путем суперпозиции гармонических пучков, локализованность которых нигде не нарушается.

К результатам этой заметки, развивающей классический метод параболического уравнения, можно, вероятно, прийти (по крайней мере, для квазигармонического случая) и с помощью техники [7].

1. Аналог параболического уравнения. Опишем сначала класс быстроменяющихся функций, осуществляющих модуляцию пучка.

1) Пусть p — большой параметр, обеспечивающий высокочастотный характер колебаний, а $\Phi(\alpha;\, p)$ — гладкая комплексная функция, такая, что

$$(\partial/\partial\alpha)^m\, \Phi(\alpha;\, p) = O(p^m\, \Phi(\alpha;\, p)), \tag{2}$$

$m = 1, 2, \ldots$ Потребуем также, чтобы Φ и $\Phi_\alpha \equiv \partial\Phi/\partial\alpha$ не имели нулей.

* Одна из возможных краевых задач для (1), приводящих к таким решениям, обсуждается в конце разд. 2.

Важным примером такой функции является

$$\Phi(\alpha; p) = \exp(ip\vartheta(\alpha)), \tag{3}$$

где ϑ, вообще говоря, комплексно, и $\vartheta_\alpha(\alpha) \neq 0$. Случай вещественных ϑ называется квазигармоническим.

Другие примеры можно найти среди функций вида $\Phi(\alpha; p) = F(p\vartheta(\alpha))$.

2) Будем для простоты рассматривать случай двумерного пространства. Фиксируем на плоскости луч геометрической оптики (замкнутый или незамкнутый), соответствующий скорости $c(r)$ [3, 4]. Пусть z — длина его дуги, $\varkappa(z)$ — кривизна, y $(-\infty < y < +\infty)$ — длина нормали, опущенной на этот луч из точки $\boldsymbol{r}$. Тогда

$$\Delta_{\boldsymbol{r}} u = h^{-1}[(hu_y)_y + (h^{-1}u_z)_z], \quad h = 1 + \varkappa(z)\, y. \tag{4}$$

Асимптотическое решение уравнения (1) вблизи луча будем искать в виде (функция Φ считается заданной)

$$u(\boldsymbol{r}, t; p) \sim \sqrt{c_0(z)}\,\Phi(t - \tau(z), p)\,\psi(y, z, t; p), \qquad c_0(z) = c(z, y)|_{y=0}, \tag{5}$$

при обычных для метода параболического уравнения предположениях о том, что производные искомой функции ψ по y велики по сравнению с ψ и с ее производными по остальным переменным:

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \psi = O(p^{m/2}\psi), \quad \frac{\partial^{m+k}}{\partial t^m \partial z^k}\psi = O(\psi), \tag{6}$$

$m, k = 0, 1, 2$. Разложив коэффициенты в (4) и скорость $c(\boldsymbol{r})$ по степеням y и положив формально

$$y = O(p^{-1/2}), \tag{7}$$

подставим (5) в (1). Приравняв к нулю члены порядка $O(p^2\Phi\psi)$, получим, что $\tau(z)$ можно выбрать так, чтобы (5) представляло волну, бегущую в сторону возрастания z:

$$\tau(z) = \int^{z} c_0^{-1}(s)\, ds. \tag{8}$$

Члены порядка $O(p^{3/2}\Phi\psi)$ исчезают, поскольку на луче

$$c_y(z, y)|_{y=0} = c_0(z)\,\varkappa(z).$$

Аннулирование следующих по старшинству членов порядка $O(p\Phi\psi)$ дает уравнение для ψ

$$\hat{L}\psi \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\Phi_{\alpha\alpha}}{\Phi} c_2(z)\, y^2 - \frac{2}{c_0^2(z)} \frac{\Phi_\alpha}{\Phi} \frac{\partial}{\partial \beta}\right]\psi = 0, \tag{9}$$

где обозначено $\Phi = \Phi(\alpha; p)$,

$$\alpha = t - \tau(z), \quad \beta = t + \tau(z); \tag{10}$$

$$c_2(z) = c_0^{-3}(z)\, c_{yy}(z, y)|_{y=0}. \tag{11}$$

Полученное уравнение имеет вид нестационарного уравнения Шредингера с квадратичным потенциалом и переменными комплексными коэффициентами. Переменная β играет роль времени, величина α входит в (9) как параметр.

Уравнение (9) обобщает на случай модулированных колебаний известное параболическое уравнение Леонтовича — Фока для «функции ослабления» гауссова пучка [1, 3, 4].

2. Нулевая мода. Одно из решений уравнения (9) можно найти в виде

$$\psi_0 = a(\beta;\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2c_0^2(z)}\frac{\Phi_\alpha}{\Phi}\frac{f_\beta}{f}y^2\right), \tag{12}$$

где $f=f(\beta;\alpha)$. Подстановка (12) в (9) дает для f обыкновенное дифференциальное уравнение по переменной β:

$$f_{\beta\beta} + C_1(z)f_\beta + \gamma(\alpha)C_2(z)f = 0; \tag{13}$$

$$C_1(z) = -2c_{0z}(z), \quad C_2(z) = c_2(z)c_0^2(z); \tag{14}$$

$$\gamma(\alpha) = \frac{\Phi_{\alpha\alpha}(\alpha;p)\Phi(\alpha;p)}{\Phi_\alpha^2(\alpha;p)}. \tag{15}$$

Величина $\gamma(\alpha)$, являющаяся в (13) параметром, зависит, вообще говоря, от p и имеет порядок $O(1)$.

Возникающее при подстановке (12) в (9) уравнение для a легко интегрируется:

$$a(\beta,\alpha) = B(\alpha)/\sqrt{f(\beta;\alpha)}. \tag{16}$$

Здесь $B(\alpha)$ — произвольная гладкая * комплексная функция. Ее можно выбрать, например, так, что $B\equiv 0$ при $\alpha<\alpha_1$ и при $\alpha>\alpha_2$, обеспечив тем самым конечную длительность импульса $(-\infty<\alpha_1<\alpha_2\leqslant\infty)$.

Функция (12) экспоненциально сосредоточена вблизи луча для тех α и β, для которых выполняется условие

$$\mathrm{Re}\left\{\varphi\frac{f_\beta}{f}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\Phi(\alpha;p)}{\partial\alpha}\frac{\partial f(\beta;\alpha)}{\partial\beta}\right\} > 0; \tag{17}$$

$$\varphi = \varphi(\alpha;p) = \Phi_\alpha'(\alpha;p)/\Phi(\alpha;p). \tag{18}$$

Если при этом f не обращается в нуль (см. (16)), то (12) представляет собой искомый пучок, точнее, нулевую моду. Бесконечный набор высших мод строится в разд. 5.

При выполнении (17) поле заметно отлично от нуля в окрестности луча порядка $y=O(|\varphi|^{-1/2})$, в которой гипотезы (6), (7) действительно справедливы.

Представляют интерес два вопроса.

1) Можно ли при заданной форме высокочастотного заполнения Φ импульса найти такое решение f уравнения (13), что условие сосредоточенности (17) выполняется глобально — при всех α и β, т. е. при $-\infty<t<+\infty$, $-\infty<z<+\infty$**. (Здесь и везде в дальнейшем имеет смысл говорить только об α из носителя функции B — замыкания множества $B(\alpha)\neq 0$.)

2) Можно ли выбрать f так, что (17) справедливо хотя бы при $z>0$, $t>0$.

Последний вопрос связан с интересной для приложений задачей возбуждения пучка в полупространстве $z>0$ (мы имеем в виду, для

* От гладкости амплитудных функций, предполагаемой здесь и в дальнейшем, по-видимому, можно отказаться.

** Мы предполагаем, что при $z\to\pm\infty$ $c_0(z)$ достаточно быстро стремится к ненулевой постоянной.

определенности, случай постоянной скорости). Пусть источники, расположенные при $z = 0$, возбуждают колебания с высокочастотным заполнением $\Phi(t-\tau(0);\ p)$, которое определяется их конструкцией, и с амплитудой $B(t-\tau(0))$ (см. (5), (16), (12)). Выбором амплитуды B можно обеспечить выполнение условия причинности $u \equiv 0$, $t < 0$, и, если нужно, конечной длительности пучка. Важно знать, возможно ли создать такое сосредоточенное при малых y распределение поля в сечении $z = 0$, чтобы возбуждаемый пучок распространялся в полупространстве с сохранением сосредоточенности.

Ниже указываются критерии разрешимости и неразрешимости обеих задач.

3. Сосредоточенность в случае однородной среды. Когда $c(\mathbf{r}) = \mathrm{const}$, луч — прямая, y и z — декартовы координаты, $c_0 = c$, и можно положить

$$\alpha = t - z/c, \quad \beta = t + z/c,$$

тогда уравнение (13), где $C_1 \equiv C_2 \equiv 0$, легко интегрируется. В результате получается, что

$$\psi_0 = \frac{\widetilde{B}(\alpha)}{\sqrt{\beta + A(\alpha)}} \exp\left[-\frac{1}{2c^2}\varphi(\alpha; p)\frac{y^2}{\beta + A(\alpha)}\right], \tag{19}$$

где $A(\alpha)$ и $\widetilde{B}(\alpha)$ — гладкие комплексные функции, причем $\widetilde{B}(\alpha)$ можно выбрать произвольно, а выбор $A(\alpha)$ должен обеспечить сосредоточенность решения. Пусть

$$A(\alpha) = U(\alpha) + iV(\alpha).$$

Выбор U и V определяет зависимость ширины и кривизны фронта пучка от α.

Рассмотрим случай (3) с

$$\vartheta(\alpha) = \Theta(\alpha) + iT(\alpha)$$

(U, V, Θ и T вещественны). Тогда

$$\psi_0 = \frac{\widetilde{B}(\alpha)}{\sqrt{\beta + U(\alpha) + iV(\alpha)}} \exp\left[-\frac{i\Theta_\alpha - T_\alpha}{2c^2}\,\frac{y^2}{\beta + U(\alpha) + iV(\alpha)}\right]. \tag{20}$$

1) В квазигармоническом случае $T_\alpha \equiv 0$, сосредоточенность функции (20) можно обеспечить глобально, выбрав $V(\alpha)$ так, что

$$\Theta_\alpha(\alpha) V(\alpha) > 0;$$

$V(\alpha)$ может быть постоянной. При этом функция $U(\alpha)$ остается произвольной.

Выражение (20) для множителя ослабления является обобщением известных формул [1,2] даже в случае $\vartheta(\alpha) \equiv \alpha$.

2) Если фаза $\vartheta(\alpha)$ не вещественна, $T_\alpha \not\equiv 0$, то условие сосредоточенности принимает вид

$$(\beta + U(\alpha))\, T_\alpha(\alpha) < V(\alpha)\, \Theta_\alpha(\alpha). \tag{21}$$

Глобального выполнения (21) за счет выбора U и V добиться невозможно: при фиксированном α, для которого $T_\alpha \neq 0$, всегда существуют такие β, что (21) не имеет места.

Решение второго вопроса разд. 2 о возможности сосредоточенного распространения в полупространстве зависит от знака функции T_α.

3) Пусть $T_\alpha < 0$ для всех α. Положим

$$K(\alpha) = V(\alpha)\,\Theta_\alpha(\alpha)/T_\alpha(\alpha) - U(\alpha).$$

Если подобрать $U(\alpha)$ и $V(\alpha)$ так, что $K(\alpha) > 0$ для всех α (а это, очевидно, возможно), то условие сосредоточенности выполняется при $\beta > 0$, $-\infty < \alpha < +\infty$, т. е. при $t > 0$, $z > 0$. Одна из функций, $U(\alpha)$ или $V(\alpha)$, может быть выбрана совершенно произвольно. В частности, U и V могут быть постоянны.

4) Если для всех α $T_\alpha(\alpha) > 0$, то сосредоточенность поля при $t > 0$, $z > 0$ означает выполнение для каждого α и любого $\beta > 0$ неравенства

$$\beta < K(\alpha), \tag{22}$$

которое, очевидно, не может иметь места.

Рассмотрим кинематику нарушения сосредоточенности при $z > 0$, $t > 0$.

Пусть U и V таковы, что $K(\alpha) \geqslant K > 0$, $K = \mathrm{const}$. Тогда (17) выполняется для достаточно малых t и z.

При всяком α существует, очевидно, $\beta_*(\alpha)$, такое, что $\beta_*(\alpha) = K(\alpha)$, и (22) справедливо для $\beta < \beta_*(\alpha)$. Пусть α_* — минимальное значение α, при котором $\beta_*(\alpha) = K(\alpha)$, $\beta_{**} = \min \beta_*(\alpha)$, а α_{**}—то α^*, при котором достигается этот минимум. Очевидно, $\beta_{**} \geqslant K > 0$.

Итак, для $0 \leqslant \beta < \beta_{**}$ и $\alpha < \alpha_{**}$ неравенство (22) выполнено, а при $\alpha = \alpha_{**}$ и $\beta = \beta_{**}$, т. е.

$$z = \beta_{**} - ct,$$

оно нарушается. Таким образом, фронт нарушения сосредоточенности распространяется влево по оси z со скоростью c, тогда как пучок бежит с той же скоростью вправо.

При $\beta \geqslant \beta_{**}$ метод параболического уравнения едва ли применим. Отметим, что для частного случая комплексной фазы, линейной по α, $\vartheta(\alpha) = \alpha + i\nu\alpha$, возможность $T_\alpha > 0$ отвечает экспоненциальному нарастанию, а $T_\alpha < 0$ — затуханию амплитуды при фиксированном z.

Анализировать фазы, у которых T_α меняет знак, мы не будем.

5) Совершенно аналогично для функции Φ, имеющей вид, отличный от (3), глобально сосредоточенное решение существует, если $\operatorname{Re}\varphi \equiv 0$, и отсутствует, если $\operatorname{Re}\varphi > 0$ или $\operatorname{Re}\varphi < 0$. В первом случае сосредоточенное распространение пучка при $z > 0$, $t > 0$ возможно, во втором — нет.

4. Сосредоточенность в случае неоднородной среды.

1) Докажем существование глобально сосредоточенного пучка при условиях

$$\operatorname{Re}\varphi(\alpha; p) \equiv 0, \quad \operatorname{Im}\gamma(\alpha) \equiv 0, \tag{23}$$

выполненных в квазигармоническом случае.

Из предположений разд. 1 и (23) следует, что $\operatorname{Im}\varphi$ не обращается в нуль. Пусть, например,

$$\operatorname{Im}\varphi(\alpha; p) < 0. \tag{24}$$

Определим два линейно-независимых решения $f^{(1)}(\beta; \alpha)$ и $f^{(2)}(\beta; \alpha)$ уравнения (13), задав при $\beta = 0$ начальные данные

$$f^{(1)}(0; \alpha) = H(\alpha), \quad f^{(1)}_\beta(0; \alpha) = 0; \tag{25}$$

$$f^{(2)}(0; \alpha) = 0, \quad f^{(2)}_\beta(0; \alpha) = H(\alpha), \tag{26}$$

где $H(\alpha)$ — произвольная гладкая вещественная функция, не имеющая нулей. Функции $f^{(1)}$ и $f^{(2)}$ вещественны.

Выберем f в (12) следующим образом:

$$f(\beta;\alpha) = f^{(1)}(\beta;\alpha) + i f^{(2)}(\beta;\alpha). \tag{27}$$

Условие сосредоточенности принимает вид

$$\operatorname{Re}\left\{\varphi \frac{f_\beta}{f}\right\} = \operatorname{Im}\varphi \frac{W[f^{(1)}, f^{(2)}]}{|f^{(1)}|^2 + |f^{(2)}|^2} > 0. \tag{28}$$

Мы используем обозначение

$$W[F, G] = F_\beta G - G_\beta F.$$

Поскольку (это следует из (13), (25), (26))

$$W[f^{(1)}, f^{(2)}] = -H^2(\alpha)\exp\left[-\int c_2(z)\,d\beta\right] < 0, \tag{29}$$

в случае (24) выбор f согласно (25)—(27) обеспечивает глобальную сосредоточенность.

Отметим, что функция (27) не имеет нулей.

В случае $\operatorname{Im}\varphi > 0$ глобальной сосредоточенности можно добиться, положив $f = -f^{(1)} - if^{(2)}$.

Изложенное является обобщением построения [4].

2) Если $\operatorname{Im}\gamma \equiv 0$ и при всех α $\operatorname{Re}\varphi > 0$ или $\operatorname{Re}\varphi < 0$, то аналогично разд. 3 доказывается, что глобальная сосредоточенность невозможна, а вторая задача разд. 2 соответственно разрешима и неразрешима.

При $\operatorname{Im}\gamma(\alpha) \not\equiv 0$ анализ сосредоточенности существенно осложняется.

5. **Высшие моды.** Пусть решение (12) уравнения (9) сосредоточено, когда α и β пробегают некоторое множество значений. Для построения других решений (9) с тем же характером сосредоточенности удобно, как и в стационарном случае [3, 4], ввести операторы рождения и уничтожения для (9).

Будем искать операторы вида $\hat{a} = \xi(\beta,\alpha)y + \eta(\beta,\alpha)(\partial/\partial y)$, коммутирующие с $\hat{L}$ (9):

$$\hat{a}\hat{L} = \hat{L}\hat{a}. \tag{30}$$

Подстановка в (30) дает уравнения для ξ и η, которые легко решить. Оказывается, что с точностью до зависящего лишь от α множителя все такие операторы имеют вид

$$\hat{a} = \hat{a}_F = F\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{c_0^2(z)} F_\beta \varphi y, \tag{31}$$

где $F = F(\beta;\alpha)$ — произвольное решение уравнения (13).

Применив (31) к (12), получим

$$\hat{a}_F \psi_0 = \varphi W[F, f]/f c_0^2(z). \tag{32}$$

Очевидно, $\hat{a}_f \psi_0 \equiv 0$, так что $\hat{a}_f$ аналогичен оператору уничтожения [4].

Если же F и f линейно независимы, то левая часть (32) не обращается в нуль, и $\hat{a}_F$ аналогичен оператору рождения. Выражение вида

$$\psi_m = (\hat{a}_F)^m \psi_0, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

удовлетворяющее вследствие (31) уравнению (13), есть произведение ψ_0 на полином степени m по y (с коэффициентами, зависящими от α и β). Поэтому функции ψ_m и ψ_k линейно независимы при $m \neq k$.

Операторы рождения и уничтожения полезны при построении высших приближений, которым мы не будем здесь заниматься.

6. Возможные обобщения. Полученные результаты можно перенести на трехмерный случай и обобщить на нестационарные уравнения электродинамики, теории упругости и т. д. Действуя по аналогии с [3], нетрудно развить теорию отражения и преломления модулированных пучков на границах раздела.

Построенные выше пучки можно использовать для вычисления полей модулированных (например, квазигармонически) колебаний на каустиках, подобно тому, как это сделано для стационарного случая в [8, 9].

Аналогичные результаты можно получить и для модулированных колебаний типа волновых пленок, теория которых развита для стационарного случая в [3].

Автор благодарен В. Э. Грикурову, А. В. Попову, М. М. Попову и участникам семинара Э. Е. Фрадкина за конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы.— М.: Сов. радио, 1970.
2 Маркузе Д Оптические волноводы.— М.: Мир, 1974
3 Бабич В. М, Булдырев В С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М.: Наука, 1972.
4. Бабич В. М, Кирпичникова Н Я Метод пограничного слоя в задачах дифракции — Л.: Гос. ун-т, 1975.
5. Бабич В. М., Панкратова Т. Ф.— В сб.: Проблемы математической физики.— Л: Гос. ун-т, 1973, **6**, с. 9
6 Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.—М.· Наука, 1980.
7. Маслов В П. Комплексный метод ВКБ.— М.: Наука, 1977.
8 Попов М М. Записки научных семинаров Лен. отделения Матем. ин-та В А Стеклова АН СССР, 1981, **111**, с. 195.
9. Еременко В. А, Черкашин Ю Н. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн.— М.: Наука, 1981, 2, с 257

Научно-производственное объединение
«Рудгеофизика»

Поступила в редакцию
4 августа 1982 г,
после доработки
2 марта 1983 г.

MODULATED GAUSSIAN BEAMS

A. P. Kiselev

Using an analog of the parabolic equation method, a new class of nonstationary wave fields, concentraited in a neigbourhood of geometrical optics ray, is constructed. These fields contain rapidly oscillating time function of a rather general type. The influence of this function on a transversal field distribution is studied A possibility of a failure of a concentrated character of a beam in a process of a propagation is found.