

УДК 621 396 677 49

О СИНТЕЗЕ ОПТИМАЛЬНОГО ВЕСОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В АДАПТИВНЫХ АНТЕННЫХ РЕШЕТКАХ

В. Т. Ермолаев, Б. А. Краснов, А. Г. Флакман

Исследуются вопросы синтеза оптимального весового распределения в адаптивных антенных решетках по известной корреляционной матрице шумов и вектору сигнала в элементах решетки. Показано, что оптимальная весовая обработка может быть осуществлена путем формирования ряда параллельных каналов приема с независимыми характеристиками и суммирования выходов этих каналов с действительными оптимальными весовыми коэффициентами. Результаты обобщены на случай, когда известна корреляционная матрица смеси сигнала и шума.

1. Максимальное отношение мощности сигнала к мощности шума (ОСШ) на выходе адаптивной антенной решетки (ААР) имеет место при весовом векторе W , удовлетворяющем матричному уравнению [1]

$$M_{ш} W = S_0^*, \quad (1)$$

где $M_{ш}$ — корреляционная матрица шумовых токов в элементах ААР, S_0^* — комплексно-сопряженный вектор сигнала.

Решение (1) в виде $W = M_{ш}^{-1} S_0^*$ можно непосредственно использовать для синтеза оптимального весового распределения. Однако объем вычислений при обращении матрицы $M_{ш}$ резко возрастает с увеличением числа N элементов ААР. В практически важном случае, когда число дискретных некогерентных источников помех $I < N$, вектор W может быть представлен в виде разложения по $(I+1)$ независимым комплексно-сопряженным векторам сигнала и каждой из помех [2-4]. Чтобы синтезировать оптимальное весовое распределение по этому принципу, необходимо выделить из общей смеси помеховых колебаний независимые колебания отдельных источников помех. Осуществить это на практике весьма сложно. В [5] показано, что весовой вектор W можно представить также в виде конечного разложения по векторам, образованным циклическим воздействием матрицы $M_{ш}$ на вектор S_0^* :

$$W = c_1 S_0^* + c_2 M_{ш} S_0^* + c_3 M_{ш}^2 S_0^* + \dots + c_{I+1} M_{ш}^I S_0^*, \quad (2)$$

где коэффициенты разложения c_i являются действительными числами. Согласно этому выражению оптимальная весовая обработка в ААР разделяется на две операции, первая из которых заключается в формировании ряда параллельных каналов с характеристиками, зависящими от матрицы $M_{ш}$ и вектора S_0^* , а вторая — в суммировании выходов сигналов этих каналов с действительными весовыми коэффициентами c_i .

В настоящей работе исследуются вопросы синтеза оптимального весового распределения в ААР на основании разложения (2). Для синтеза вектора W предлагается также использовать систему ортогональных векторов, полученную из векторов степенной последовательности. Корреляционная матрица помеховых колебаний на выходе ортогональ-

ных каналов имеет трехдиагональный вид. Рассматривается обобщение результатов на случай, когда на входе ААР одновременно с помехами постоянно присутствует сигнал и выделить корреляционную матрицу $M_{\text{ш}}$ шума из корреляционной матрицы M смеси сигнала и шума не представляется возможным. Матрицы $M_{\text{ш}}$ и M предполагаются известными точно. Статистические характеристики ААР исследовались, например, в [6, 7].

2. Образум из степенной последовательности независимых векторов матрицу $A = (S_0^*, M_{\text{ш}} S_0^*, M_{\text{ш}}^2 S_0^*, \dots, M_{\text{ш}}^I S_0^*)$. Элементами ее i -го столбца являются координаты вектора $M_{\text{ш}}^{i-1} S_0^*$. Тогда выражение (2) можно представить в виде $W = AC$, где C — вектор с компонентами c_1, c_2, \dots, c_{I+1} . Матрица A может рассматриваться как характеристика диаграммообразующей схемы (ДОС). Эта характеристика определяется непосредственно корреляционной матрицей $M_{\text{ш}}$. Поэтому данную ДОС будем называть адаптивной. Она может быть физически реализована различными способами за счет использования корреляционных связей между элементами ААР.

Из (1) для вектора C получим следующее уравнение:

$$A^+ M_{\text{ш}} A C = A^+ S_0^* \quad (3)$$

где индекс «+» обозначает комплексное сопряжение и транспонирование. Матрица $A^+ M_{\text{ш}} A$ и вектор $A^+ S_0^*$ представляют собой соответственно корреляционную матрицу помеховых колебаний и комплексно-сопряженный вектор сигнала на выходе ДОС. Следовательно, уравнение (3) имеет тот же физический смысл, что и уравнение (1), и теперь задача заключается в определении весового вектора C .

Рассмотрим матрицу $M_{\text{ш}} A$. Она составлена из векторов $M_{\text{ш}} S_0^*, M_{\text{ш}}^2 S_0^*, \dots, M_{\text{ш}}^{I+1} S_0^*$. Последний из них может быть разложен по векторам степенной последовательности: $M_{\text{ш}}^{I+1} S_0^* = AP$, где $P = (p_{I+1}, p_I, p_{I-1}, \dots, p_1)$ — вектор, составленный из коэффициентов минимального многочлена $\Psi(\lambda)$ матрицы $M_{\text{ш}}$ [8]. При наличии I помех многочлен $\Psi(\lambda) = \lambda^{I+1} - p_I \lambda^I - p_{I-1} \lambda^{I-1} - \dots - p_1$. Введем в рассмотрение систему $(I+1)$ -мерных векторов q_i ($i=1, 2, \dots, I+1$) с i -й компонентой, равной единице, и нулевыми другими компонентами. Нетрудно видеть, что $M_{\text{ш}}^{I+1} S_0^* = A q_i$. Используя эти равенства, найдем, что $M_{\text{ш}} A = AR$, где матрица R имеет вид матрицы Фробениуса:

$$R = (q_2, q_3, \dots, q_{I+1}, P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_{I+1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_I \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{I-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Теперь из (3), учитывая невырожденность матрицы $A^+ A$, получим для определения вектора C следующее уравнение:

$$RC = q_1 \quad (5)$$

Матрица R имеет вполне определенный физический смысл. Принимая во внимание, что $S_0^* = A q_1$, представим (3) в виде $A^+ M_{\text{ш}} A C = A^+ A q_1$. Сопоставляя это выражение с (5), найдем, что

$$R = (A^+ A)^{-1} A^+ M_{\text{ш}} A \quad (6)$$

Если внешние помехи отсутствуют, то матрица $A^+ M_{\text{ш}} A = A^+ A$. Следовательно, матрица $A^+ A$ является корреляционной матрицей собствен-

ного шума на выходе ДОС. Элементы матриц $A^+ M_{\text{ш}} A$ и $A^+ A$ могут быть измерены с помощью корреляционных устройств различными способами, например путем последовательного «включения» и «выключения» (излучатели ААР подключены к согласованным нагрузкам) внешних помех. При этом следует иметь в виду, что, поскольку характеристики ДОС зависят от матрицы $M_{\text{ш}}$, они должны быть зафиксированы с помощью запоминающих устройств на время «отключения» внешних помех. Аналогичный результат можно получить с помощью дополнительной параллельно включенной идентичной ДОС, на вход которой необходимо подать независимые шумовые колебания с корреляционной матрицей E (E — единичная матрица). Таким образом, выражение (6) может быть использовано для непрерывной оценки коэффициентов ρ_i , а следовательно, и весовых множителей c_i . Матрицу R можно рассматривать также как корреляционную матрицу помех на выходе ДОС, нормированную с помощью корреляционной матрицы выходного собственного шума. Поэтому уравнение (5) имеет тот же физический смысл, что и уравнения (1) и (3). Можно показать совпадение собственных чисел матриц R и $M_{\text{ш}}$.

3. Выше предполагалось что матрица A , описывающая адаптивную ДОС, содержит максимальное число $(I+1)$ линейно-независимых векторов. Если используется меньшее число каналов ДОС, то с помощью (2) можно определить только проекцию оптимального весового вектора W на подпространство меньшей, чем $(I+1)$, размерности, и оптимальная обработка в ААР полностью не реализуется. Возможна и обратная ситуация, когда матрица A содержит линейно-зависимые векторы. Теперь оптимальный вектор C определяется неоднозначно, т. е. возможно независимое изменение его компонент, в частности их неограниченный рост.

Число независимых векторов в степенной последовательности может изменяться и зависит как от числа помех, так и от взаимного расположения источников сигнала и помех. Если, например, все помехи попадают в нули диаграммы направленности (ДН) f_0 основного канала ААР, то все векторы в степенной последовательности вырождаются в вектор S_0^* ($M_{\text{ш}}^* S_0^* = S_0^*$). При этом, очевидно, ДН f_0 уже является оптимальной и необходимость в адаптации отпадает. Если в нули ДН f_0 попадает только часть помех, то такая ситуация не приводит к уменьшению числа независимых векторов.

Таким образом, для нормальной работы ААР, содержащей адаптивную ДОС, необходимо в зависимости от помеховой ситуации использовать только независимые каналы, предварительно определив их максимальное число. С этой целью можно анализировать на невырожденность матрицу $A^+ A$, являющуюся матрицей Грама системы векторов $S_0^*, M_{\text{ш}} S_0^*, M_{\text{ш}}^2 S_0^*, \dots, M_{\text{ш}}^I S_0^*$.

Возможен и другой путь. Известно, что ортогональная система векторов всегда линейно независима. Поэтому, ортогонализируя степенную последовательность векторов, получим другую последовательность, свободную от указанных выше недостатков. Этой системе векторов также будет соответствовать некоторая адаптивная ДОС.

Ортогонализацию системы векторов $S_0^*, M_{\text{ш}} S_0^*, M_{\text{ш}}^2 S_0^*, \dots, M_{\text{ш}}^I S_0^*$ можно осуществить по следующей схеме [9]:

$$e_1 = S_0^*, \quad e_2 = M_{\text{ш}} e_1 - \alpha_1 e_1, \quad (7)$$

$$e_{i+1} = M_{\text{ш}} e_i - \alpha_i e_i - \beta_{i-1} e_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots, I+1),$$

где коэффициенты α_i и β_{i-1} определяются выражениями вида

$$\alpha_i = (e_i^+ M_{\text{ш}} e_i) (e_i^+ e_i)^{-1}, \quad \beta_{i-1} = (e_i^+ e_i) (e_{i-1}^+ e_{i-1})^{-1}. \quad (8)$$

Рассматриваемый процесс ортогонализации обрывается автоматически на максимальном числе линейно-независимых векторов.

Образуем матрицу $A_{\perp} = (e_1, e_2, \dots, e_{I+1})$, элементами i -го столбца которой являются компоненты вектора e_i . Ее можно рассматривать как характеристику адаптивной ДОС, формирующей ровно столько ортогональных парциальных диаграмм, сколько независимых векторов имеется в степенной последовательности.

Вектор W оптимальных весовых коэффициентов можно представить в виде разложения по векторам e_1, e_2, \dots, e_{I+1} :

$$W = A_{\perp} H, \quad (9)$$

где вектор коэффициентов разложения $H^T = (h_1, h_2, \dots, h_{I+1})^*$.

Подставим (9) в (1) и умножим полученный результат на матрицу A_{\perp}^+ . В результате будем иметь уравнение для искомого вектора H :

$$(A_{\perp}^+ A_{\perp})^{-1} A_{\perp}^+ M_{\text{ш}} A_{\perp} H = q_1. \quad (10)$$

Матрица $A_{\perp}^+ M_{\text{ш}} E_{\perp}$ является корреляционной матрицей внешних и внутренних шумов на выходе ортогональной адаптивной ДОС. Можно показать с помощью (7) и (8), что она имеет трехдиагональный вид. При отсутствии внешних помех матрица $M_{\text{ш}} = E$. В этом случае $A_{\perp}^+ M_{\text{ш}} A_{\perp} = A_{\perp}^+ A_{\perp}$. Следовательно, матрица $A_{\perp}^+ A_{\perp}$ представляет собой корреляционную матрицу внутренних шумов на выходе ДОС, описываемой матрицей $A_{\perp} = (e_1, e_2, \dots, e_{I+1})$. Очевидно, что эти шумы некоррелированы, поскольку матрица $A_{\perp}^+ A_{\perp}$ имеет диагональный вид. Ее элементы равны $(A_{\perp}^+ A_{\perp})_{ij} = e_i^+ e_j \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Поэтому матрица системы (10) также является трехдиагональной и равна

$$(A_{\perp}^+ A_{\perp})^{-1} A_{\perp}^+ M_{\text{ш}} A_{\perp} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{I+1} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Отметим, что в силу положительной определенности эрмитовой матрицы $M_{\text{ш}}$ коэффициенты α_i и β_i в (11), а следовательно, и компоненты вектора H являются всегда действительными числами. Собственные числа матрицы (11), так же как и матрицы R совпадают с собственными числами корреляционной матрицы $M_{\text{ш}}$.

4. Часто на входе ААР вместе с помехами постоянно присутствует сигнал, и выделить отдельно корреляционную матрицу $M_{\text{ш}}$ мешающих колебаний не представляется возможным. Рассмотрим обобщение полученных результатов на случай, когда известна только корреляционная матрица M смеси сигнала и шума.

Предположим, что сигнал не коррелирован с помехами, а источник сигнала является дискретным. При этом корреляционная матрица M равна сумме корреляционных матриц сигнала (M_c) и шума ($M_{\text{ш}}$). Матрицу M_c можно представить следующим образом: $M_c = \nu_0 S_0^* S_0^T$, где ν_0 — мощность сигнала в элементах ААР.

Рассмотрим две степенные последовательности векторов: S_0^* , $M_{\text{ш}} S_0^*$, $M_{\text{ш}}^2 S_0^*$, ..., $M_{\text{ш}}^I S_0^*$ и S_0^* , $M S_0^*$, $M^2 S_0^*$, ..., $M^I S_0^*$. Каждый вектор первой из них может быть представлен в виде линейной комбинации векторов второй последовательности. Тогда вместо (2) будем иметь следующее выражение:

* Индекс «т» обозначает транспонирование.

$$W = c_1' S_0^* + c_2' M S_0^* + c_3' M^2 S_0 + \dots + c_{l+1}' M^l S_0^* \quad (12)$$

Найдем коэффициенты разложения c_i' . Адаптивная ДОС теперь описывается матрицей $A' = (S_0^*, M S_0^*, \dots, M^l S_0^*)$ содержащей максимальное число независимых векторов. Подставляя матрицу $M_{\text{ш}} = M - M_c$ в (1) и учитывая, что $M_c W = v_0 (S_0^T W) S_0$, получим уравнение, аналогичное (1): $M W = \mu S_0^*$, где $\mu = 1 + v_0 (S_0^T W)$ — несущественная при адаптации ААР по критерию максимума ОСШ константа, которую далее будем опускать. Следует отметить, что к этому же результату можно прийти, если непосредственно обращать матрицу $M_{\text{ш}} = M - v_0 S_0^* S_0^T$, пользуясь известным матричным тождеством (см., например, [4], стр. 329). Теперь для вектора C' нетрудно найти уравнение, аналогичное уравнению (3):

$$(A')^+ M A' C' = (A')^+ S_0^* \quad (13)$$

5. Рассмотрим некоторые свойства адаптивных ДОС, описываемых матрицами A и $A \perp$. При этом для простоты будем предполагать, что ААР является линейной, эквидистантной и расположена в свободном пространстве.

Адаптированную (оптимальную) ДН $f_{\text{opt}}(u)$ решетки в соответствии с разложением (2) можно представить в виде линейной комбинации парциальных диаграмм $f_i(u)$ отдельных независимых каналов приема:

$$f_{\text{opt}}(u) = \sum_{i=0}^l c_{i+1} f_i(u), \quad f_i(u) = S^T(u) M_{\text{ш}}^i (S_0^*). \quad (14)$$

Здесь $S(u)$ — вектор пробного сигнала, приходящего с произвольного направления, p -я компонента которого в случае плоских волн $s_p = \exp[-j(p - (N+1)/2)u]$, $u = (2\pi/\lambda)d \sin \theta$, λ — длина волны, d — период ААР, θ — угол, отсчитываемый от нормали к ААР. При наличии l дискретных некогерентных источников помех матрица

$$M_{\text{ш}} = E + \sum_{i=1}^l v_i \Phi_i^* \Phi_i^T, \quad (15)$$

где v_i — отношение мощности i -й помехи к мощности некоррелированных внутренних шумов в элементах ААР, которая считается равной единице, Φ_i — вектор-столбец, описывающий совокупность помеховых колебаний наводимых i -м источником шума в элементах ААР. Из (14) и (15) можно получить для парциальных ДН $f_i(u)$ следующие выражения:

$$f_0(u) = N f(u - u_0), \quad (16)$$

$$f_i(u) = N [f(u - u_0) + \sum_{k=1}^l \gamma_{ik} f(u - u_k)],$$

где коэффициенты γ_{ik} зависят от углового положения источников сигнала и помех и от их мощностей, $u_{i(0)} = (2\pi/\lambda)d \sin \theta_{i(0)}$, $f(u) = \sin(N/2)u / N \sin(1/2)u$. Отсюда видно, что ДН $f_0(u)$ основного канала не зависит от помеховой обстановки и обеспечивает максимум сигнала.

С помощью выражения (9) адаптированную ДН решетки можно представить также в виде разложения по ортогональным парциальным диаграммам:

$$f_{opt}(u) = \sum_{i=0}^I h_{i+1} f_{\perp i}(u), \quad f_{\perp i}(u) = S^T(u) e_{i+1}. \quad (17)$$

Рассмотрим случаи одной ($I=1$) и двух ($I=2$) помех. Когда $I=1$, адаптивная ДОС формирует два приемных канала: основной и вспомогательный. Подставляя (15) в (14), получим для ДН вспомогательного канала следующее выражение:

$$f_1(u) = N[f(u-u_0) + N\nu_1 f_{10} f(u-u_1)], \quad (18)$$

где $f_{10} = f(u_1-u_0)$. Отсюда следует, что при достаточно мощной помехе, когда $|N\nu_1 f_{10}| \gg 1$, ДН $f_1(u)$ имеет максимум в направлении на помеху. Характеристики ортогональной ДОС можно найти с помощью (7), (15) и (17). В результате получим, что ДН $f_{\perp 0} = f_0$ и определяется выражением (16), а для ДН $f_{\perp 1}(u)$ вспомогательного ортогонального канала будем иметь

$$f_{\perp 1}(u) = N^2 \nu_1 f_{10} [f(u-u_1) - f_{10} f(u-u_0)]. \quad (19)$$

Если размерность подпространства решений для оптимального вектора W уменьшается, что в данном случае имеет место, когда помеха попадает в нули ДН основного канала ($f_{10}=0$) или совпадает с источником сигнала ($u_1=u_0$), то ДН $f_{\perp 1}(u)$ в (19) обращается в нуль.

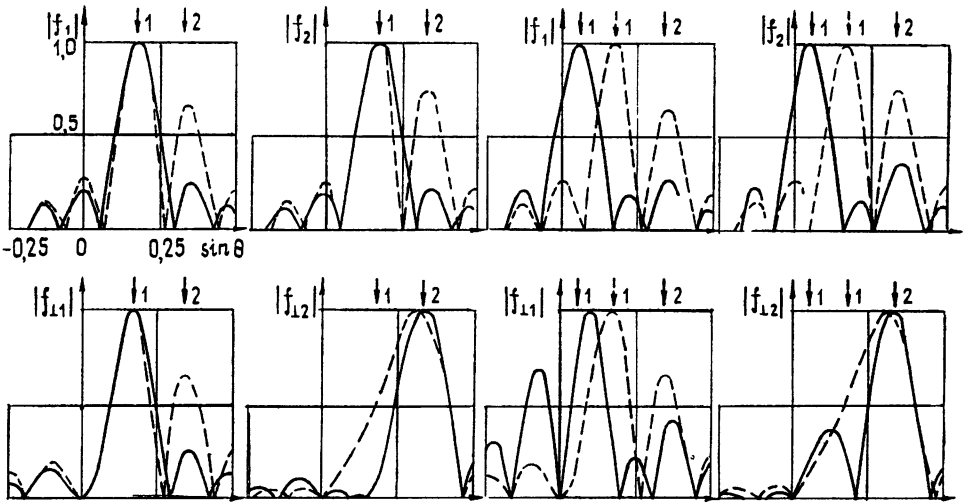


Рис. 1.

В случае двух помех ($I=2$) адаптивная ДОС формирует три независимых канала приема: основной и два вспомогательных. Для диаграмм этих каналов с помощью (14) и (15) можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_1(u) &= N[f(u-u_0) + N\nu_1 f_{10} f(u-u_1) + N\nu_2 f_{20} f(u-u_2)], \\ f_2(u) &= N\{f(u-u_0) + N\nu_1 [(N\nu_1+2)f_{10} + N\nu_2 f_{12} f_{20}] \times \\ &\quad \times f(u-u_1) + N\nu_2 [(N\nu_2+2)f_{20} + N\nu_1 f_{21} f_{10}] f(u-u_2)\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отсюда следует, что чувствительность вспомогательных каналов адаптивной ДОС лучше к более мощной помехе. На рис. 1 представлены пространственные характеристики адаптивных ДОС для 16-элементной

ААР с периодом $d=\lambda/2$. В верхнем ряду изображены ДН неортогональных, а в нижнем — ортогональных каналов. Четыре диаграммы в левой половине рисунка соответствуют следующим параметрам: угловые положения помех $u_1=0,175\pi$, $u_2=0,33\pi$; значения их мощностей $v_1=100$, $v_2=10$ (сплошные кривые); $v_1=10$, $v_2=10$ (пунктирные кривые). Помещенные в правой части этого рисунка ДН рассчитывались для случая одинаковых мощностей помех $v_1=v_2=10$ при следующих угловых положениях помех: $u_1=0,05\pi$, $u_2=0,33\pi$ (сплошные кривые); $u_1=0,175\pi$, $u_2=0,33\pi$ (пунктирные кривые). Источник сигнала всегда находится на нормали к ААР ($u_0=0$). Стрелками на рисунке показано угловое положение помех, по оси абсцисс отложены значения $\sin \theta$. Отметим, что значение параметра $u_1 = 0,05\pi$ соответствует случаю попадания помехи в главный лепесток ДН основного канала ($f_{10}=0,758$). Из рисунка видно, что характеристики ортогональных и неортогональных каналов могут существенно отличаться друг от друга. На рис. 2 представлены адаптированные ДН решетки, когда $v_1=100$, $v_2=10$, $u_1=0,175\pi$, $u_2=0,33\pi$ (сплошная кривая); $v_1=10$, $v_2=10$, $u_1=0,05\pi$, $u_2=0,33\pi$ (пунктирная кривая). Штрихпунктирной кривой изображена ДН основного канала ААР.

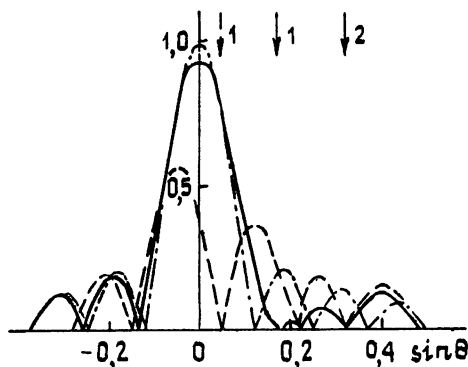


Рис. 2.

Авторы выражают глубокую благодарность В. А. Звереву за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арлебаум С. Р. — IEEE Trans, 1976, AP-24, № 5, p. 585.
2. Пистолькорс А. А. — ДАН СССР, 1979, 244, № 3, с. 590.
3. Литвинов О. С. — ДАН СССР, 1979, 245, № 6, с. 1364.
4. Ширман Я. Д., Манжос В. Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех — М.: Радио и связь, 1981.
5. Ермолаев В. Т., Флакман А. Г. — Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 4, с. 472.
6. Вренпан Л. Е., Pugh E. L., Reed I. S. — IEEE Trans., 1971, AES-7, № 3, p. 254.
7. Мальцев А. А., Позументов И. Е. — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 7, с. 884.
8. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Гостехиздат, 1953.
9. Воеводин В. В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
26 марта 1982 г.,
в окончательном варианте
30 декабря 1982 г.

ON OPTIMUM WEIGHT DISTRIBUTION SYNTHESIS IN ADAPTIVE ANTENNA ARRAYS

V. T. Ermolayev, B. A. Krasnov, A. G. Flaksman

An optimum weight distribution synthesis in adaptive antenna arrays is considered using the given correlation matrix and signal vector in the array elements. It is shown that the optimum weight processing can be achieved by forming a set of parallel receiving channels with independent responses and by summing these channel outputs with the actual optimum weight coefficients. The results are generalized for the case when the correlation matrix of the mixed signal and noise is known.