

УДК 621.371.734

## РАССЕЯНИЕ *H*-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ ЭКРАНОМ С УЗКИМИ ЩЕЛЯМИ

М. Б. Егоров

В приближении одной волны в щели решена задача дифракции электромагнитных волн на металлическом экране конечной толщины с периодической перфорацией в виде групп прямолинейных волноведущих каналов. В результате получены системы линейных алгебраических уравнений относительно амплитуд гармоник дифракционного поля, пригодные для численных расчетов на ЭВМ. Исследована сходимость метода редукции полученных систем уравнений. Проведен анализ электродинамических свойств экрана.

Рассмотрим рассеяние плоской *H*-поляризованной волны металлическим идеально проводящим слоем толщины *h*, расположенным между плоскостями  $\Gamma(z=0)$  и  $\bar{\Gamma}(z=-h)$ , который периодически пронизан группами прямолинейных каналов под углом  $\alpha$  к оси *z* (рис. 1). Обозначим:  $\delta$  — ширина каналов,  $\tau$  — период их следования,  $d$  — ширина части слоя, заполненного каналами,  $l$  — период следования групп каналов,  $E$  — объединение на поверхности  $\Gamma$  отрезков  $-d/2 + nl \leq y \leq d/2 + nl$ ,  $\bar{E}$  — проекция  $E$  на  $\bar{\Gamma}$  по направлению каналов,  $R_+$  — пространство  $z > 0$ ,  $R_-$  —  $z < -h$ .

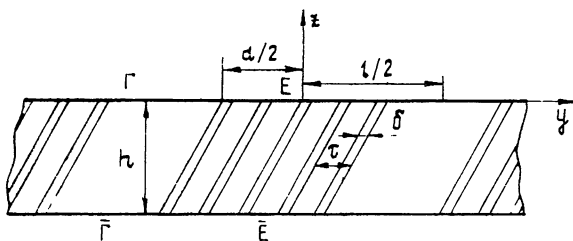


Рис. 1.

Со стороны  $z > 0$  нормально к  $\Gamma$  падает волна  $H_{\text{пад}} = \{e^{-ikhz - i\omega t}, 0, 0\}$  (множитель  $e^{-i\omega t}$  далее опускаем). Рассеянное поле  $H(y, z, k)$  в области, дополнительной к брускам, удовлетворяет уравнению Гельмгольца  $\Delta H + k^2 \epsilon \mu H = 0$ , на брусках выполняется условие  $\partial H / \partial n = 0$ , где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности отдельного бруска, а при  $|z| \rightarrow \infty$  поле представимо в виде волн, расходящихся от решетки.

Будем решать задачу для длин волн  $\lambda \gg \tau$  и  $\lambda \sim l \sim h$ . Пользуясь методом работы [1], можно показать, что решение задачи с точностью  $O(\tau/\lambda)$  представимо в виде

$$H(P, k) = \begin{cases} e^{-ikhz} + e^{ikhz} - 2 \int_{\bar{E}} H_0^{(1)}(k|P-Q|) \varphi_+(Q) d\Gamma_Q, & P \in R_+ \\ 2 \int_{\bar{E}} H_0^{(1)}(k|P-\bar{Q}|) \varphi_-(\bar{Q}) d\Gamma_{\bar{Q}}, & P \in R_- \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi_+$  и  $\varphi_-$  — тангенциальные составляющие электрического поля на  $E$  и  $\bar{E}$  соответственно — удовлетворяют интегральным уравнениям

$$\Lambda_1 \psi_1(P) + 2 \int_E H_0^{(1)}(k|P-Q|) \psi_1(Q) d\Gamma_Q = 1, \quad P \in E, \quad (2)$$

$$\Lambda_2 \psi_2(P) + 2 \int_E H_0^{(1)}(k|P-Q|) \psi_2(Q) d\Gamma_Q = 1, \quad P \in E,$$

$$\Lambda_1 = \frac{\operatorname{tg} [k\sqrt{\epsilon\mu}(h/2 \cos \alpha)]}{k\sqrt{\mu/\epsilon} \sigma \cos \alpha}, \quad \Lambda_2 = \frac{-\operatorname{ctg} [k\sqrt{\epsilon\mu}(h/2 \cos \alpha)]}{k\sqrt{\mu/\epsilon} \sigma \cos \alpha}, \quad (3)$$

$$\psi_1 = \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2},$$

где  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды внутри каналов (в полупространствах  $R_{\pm} \epsilon = \mu = 1$ ),  $\sigma = \delta/\tau$ ,  $H_0^{(1)}$  — функция Ханкеля.

Это приближение учитывает только основную волну в каналах. Введем новые функции

$$v_1(P, k) = \frac{1}{2}(e^{-ikz} + e^{ikz}) - 2 \int_E H_0^{(1)}(k|P-Q|) \psi_1(Q) d\Gamma_Q, \quad (4)$$

$$v_2(P, k) = \frac{1}{2}(e^{-ikz} + e^{ikz}) - 2 \int_E H_0^{(1)}(k|P-Q|) \psi_2(Q) d\Gamma_Q.$$

Из уравнений (1), (2), (4) можно показать, что функции  $v_{1,2}$  удовлетворяют уравнению  $\Delta v_{1,2} + k^2 v_{1,2} = 0$  всюду вне  $\Gamma$ , а на  $\Gamma$  — следующим условиям сопряжения:

$$(v_{1,2})_- = (v_{1,2})_+, \quad |y| < l/2,$$

$$\left(\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}\right)_+ = \left(\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}\right)_- = 0, \quad d/2 < |y| < l/2, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}\right)_+ - \left(\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}\right)_- = 2\psi_{1,2} = \frac{2}{\Lambda_{1,2}} v_{1,2}, \quad |y| < d/2,$$

где  $(v)_+$  и  $(v)_-$  обозначают предельные значения функции сверху и снизу от  $z=0$ .

Таким образом, для функции  $H(P, k)$  можно получить представление

$$H(z, y, k) = \begin{cases} v_1(z, y, k) + v_2(z, y, k), & z < 0 \\ v_2(z-h, y-h \operatorname{tg} \alpha, k) - v_1(z-h, y-h \operatorname{tg} \alpha, k), & z < -h \end{cases} \quad (6)$$

Учитывая периодичность структуры и то, что при  $|z| \rightarrow \infty$  рассеянное поле представляет собой расходящиеся от структуры или затухающие волны, запишем искомые функции  $v_{1,2}(z, y, k)$  в виде

$$v(z, y, k) = \begin{cases} \frac{1}{2}(e^{-iz} + e^{iz}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp(i\gamma_n z + iny), & z > 0 \\ \frac{1}{2}(e^{-iz} + e^{iz}) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \exp(-i\gamma_n z + iny), & z < 0 \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\gamma_n = \sqrt{\kappa^2 - n^2}$ . Здесь введены безразмерные переменные  $\kappa = kl/2\pi$ ,  $\theta = \pi d/l$ ,  $\Delta = h2\pi/l$ .

Удовлетворяя граничным условиям (5) и полагая  $X_n = a_n \gamma_n$ , получим следующие функциональные уравнения:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{iny} = 0, \quad \theta < |y| < \pi, \quad (8)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{iny} = f(e^{iy}), \quad |y| < \theta,$$

где

$$f(e^{iy}) = \frac{1}{i\Lambda} \left( 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{X_n}{\gamma_n} e^{iny} \right).$$

Считая  $\Lambda \neq 0$ , умножим (8) на  $e^{-imy}$  и проинтегрируем от  $-\pi$  до  $\pi$ :

$$X_n = -\frac{i}{\Lambda} \sum_{m=-\infty}^{\infty} V_m^n \frac{X_m}{\gamma_m} - \frac{i \sin n\theta}{\Lambda \pi n} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где

$$V_m^n = \frac{\sin(n-m)\theta}{\pi(n-m)}.$$

Учитывая равенство положительных и отрицательных гармоник  $X_n = X_{-n}$ , получим

$$i \frac{\sin n\theta}{\pi n} X_0 + i \sum_{m=1}^{\infty} (V_m^n + V_{-m}^n) \frac{X_m}{\gamma_m} + \Lambda X_n = -i \frac{\sin n\theta}{\pi n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

$$\left( \Lambda + i \frac{\theta}{\pi} \right) X_0 + 2i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin m\theta}{\pi m \gamma_m} X_m = -\frac{i\theta}{\pi}.$$

Эту систему линейных алгебраических уравнений будем решать методом редукции на ЭВМ. Однако в некоторой окрестности точки  $\Lambda = 0$  можно ожидать, что метод редукции будет давать плохую сходимость. Поэтому при малых  $\Lambda$  получим, удовлетворяя граничным условиям (5), другую систему функциональных уравнений:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n e^{iny} = 0, \quad \theta < |y| < \pi, \quad (10)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iny} = i\Lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \gamma_n e^{iny} - 1, \quad |y| < \theta.$$

Обозначим  $\varepsilon_n = 1 + i\sqrt{\kappa^2/n^2 - 1}$ , тогда  $\gamma_n = i|n|(1 - \varepsilon_n)$ .

Уравнения (10) в этих обозначениях примут следующий вид:

$$\sum_{n \neq 0} |n|(1 - \varepsilon_n) a_n e^{iny} = i\Lambda a_0, \quad \theta < |y| < \pi; \quad (11)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{iny} = -\Lambda \sum_{n \neq 0} |n|(1 - \varepsilon_n) a_n e^{iny} + i\Lambda a_0 - 1, \quad |y| < \theta. \quad (11')$$

Дифференцируя (11') и полагая  $X_n = a_n n$ , получим

$$\sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} e^{iny} = i\alpha_0 + \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n X_n \frac{|n|}{n} e^{iny}, \quad \theta < |y| < \pi, \quad (12)$$

$$\sum_{n \neq 0} X_n e^{iny} = -\Lambda \sum_{n \neq 0} X_n |n| (1 - \varepsilon_n) e^{iny}, \quad |y| < \theta.$$

К этим двум уравнениям нужно добавить равенство

$$\sum_{n \neq 0} \frac{X_n}{n} = -\Lambda \sum_{n \neq 0} X_n \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_n) + i\Lambda \alpha_0 - a_0 - 1, \quad (13)$$

которое получается из (11') при подстановке  $y=0$ .

Преобразуем полученные уравнения, используя метод задачи Римана—Гильберта [2]. Для этого введем функции

$$X^+(Z) = \sum_{n > 0} X_n Z^n, \quad X^-(Z) = -\sum_{n < 0} X_n Z^n,$$

голоморфные соответственно внутри и вне окружности  $|Z|=1$ . Тогда имеем

$$X^+(e^{iy}) + X^-(e^{iy}) = F(e^{iy}), \quad \theta < |y| < \pi, \quad (14)$$

$$X^+(e^{iy}) - X^-(e^{iy}) = G(e^{iy}), \quad |y| < \theta,$$

где

$$F(e^{iy}) = \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n X_n \frac{|n|}{n} e^{iny} + i\alpha_0,$$

$$G(e^{iy}) = -\Lambda \sum_{n \neq 0} X_n |n| (1 - \varepsilon_n) e^{iny}.$$

Положим

$$X^+ = X_1^+ + X_2^+, \quad X^- = X_1^- - X_2^-, \quad (15)$$

где  $X_1^\pm$  и  $X_2^\pm$  являются решениями следующих задач Римана—Гильберта:

$$X_1^+(e^{iy}) + X_1^-(e^{iy}) = F(e^{iy}), \quad \theta < |y| < \pi, \quad (16)$$

$$X_1^+(e^{iy}) - X_1^-(e^{iy}) = 0, \quad |y| < \theta;$$

$$X_2^+(e^{iy}) - X_2^-(e^{iy}) = 0, \quad \theta < |y| < \pi, \quad (17)$$

$$X_2^+(e^{iy}) + X_2^-(e^{iy}) = G(e^{iy}), \quad |y| < \theta.$$

Заметим, что (16) описывает дифракцию  $H$ -поляризованной волны на плоской металлической решетке [2]. Поэтому, используя результаты и обозначения работы [2], можем записать решение

$$X_{1,m} = i\alpha_0 x V_{m,1}^0 + \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n X_n \frac{|n|}{n} V_{m,1}^n + 2c_1 R_{m,1} \quad (m \neq 0), \quad (18)$$

$$0 = i\alpha_0 x V_{0,1}^0 + \sum_{n \neq 0} \varepsilon_n X_n \frac{|n|}{n} V_{0,1}^n + 2c_1 R_{0,1}.$$

Решение уравнений (17) получается аналогично:

$$X_{2,m} = -\Lambda \sum_{n \neq 0} X_n |n| (1 - \epsilon_n) V_{m,2}^n + 2c_2 R_{m,2} \quad (m \neq 0),$$

$$0 = -\Lambda \sum_{n \neq 0} |n| (1 - \epsilon_n) V_{0,2}^n X_n + 2c_2 R_{0,2}.$$

Здесь

$$V_{m,1,2}^n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} V_n(e^{i\varphi}) R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi,$$

$$R_{m,1,2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R(e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi,$$

$$R(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{V(\xi - \eta)(\xi - \bar{\eta})}, & |\arg \xi| < \arg \eta \\ 0, & \arg \eta < |\arg \xi| < \pi \end{cases},$$

$$V_n(\xi_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{\frac{\eta}{\xi_0}}^{\eta} \frac{\xi^n}{\xi - \xi_0} V(\xi - \eta)(\xi - \bar{\eta}) d\xi \quad (|\arg \xi_0| < \arg \eta),$$

$\eta = e^{i\theta}$ ,  $\bar{\eta} = e^{-i\theta}$  для  $V_{m,2}^n$  и  $R_{m,2}$ ;  $\eta = e^{i(\pi-\theta)}$ ,  $\bar{\eta} = e^{-i(\pi-\theta)}$  для  $V_{m,1}^n$  и  $R_{m,1}$ .  
Далее, учитывая, что  $X_{1,n} = -X_{1,-n}$ ,  $X_{2,n} = -X_{2,-n}$  и представление (15) из систем уравнений (18) и (19), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $X_n$ :

$$X_m = ia_0 V_{m,1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} X_n [\epsilon_n (V_{m,1}^n + V_{m,1}^{-n}) - \Lambda n (1 - \epsilon_n) \times$$

$$\times (V_{m,2}^n - V_{m,2}^{-n})] + 2(c_1 R_{m,1} + c_2 R_{m,2}) \quad (m = 1, 2, 3 \dots),$$

$$0 = ia_0 V_{0,1}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n X_n (V_{0,1}^n + V_{0,1}^{-n}) + 2c_1 R_{0,1},$$

$$0 = -\Lambda \sum_{n=1}^{\infty} X_n n (1 - \epsilon_n) (V_{0,2}^n - V_{0,2}^{-n}) + 2c_2 R_{0,2},$$

$$\frac{1}{2} = a_0 \frac{i\Lambda x - 1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} X_n \left[ \frac{1}{n} + \Lambda (1 - \epsilon_n) \right].$$

Сюда добавлено равенство (13).

Эта система уравнений при  $\Lambda=0$  совпадает с системой уравнений, полученной в работе [2] для  $H$ -поляризованной падающей волны.

Чтобы определить рассеянное поле в нашей задаче, необходимо решить систему уравнений для двух значений параметра  $\Lambda$ , т. е. для  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  (если  $\Lambda$  принимает значения, не близкие к нулю, то решается система (9), если  $\Lambda$  мало, то — система уравнений (20)), а затем использовать представления (6), (7). Так, например, коэффициент прохождения основной волны  $T = |a_0^{(2)} - a_0^{(1)}|$ , где  $a_0^{(2)}$  — решение для параметра  $\Lambda_2$ , а  $a_0^{(1)}$  — для  $\Lambda_1$ . Если один из параметров, пусть  $\Lambda_1$ , стремится в бесконечность, то другой —  $\Lambda_2$  — будет равен нулю. В этом случае  $a_0^{(1)}$  на-

ходим из системы уравнений (9) ( $a_0^{(1)}=0$ ), а  $a_0^{(2)}$  — из системы (20). Следовательно,  $T=|a_0^{(2)}|$ . Таким образом, для параметров задачи, при которых  $\Lambda$  обращается в нуль, прохождение волн сквозь слои, пронизанный группами каналов, совпадает с прохождением этих же волн сквозь ленточную решетку, в которой ширина лент равна ширине сплошных металлических участков решетки с каналами.

Решение задачи, полученное в виде систем уравнений (9) и (20), охватывает всю область изменений  $\Lambda$ . Причем система (9) годится для всех  $\Lambda$ , кроме близких к нулю, а система (20) — для малых значений  $\Lambda$ .

Свойства рассеянного структурой поля изучаются при помощи численного решения бесконечных систем уравнений методом редукции. Сходимость метода устанавливается при этом численными расчетами на ЭВМ.

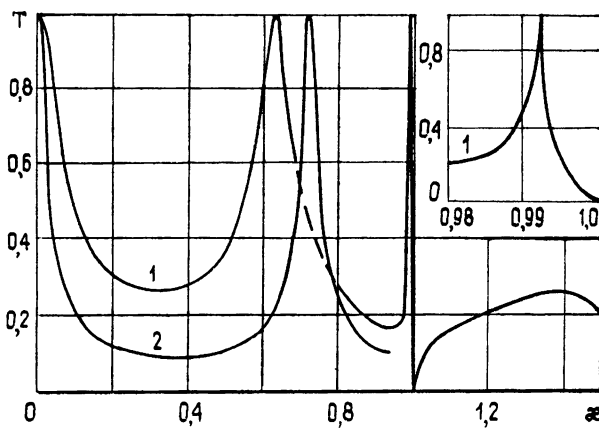


Рис. 2.

На рис. 2 показаны дисперсионные зависимости коэффициента прохождения основной волны для разных параметров заполнения  $\sigma$  ( $\sigma=0,87$  — график 1,  $\sigma=0,3$  — график 2). При этом остальные параметры структуры были выбраны следующими:  $\Delta=4$ ,  $\theta=0,5$ ,  $\epsilon=\mu=1$ ,  $\alpha=0$ . Область сходимости метода редукции систем уравнений (9) и (20) иллюстрируется графиком 1 (рис. 2). Последовательность решений, полученных из системы (9), обладает хорошей сходимостью во всей области изменения  $\kappa$  (от 0 до 1,5), кроме области  $0,7 < \kappa < 0,8$ , в которой  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  принимают следующие значения:  $|\Lambda_2| < 0,3$ ,  $|\Lambda_1| > 9$ . Коэффициент прохождения, полученный путем расчета системы уравнений (9), изображен на графике 1 сплошной линией. В области  $0,7 < \kappa < 0,8$  сходятся решения, полученные из расчета обеих систем, т. е.  $a_0^{(1)}$  вычисляется по системе (9), а  $a_0^{(2)}$  — по системе (20) (штрихпунктирная линия). Полученные таким образом решения в разных областях переходят одно в другое. Замечено, что ширина области изменения  $\kappa$ , в которой ухудшается сходимость решений системы (9), зависит не только от значений  $|\Lambda_1|$  и  $|\Lambda_2|$ , а также от относительной ширины области, заполненной каналами  $\theta$ . С уменьшением  $\theta$  область плохой сходимости сужается, а при увеличении — расширяется.

По сравнению с решеткой из прямоугольных брусев с изотропным диэлектриком в щелях [3], в зависимости коэффициента прохождения волн сквозь рассматриваемую структуру от частоты  $\kappa$  и высоты  $\Delta$  отсутствуют провалы, соответствующие полному отражению, поскольку в щелях нашей решетки при любых значениях параметров может распространяться только одна гармоника, т. е. отсутствуют условия для

поперечного резонанса. Для малого заполнения области каналов ( $\sigma$  стремится к единице) частота, на которой наблюдается максимальное прохождение волн сквозь структуру, близка к резонансной частоте решетки из брусьев прямоугольного поперечного сечения с относительной шириной щели, равной  $\theta$ , а при увеличении заполнения (уменьшении  $\sigma$ ) эффективная щель уменьшается и резонансные частоты перемещаются в сторону коротких длин волн. Величина  $\sigma$  существенно влияет на добротность структуры, а следовательно, и на ширину полосы пропускания (рис. 2).

Если положить  $\theta = \pi$ , исследуемая решетка переходит в слой со сплошными каналами, а система уравнений (9) имеет решение

$$a_0 = \frac{1}{i\Delta x - 1}, \quad a_n = 0 \quad \text{для } n \neq 0.$$

Отсюда, учитывая представления (6), (7) и (3), найдем выражение для коэффициента прохождения:

$$T = \left| \left[ i \frac{\operatorname{ctg}(k\sqrt{\varepsilon_\mu} h / (2 \cos \alpha))}{k\sqrt{\mu/\varepsilon} \sigma \cos \alpha} + 1 \right]^{-1} + \left[ i \frac{\operatorname{tg}(k\sqrt{\varepsilon_\mu} h / (2 \cos \alpha))}{k\sqrt{\mu/\varepsilon} \sigma \cos \alpha} - 1 \right]^{-1} \right|.$$

Следовательно, полное прохождение волн сквозь такую решетку ( $T=1$ ) наблюдается при условии

$$k_{\text{рез}} = \frac{\pi \cos \alpha}{\sqrt{\varepsilon_\mu} h} N \quad (N - \text{целое}).$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.— Киев: Наукова думка, 1974, с. 251.
2. Агранович З. С., Марченко В. А., Шестопапов В. П.— ЖТФ, 1962, 32, № 4, с. 381.
3. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Гологуб В. Г. Дифракция волн на решетках.— Харьков. изд. Харьковск. ун-та, 1973.

Харьковский государственный университет

Поступила в редакцию  
1 ноября 1982 г.

#### SCATTERING OF *H*-POLARIZED WAVES BY SCREEN WITH NARROW SLOTS

*M. B. Egorov*

The problem of the diffraction of electromagnetic waves by metal screen of finite thickness has been solved in the approximation which takes into account only one wave in the slot. The screen under consideration is perforated periodically by groups of straight waveguide channels. The system of the linear algebraic equations for the amplitudes of space harmonics of the scattered field is used for numerical calculations. Convergence of the reduction method for this system of equations is investigated. The electrodynamic characteristics of metal screen are discussed.