ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 7 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 538.56 : 519.25

# ОБРАЩЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В НЕСТАЦИОНАРНОЙ СРЕДЕ С КРУПНОМАСШТАБНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ. ОПЕРАТОРНОЕ ОПИСАНИЕ

*Л. Апресян*

Рассматривается отражение волновых пучков от обращающего волновой фронт зеркала в случайно-неоднородной среде с зависящими от времени крупномасштабными неоднородностями. При этом используется операторное описание, эквивалентное квазиоптическому приближению. Вводится супероператор упорядочения, обобщающий известный хронологический оператор Дайсона, что позволяет легко получить соотношения взаимности для нестационарной среды, а также записать в марковском приближении уравнения для моментов отраженной волны. В качестве примеров рассмотрены первые и вторые моменты.

1. Системы фазового сопряжения, отражающие падающее на них излучение с обращением волнового фронта (системы ОВФ), в последнее время привлекают большое внимание как перспективное средство компенсации искажений волновых пучков, вызванных неоднородностью среды [1]. Эффективность такой компенсации ограничивается многими факторами, в том числе конечностью размеров отражающей апертуры, наличием в среде неоднородного поглощения, нестационарностью и т. д. Для не зависящих от времени случайно-неоднородных сред роль таких факторов исследовалась в [4]. Влияние нестационарности среды в приближении геометрической оптики обсуждалось в [3]. В [2] были приведены оценки среднего поля и высших моментов амплитуды волны, отраженной от слоя с крупномасштабными неоднородностями для специального случая «сносовой» нестационарности. В данной работе мы рассмотрим общий случай медленно нестационарной среды с крупномасштабными неоднородностями в рамках квазиоптического приближения, которое в отличие от [3] учитывает дифракционные эффекты, а в отличие от [2] не налагает каких-либо ограничений на механизмы нестационарности. При этом мы используем операторный метод, дающий наиболее наглядное описание задачи.

2. Будем исходить из квазистатического малоуглового приближения, в котором медленные амплитуды $u^{(+)}$ и $u^{(-)}$ волн, распространяющихся в направлениях $x$ и $-x$ $(u^{(\pm)}=u^{(\pm)}(\boldsymbol{r}, t)=u^{(\pm)}(x,\boldsymbol{\rho}, t), \boldsymbol{\rho}=(y, z))$, удовлетворяют уравнениям*

$$(\partial_x \pm \partial_{ct})\, u^{(\pm)} = \pm \frac{i}{2k}(\Delta_\rho + k^2\varepsilon)\, u^{(\pm)} \equiv \pm\, i\Lambda u^{(\pm)}, \qquad (1)$$

обобщающим на нестационарный случай обычное параболическое приближение [5]. Здесь введены сокращения

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_{ct} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

* Здесь и далее всюду одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.

Исходя из (1), легко показать, что если в плоскости $x=x_0$ заданы начальные значения амплитуд $u^{(\pm)}(x_0)$ (которые могут зависеть от $\rho$ и от времени $t$), то значения амплитуд $u^{(\pm)}(x)$ в плоскости $x$ будут выражаться как

$$u^{(\pm)}(x) = g^{(\pm)}_{xx_0} u^{(\pm)}(x_0). \tag{2}$$

Входящие сюда операторы $g^{(\pm)}_{xx_0}$ описывают переход от плоскости $x_0$ к плоскости $x$ и определяются соотношением

$$\begin{aligned} g^{(\pm)}_{xx_0} &= \exp(\mp x\partial_{ct})\, G^{(\pm)}_{xx_0}(t) \exp(\pm x_0\partial_{ct}) = \\ &= G^{(\pm)}_{xx_0}\left(t \mp \frac{x}{c}\right) \exp[\mp (x - x_0)\, \partial_{ct}], \end{aligned} \tag{3}$$

где операторы $G^{(\pm)}_{xx_0} = G^{(\pm)}_{xx_0}(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\partial_x G^{(\pm)}_{xx_0} = \pm i\Lambda^{(\pm)} G^{(\pm)}_{xx_0} \equiv \pm i\Lambda\left(x, t \pm \frac{x}{c}\right) G^{(\pm)}_{xx_0}, \quad G^{(\pm)}_{x_0x_0} = \hat{1}. \tag{4}$$

Здесь $\hat{1}$ — единичный оператор, причем мы учли, что действие оператора $\exp(x\partial_{ct})$ на функции $f(t)$ сводится к сдвигу по временному аргументу: $\exp(x\partial_{ct}) f(t) = f(t + x/c)$.

Нетрудно показать, что операторы $G^{(\pm)}_{xx_0}$ обладают свойством

$$G^{(\pm)}_{x_1x_2} G^{(\pm)}_{x_2x_3} = G^{(\pm)}_{x_1x_3}, \tag{5}$$

физический смысл которого очевиден. Таким же свойством обладают и операторы $g^{(\pm)}_{xx_0}$.

3. Формальное решение системы (4) можно записать в виде

$$G^{(\pm)}_{xx_0} \equiv G^{(\pm)}_{xx_0}\{\Lambda^{(\pm)}(x')\} = T_{xx_0} \exp\left(\pm i \int_{x_0}^{x} \Lambda^{(\pm)}(x')\, dx'\right). \tag{6}$$

Здесь $T_{xx_0}$ — супероператор (т. е. оператор, действующий не на функции, а на операторы) упорядочения:

$$T_{xx_0} = \theta_{xx_0} \underset{\leftarrow}{T} + \theta_{x_0x} \underset{\rightarrow}{T}, \tag{7}$$

где $\theta_{xx_0}$ — ступенчатая функция Хевисайда: $\theta_{xx_0} = 1$ при $x > x_0$, $\theta_{xx_0} = 0$ при $x < x_0$, а $\underset{\leftarrow}{T}$ и $\underset{\rightarrow}{T}$ — супероператоры, переставляющие $\Lambda^{(\pm)}(x_i)$ в произведении вида $\Lambda^{(\pm)}(x_1)\Lambda^{(\pm)}(x_2)\ldots\Lambda^{(\pm)}(x_n)$ в указанном стрелкой направлении увеличения аргументов $x_i$ *.

Для получения явного вида формального выражения (6) нужно разложить входящую в (6) экспоненту в ряд по степеням $\Lambda^{(\pm)}$ и подействовать на него почленно операцией $T_{xx_0}$. Это означает, что (6) есть всего лишь сокращенная запись ряда теории возмущений по $\Lambda$, который можно получить, проинтегрировав интегральную форму (4). Удобство такой записи состоит в том, что благодаря своей наглядности она позволяет легко прийти к некоторым полезным следствиям.

В качестве примера рассмотрим оператор $G_{xx_0} \equiv G^{+}_{xx_0}$ при $x > x_0$, когда $T_{xx_0} = \underset{\leftarrow}{T}$. Продифференцировав этот оператор чисто формально по $x_0$ с учетом того, что справа от $\underset{\leftarrow}{T}$ оператор $\Lambda^{(+)}$ можно рас-

* Обычно при использовании символической записи (6) предполагается, что $x > x_0$, так что $T_{xx_0} = \underset{\leftarrow}{T}$. Мы здесь не требуем этого ограничения, в результате чего в (7) возникло два супероператора $\underset{\leftarrow}{T}$ и $\underset{\rightarrow}{T}$.

сматривать как обычную неоператорную величину, и, заметив, что оператор $\Lambda^{(+)}(x_0)$ в соответствии с определением $\overleftarrow{T}$ можно вынести вправо за знак действия $\overleftarrow{T}$, получаем уравнение

$$\partial_{x_0} G_{xx_0} = \partial_{x_0} \overleftarrow{T} \exp\left[ i \int\limits_{x_0}^{x} \Lambda^{(+)}(x')\, dx' \right] = -\, i G_{xx_0} \Lambda^{(+)}(x_0),$$

которое можно рассматривать как альтернативное уравнение для $G_{xx_0}$.

Операторы распространения для прямой $(G^{(+)}_{xx_0})$ и обратной $(G^{(-)}_{xx_0})$ волн можно связать друг с другом, обобщив тем самым на нестационарный случай соотношения взаимности, рассмотренные в [6, 7]. С этой целью заметим, что если по аналогии со случаем конечных матриц под транспонированным оператором $A^{\text{т}}$ понимать оператор с транспонированным ядром, $A^{\text{т}}(\rho, \rho') = A(\rho', \rho)$, то, поскольку при транспонировании произведения операторов $AB$ меняется порядок следования сомножителей, $(AB)^{\text{т}} = B^{\text{т}}A^{\text{т}}$, для супероператоров получаем

$$(\overleftarrow{T}\{\ldots\})^{\text{т}} = \overrightarrow{T}(\{\ldots\})^{\text{т}}, \quad (T_{xx_0}\{\ldots\})^{\text{т}} = T_{x_0x}\{\ldots\}^{\text{т}}, \tag{8}$$

где в фигурных скобках стоит функция от обычных операторов. Учитывая это и определив эрмитово сопряженный оператор как $A^{+} = A^{\text{т}*}$, где $*$ означает комплексное сопряжение, находим

$$G^{(-)*}_{xx_0} \equiv (G^{(-)}_{xx_0}\{\Lambda^{(-)}\})^{*} = \left( T_{xx_0} \exp\left[ -i \int\limits_{x_0}^{x} \Lambda^{(-)}(x')\, dx' \right] \right)^{\text{т}+} =$$
$$= \left( T_{x_0x} \exp\left[ i \int\limits_{x}^{x_0} \Lambda^{(-)\text{т}}(x')\, dx' \right] \right)^{+} = (G^{+}_{x_0x}\{\Lambda^{(-)\text{т}}\})^{+} = G^{+}_{x_0x}\{\Lambda^{(-)}\}. \tag{9}$$

Здесь мы учли также, что оператор $\Lambda^{(-)}$, как легко показать, не меняется при транспонировании: $\Lambda^{(-)} = \Lambda^{(-)\text{т}}$.

Представив оператор $\Lambda = (\Delta_\rho + k^2\varepsilon)/2k$ в виде суммы, $\Lambda = \Lambda^{\text{э}} + i\Lambda^{\text{а}}$, где $\Lambda^{\text{э}} = (\Lambda + \Lambda^{+})/2$ и $i\Lambda^{\text{а}} = (\Lambda - \Lambda^{+})/2$ — эрмитова и антиэрмитова части $\Lambda$, находим, что антиэрмитова часть $\Lambda$ связана с поглощением и равна $i\Lambda^{\text{а}} = k(\varepsilon - \varepsilon^{*})/2$ (символы единичных операторов опускаем). Для непоглощаемой среды $\varepsilon = \varepsilon^{*}$ и $\Lambda = \Lambda^{\text{э}} = \Lambda^{+}$ — эрмитов оператор. В этом случае в соответствии с (6) операторы $G^{(\pm)}_{xx_0}$ будут унитарными (для унитарного оператора $U$, по определению, $U^{+} = U^{-1}$):

$$G^{(\pm)+}_{xx_0} = T_{x_0x} \exp\left[ \pm\, i \int\limits_{x}^{x_0} \Lambda^{(\pm)+}(x')\, dx' \right] = G^{(\pm)}_{x_0x} = G^{(\pm)-1}_{xx_0}. \tag{10}$$

4. Предположим теперь, что волна $u^{(+)}$ задана на входе $x = 0$ в неоднородный слой $(0, L)$, причем в плоскости $x = L$ находится зеркало ОВФ с не зависящим от времени коэффициентом отражения $R$ (который может быть, в частности, оператором). Тогда значение амплитуды отраженной волны $u^{(-)}$ при $x = L$ есть $u^{(-)}(L) = Ru^{(+)*}(L)$, а для комплексно-сопряженного значения $u^{(-)*}$ в плоскости $x = 0$ из (2) и (3) получаем (см. рис. 1а)

$$u_0^{(-)*} \equiv u^{(-)*}(0, t) = g^{(-)*}_{0L} R^{*} g^{(+)}_{L0} u^{(+)}(0, t) =$$
$$= G^{(-)*}_{0L} \exp(-L\partial_{ct}) R^{*} \exp(-L\partial_{ct})\, G_{L0} u^{(+)}(0, t) = \tag{11}$$
$$= G^{+}_{L0}\{\Lambda^{(-)}(x', t)\} R^{*} G_{L0}\{\Lambda^{(+)}(x', t - 2Lc^{-1})\} u^{(+)}(0, t - 2Lc^{-1}).$$

Если считать, что поглощение отсутствует, $\varepsilon=\varepsilon^*$, то согласно (10) $G^{+}_{L0}=G^{-1}_{L0}$ и (11) переходит в

$$u^{(-)*}(0,t)=G^{-1}_{L0}\{\Lambda(x',t-x'c^{-1})\}R^*G_{L0}\times \times\{\Lambda(x',t-(2L-x')c^{-1})\}u^{(+)}(0,t-2Lc^{-1}). \tag{12}$$

(Мы здесь учли, что $\Lambda^{(\pm)}(x',t)=\Lambda(x',t\pm x'c^{-1})$.) Отсюда видно, что если можно пренебречь ограниченностью отражающей апертуры, заменив $R$ постоянным числом, а также не учитывать изменений свойств среды за удвоенное время прохождения волной слоя $t=2L/c$, то

$$u^{(-)*}(0,t)\approx R^*G^{-1}_{L0}\{\Lambda(x',t)\}G_{L0}\{\Lambda(x',t)\}\times \times u^{(+)}(0,t-2Lc^{-1})=R^*u^{(+)}(0,t-2Lc^{-1}), \tag{13}$$

т. е. зеркало ОВФ полностью компенсирует дифракцию волны и искажающее влияние неоднородностей в слое. Аналогичный результат получается и при наличии слоисто-неоднородного поглощения, когда $\varepsilon''\equiv\equiv\operatorname{Im}\varepsilon=\varepsilon''(x,t)$ не зависит от поперечных координат $\rho$:

$$u^{(-)*}(0,t)=\exp\left[-\int_0^L(\varepsilon''(x',t-x'c^{-1})+\varepsilon''(x',t-(2L-x')c^{-1})dx'\right]\times \times R^*u^{(+)}(0,t-2Lc^{-1}). \tag{14}$$

Это выражение отличается от (13) лишь множителем, учитывающим поглощение. В общем случае неоднородно-поглощающей среды, когда $\varepsilon''=\varepsilon''(\rho)$, соотношение (14) уже не выполняется.

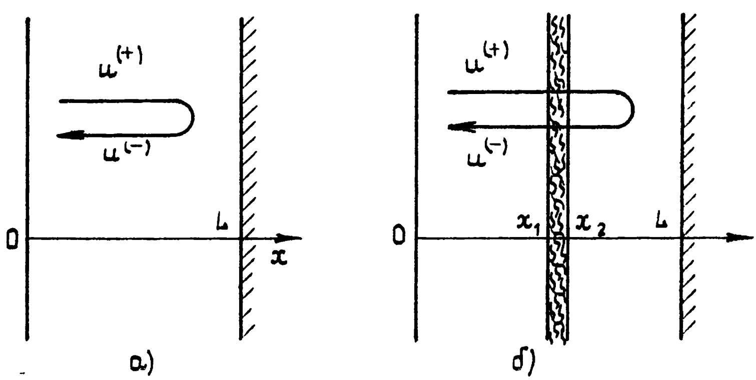


Рис. 1.

5. В соответствии с (11) для вычисления статистических моментов $u_0^{(-)}$ нужно знать моменты оператора $G_{L0}$ удвоенного порядка. Для иллюстрации рассмотрим описание среднего значения $\langle u_0^{(-)}\rangle$, вычисление которого требует знания второго момента $G_{L0}$.

Будем считать, что операторы с нижним индексом «1» действуют по поперечному аргументу $\rho_1$, а с нижним индексом «2» — по $\rho_2$, и введем обозначения

$$G_1=G^{+}_{Lx}\{\Lambda_1^{(-)}(t)\}=\overset{(1)}{T}_{xL}\exp\left[-i\int_x^L\Lambda_1^{+}(x',t-x'c^{-1})\,dx'\right],$$

$$G_2 = G_{Lx}\{\Lambda_2^{(+)}(t-2Lc^{-1})\} = \overset{(2)}{T}_{Lx}\exp\left[i\int\limits_x^L \Lambda_2(x', t-(2L-x')c^{-1})\,dx'\right], \tag{15}$$

где верхний индекс указывает, что $\overset{(1)}{T}_{xL}$ упорядочивает операторы $\Lambda_1^{(+)}$ (с нижним индексом 1), а $\overset{(2)}{T}_{Lx}$ — операторы $\Lambda_2$. Тогда (11) можно записать как

$$u_0^{(-)*} \equiv u^{(-)*}(0, \rho_1, t) = (G_1(R_2^* G_2 u^{(+)}(0, \rho_2, t-2Lc^{-1}))_{\rho_2=\rho_1})_{x=0},$$

откуда видно, что среднее значение $\langle u_0^{(-)*}\rangle$ выражается через второй момент $\langle G_1G_2\rangle$. Поскольку в соответствии с (15)

$$\partial_x G_1 = i\Lambda_1^+(x, t-xc^{-1})\,G_1, \quad \partial_x G_2 = -iG_2\Lambda_2(x, t-(2L-x)c^{-1}),$$

произведение $G_1G_2$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_x G_1G_2 = iG_2[\Lambda_1^+(x, t-xc^{-1}) - \Lambda_2(x, t-(2L-x)c^{-1})]\,G_1 \tag{16}$$

с вытекающим из (15) начальным условием

$$(G_1G_2)_{x=L} = \hat{1}. \tag{17}$$

Обозначив ядро $G_1$ через $G_1(\rho_1, \rho_1')$, а ядро $G_2$ — через $G_2(\rho_2, \rho_2')$ и учитывая, что $\Lambda = (\Delta_\rho + k^2\varepsilon)/2k$, уравнение (16) можно записать более подробно в виде

$$\partial_x G_1(\rho_1, \rho_1')\,G_2(\rho_2, \rho_2') = -(i/2k)\,[\Delta_{\rho_2'} - \Delta_{\rho_1} + k^2(\varepsilon(x, \rho_2', t - (2L-x)c^{-1}) - \varepsilon^*(x, \rho_1, t-xc^{-1}))]\,G_1(\rho_1, \rho_1')\,G_2(\rho_2, \rho_2'). \tag{18}$$

При этом начальное условие (17) запишется как

$$(G_1(\rho_1, \rho_1')\,G_2(\rho_2, \rho_2'))_{x=L} = \delta(\rho_1-\rho_1')\,\delta(\rho_2-\rho_2'). \tag{19}$$

(В (18) мы учли, что в уравнении для ядер оператору $G_2\Delta_{\rho_2}$ отвечает слагаемое $\Delta_{\rho_2'}G_2(\rho_2, \rho_2')$, в чем легко убедиться, подействовав этим оператором на пробную функцию и воспользовавшись интегрированием по частям.)

Будем считать флуктуации $\varepsilon$ гауссовыми, статистически однородными в плоскости $\rho$ и стационарными и рассмотрим приближение дельта-коррелированных вдоль $x$ неоднородностей, полагая корреляционную функцию $\varepsilon$ равной

$$B(x, x', \rho-\rho', t-t') \equiv \langle\varepsilon(x, \rho, t)\,\varepsilon(x', \rho', t')\rangle = \delta(x-x')\,A(x, \rho-\rho', t-t'), \tag{20}$$

так что

$$A(x, \rho, \tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(x, x', \rho, \tau)\,dx'.$$

Тогда при $\varepsilon = \varepsilon^*$ из уравнения (18) получается следующее уравнение для ядра среднего значения оператора $G_1G_2$ (см., например, [5, 8]):

$$\partial_x\langle G_1(\rho_1, \rho_1')\,G_2(\rho_2, \rho_2')\rangle = [(i/2k)(\Delta_{\rho_1} - \Delta_{\rho_2'}) + (k^2/4)\,D(x, \rho_1-\rho_2', 2(L-x)c^{-1})]\,\langle G_1(\rho_1, \rho_1')\,G_2(\rho_2, \rho_2')\rangle. \tag{21}$$

Здесь

$$D(x, \rho, \tau) = A(x, 0, 0) - A(x, \rho, \tau). \tag{22}$$

Решение этого уравнения с усредненным начальным условием (19) хорошо известно. Далее мы не будем рассматривать это общее решение, ограничившись для простоты случаем идеально отражающего зеркала ОВФ, $R = 1$. Тогда $u_0^{(-)*}$ (12) запишется как

$$u_0^{(-)*} = G_{0L}\{\Lambda(x', t - x'c^{-1})\} G_{L0}\{\Lambda(x', t - (2L - x')c^{-1})\} \times \times u^{(+)}(0, t - 2Lc^{-1}) \equiv \gamma_0 u^{(+)}(0, t - 2Lc^{-1}), \tag{23}$$

где

$$\gamma_x \equiv G_{xL}\{\Lambda(x', t - x'c^{-1})\} G_{Lx}\{\Lambda(x', t - (2L - x')c^{-1})\}.$$

Уравнение для оператора $\gamma_x$ получается вполне аналогично (16) и имеет вид

$$\partial_x \gamma_x = i\Lambda(x, t - xc^{-1})\gamma_x - i\gamma_x\Lambda(x, t - (2L - x)c^{-1}),$$

или, в более подробной записи в виде уравнения для ядра $\gamma_x$,

$$\partial_x \gamma_x(\rho, \rho') = (i/2k)[\Delta_\rho - \Delta_{\rho'} + k^2(\varepsilon(x, \rho, t - xc^{-1}) - - \varepsilon(x, \rho', t - (2L - x)c^{-1}))]\gamma_x(\rho, \rho'). \tag{24}$$

Это уравнение дополняется очевидным начальным условием

$$\gamma_L(\rho, \rho') = (G_{LL}G_{LL})(\rho, \rho') = \delta(\rho - \rho'), \tag{25}$$

причем амплитуда отраженной волны (23) записывается через решение (24) как

$$u_0^{(-)*} = u^{(-)*}(0, \rho, t) = \int \gamma_0(\rho, \rho') u^{(+)}(0, \rho', t - 2Lc^{-1})\, d\rho'.$$

В «марковском» приближении (20) из (24) вытекает следующее уравнение для среднего значения $\langle\gamma_x\rangle$:

$$\partial_x \langle\gamma_x(\rho, \rho')\rangle = [(i/2k)(\Delta_\rho - \Delta_{\rho'}) + (k^2/4) \times \times D(x, \rho - \rho', 2(L - x)c^{-1})]\langle\gamma_x(\rho, \rho')\rangle, \tag{26}$$

которое можно получить также непосредственно из (21), положив там $\rho_1' = \rho_2$ и затем проинтегрировав обе части по $\rho_2$.

Для частного случая «сносовой» нестационарности, когда зависимость $\varepsilon$ от времени сводится к сдвигу по поперечной координате $\rho$ со скоростью $v_\perp$, $\varepsilon(x, \rho, t) = \varepsilon(x, \rho - v_\perp t)$, (26) переходит в результат [4]. Решение уравнения (26) при вытекающем из (25) условии $\langle\gamma_L(\rho, \rho')\rangle = \delta(\rho - \rho')$ имеет вид

$$\langle\gamma_x(\rho, \rho')\rangle = \exp\left[-\frac{k^2}{4}\int_x^L D\left(x', 0{,}2\frac{L - x'}{c}\right)dx'\right]\delta(\rho - \rho'),$$

что обобщает аналогичный результат [4].

6. Удобство операторного подхода особенно наглядно проявляется при описании дифракции в многослойных системах (при этом в используемом нами приближении отражение от границ слоев не учитывается). Рассмотрим следующий пример: пусть волна $u_0^{(+)} = u^{(+)}(0, t)$ падает слева на плоскость $x = 0$, после чего проходит случайно-неоднородный слой $(x_1, x_2)$ и отражается с коэффициентом отражения $R$ от ОВФ зеркала, помещенного в плоскости $x = L$ (см. рис. 1б). В соответствии с этим оператор распространения представляется в виде произведения

$$G_{0L} = G_{0x_1} G_{x_1x_2} G_{x_2L} = G_{0x_1}^{(0)} G_{x_1x_2}[\varepsilon(x', t - x'c^{-1})] G_{x_2L}^{(0)}. \tag{27}$$

Здесь мы использовали обозначение

$$G_{xx'} \equiv G_{xx'}^{(+)} \{\Lambda^{(+)}\} \equiv G_{xx'} [\varepsilon (x', t - x'c^{-1})],$$

а оператор

$$G_{xx'}^{(0)} \equiv G_{xx'} [0] = \exp [(i/2k) (x - x') \Delta_\rho]$$

описывает дифракцию в свободном пространстве $\left(G_{xx'}^{(0)+} = G_{xx'}^{(0)-1}\right)$.

Подставляя (27) в (11), находим следующее выражение для амплитуды отраженной волны при $x=0$:

$$u_0^{(-)*} = G_{x_1 0}^{-1} G_{x_2 x_1}^{+} [\varepsilon (x', t - x'c^{-1})] G_{Lx_1}^{-1} R^* \times$$
$$\times G_{Lx_2} G_{x_2 x_1} [\varepsilon (x', t - (2L - x') c^{-1})] G_{x_1 0} u^{(+)} (0, t - 2Lc^{-1}). \tag{28}$$

Это, на первый взгляд, громоздкое выражение очень удобно использовать для нахождения моментов отраженной волны. Так, например, в случае неограниченной отражающей апертуры с постоянным коэффициентом отражения $R=\text{const}$ входящие в (28) операторы $G_{Lx_2}^{-1}$ и $G_{Lx_2}$ сокращаются. Это означает, что зеркало ОВФ в каждой реализации компенсирует свободную дифракцию в слое $(x_2, L)$, в случае ограниченной апертуры $(R \neq \text{const})$ такой компенсации, вообще говоря, уже не происходит.

Для иллюстрации роли статистического усреднения ограничимся простейшим примером тонкого неоднородного слоя $x_2 - x_1 \ll kl_\text{к}^2$, где $l_\text{к}$ — характерный размер неоднородностей в слое, и неограниченной отражающей апертуры с $R=\text{const}$. Тогда, пренебрегая дифракцией в слое $(x_1, x_2)$, получаем

$$G_{x_2 x_1} = T_{x_2 x_1} \exp \left[ i \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\Delta_\rho}{2k} + \frac{k\varepsilon}{2} \right) dx \right] \approx \exp \left[ \frac{ik}{2} \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon dx \right],$$

что эквивалентно использованию теории возмущений в методе геометрической оптики. При этом (28) принимает вид

$$u_0^{(-)*} = R^* G_{x_1 0}^{-1} \exp \left\{ (ik/2) \int_{x_1}^{x_2} [\varepsilon (x', \rho, t - (2L - x') c^{-1}) - \right.$$
$$\left. - \varepsilon^* (x', \rho, t - x'c^{-1})] dx' \right\} G_{x_1 0} u^{(+)} (0, t - 2Lc^{-1}). \tag{29}$$

В случае гауссовых флуктуаций $\varepsilon$ при $\varepsilon = \varepsilon^*$ для среднего значения $u_0^{(-)*}$ отсюда находим

$$\langle u_0'^{(-)*} \rangle = \exp \left\{ -\frac{k^2}{4} \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} [B (x', x'', 0, 0) - \right.$$
$$\left. - B (x', x'', 0, (2L - x') c^{-1})] dx' dx'' \right\} u^{(+)} (0, t - 2Lc^{-1}). \tag{30}$$

В случае малых неоднородностей с $l_\text{к} \ll x_2 - x_1$, $c\tau_\text{к}$, где $\tau_\text{к}$ — характерное время корреляции неоднородностей, (30) переходит в

$$\langle u_0^{(-)*} \rangle \approx \exp \left[ -\frac{k^2}{4} \int_{x_1}^{x_2} D \left( x', 0, 2 \frac{L - x'}{c} \right) dx' \right] u^{(+)} \left( 0, t - \frac{2L}{c} \right), \tag{31}$$

что эквивалентно использованию приближения (20). Если, кроме того, $x_2 - x_1 \ll c\tau_\text{к}$ и слой является статистически однородным, т. е. $D (x, \rho, \tau) = D (\rho, \tau)$, то это выражение дает

$$\langle u_0^{(-)*}\rangle = \exp\left[-(k^2/4)\,D\,(0{,}2\,(L-x_2)\,c^{-1})\,(x_2-x_1)\right]\,u^{(+)}\,(0,\,t-2Lc^{-1}).$$

Отсюда видно, что если отвлечься от временных задержек, то среднее поле отраженной волны оказывается таким же, как и в отсутствие свободной дифракции в слоях $(0,\ x_1)$ и $(x_2,\ L)$, т. е. зеркало ОВФ в среднем компенсирует эту дифракцию не только для слоя $(x_2,\ L)$, но и для слоя $(0,\ x_1)$. При этом, меняя расстояние $L—x_2$ от неоднородного слоя до зеркала, можно измерить зависимость $D(0,\ \tau)$ от времени задержки $\tau=2(L—x)c^{-1}$.

Если падающая волна — плоская ($u^{(+)}(0,\ t)$ не зависит от $\rho$), то, вычисляя с помощью (29) второй момент амплитуды отраженной волны при условии $l_к \ll x_2—x_1$, $c\tau_к$, получаем

$$\langle u^{(-)*}(0,\rho_1\, t)\,u^{(-)}(0,\rho_2,t)\rangle = |R|^2 \exp\left\{-\frac{k^2}{2}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left[D(x',0,2(L-x')c^{-1}) - D(x',\rho_1-\rho_2,2(L-x')c^{-1})\right]dx'\right\}|u^{(+)}(0,t-2Lc^{-1})|^2, \quad (32)$$

где слой $(x_1,\ x_2)$ для простоты считается статистически изотропным в каждой плоскости $x=\mathrm{const}$ (т. е. $D(x,\ \rho,\ t)=D(x,\ \rho,\ t)$). Такой же результат получается, если в (29) не учитывать дифракцию в слое $(0,\ x_1)$, положив $G_{x_1 0}=1$. Это означает, что в рассматриваемом приближении зеркало ОВФ в среднем компенсирует дифракцию не только для первого, но и для второго момента отраженной волны (для произвольных моментов это, вообще говоря, не так). В соответствии с (32) измерение второго момента отраженной волны позволяет оценить зависимость $D(x,\rho,\tau)$ от пространственной координаты $\rho=\rho_1-\rho_2$. В частности, меняя $\rho$ и задержку $\tau=2(\ L—x_2)c^{-1}$, можно выяснить, является ли нестационарность слоя «сносовой» или нет.

Вполне аналогично можно рассмотреть и более высокие моменты отраженной волны $u_0^{(-)}$, которые несут дополнительную информацию о статистических характеристиках слоя.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Обращение волнового фронта оптического излучения в нелинейных средах.— Сб ИПФ АН СССР — Горький, 1979
2. Малахов А. Н., Саичев А. И — Изв вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 11, с 1356.
3. Ахунов Х. Г, Бункин Ф. В., Власов Д. В., Кравцов Ю. А.— Квантовая электроника, 1982, 9, № 5, с. 1065
4. Половинкин А. В, Саичев А. И — Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 4, с. 433.
5. Рытов С М, Кравцов Ю А, Татарский В И Введение в статистическую радиофизику. ч. II — М : Наука, 1978
6. Гельфгат В И — Акуст журн, 1976, 22, № 1, с 123
7. Саичев А И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1978, 21, № 9, с. 1290
8. Кляцкин В. И Статистические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах — М.: Наука, 1980.



Поступила в редакцию
12 июля 1982 г.


## PHASE CONJUGATION IN NONSTATIONARY MEDIUM WITH LARGE SCALE INHOMOGENEITIES-OPERATIONAL DESCRIPTION


*L. A. Apresjan*



Reflection of wave beam from phase conjugating mirror in nonstationary random medium is discussed in terms of operational description corresponding to the quasioptical approximation. Superoperator extending well known ordering Dyson's operator is introduced. It enables one to derive simply the reciprocity relations for nonstationary medium and Markov approximation equations for moments of reflected wave. As an example equations for the first and second moments are considered.