

УДК 538.574 4

О ВОЗМОЖНОМ ОБОБЩЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ КИРХГОФА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ПРОЗРАЧНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБЪЕКТАХ

А. В. Мороз, Э. И. Фейзулин

На примере радиально неоднородного плазменного цилиндра рассмотрен приближенный метод дифракционного описания поля в скалярной задаче рассеяния волн на больших по сравнению с длиной волны прозрачных неоднородных объектах. Для профиля диэлектрической проницаемости специального вида, допускающего точное решение задачи, проводится сравнение результатов вычислений дифференциального сечения рассеяния по точным и приближенным формулам

Приближение Кирхгофа (ПК) широко используется при решении граничных задач теории дифракции в однородной среде [1]. В работах [2, 3] было рассмотрено обобщение ПК на неоднородные среды, в котором для функции точечного источника использовалось геометрикооптическое (ГО) приближение. Однако, поскольку ГО решение представляется, вообще говоря, лишь в виде функции лучевых координат, полученное обобщение обладало тем недостатком, что искомое поле зависело от координат точки наблюдения неявным образом. В [4] был предложен альтернативный метод описания поля в неоднородной среде, основанный на разложении поля по квазиплоским волнам и являющийся фактически обобщением метода дифракционного интеграла (в дальнейшем для краткости МДИ) из «традиционной» асимптотической теории дифракции [5]. Этот метод дает явную зависимость поля от координат точки наблюдения, если известен полный интеграл уравнения эйконала для неоднородной среды.

Если неоднородность, характерные размеры которой велики по сравнению с длиной волны, локализована в пространстве, то дифракционное описание поля с явной зависимостью от координат точки наблюдения можно получить с помощью процедуры, представляющей собой обобщение ПК: поверхность интегрирования в формуле Грина, вынесенная за пределы неоднородности, выбирается так, чтобы для нее было возможно построение функции Грина, а поле на этой поверхности строится с использованием ГО или ее обобщений в неоднородной среде. При этом не нужно знать полный интеграл уравнения эйконала — поле на поверхности интегрирования может быть задано в лучевых координатах.

В [6] такой подход был рассмотрен на примере двумерной задачи дифракции на прозрачном радиально неоднородном плазменном цилиндре без закритической области, когда в качестве поверхности интегрирования берется граница цилиндра, а поле на этой поверхности вычисляется в ГО приближении. Здесь на примере радиально неоднородного плазменного цилиндра с закритической областью мы исследуем случай, когда поверхность интегрирования пересекает простую каустика и для построения поля нужно использовать асимптотику Эйри

[7]*. Для профиля специального вида, допускающего точное решение задачи, проводится сравнение результатов вычислений по точным и приближенным формулам, что позволяет указать область применимости последних.

Приближение Кирхгофа в случае локализованной неоднородности (на примере двумерной задачи дифракции на радиально неоднородном плазменном цилиндре). Пусть ось z прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль оси плазменного цилиндра с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(r)$ и радиусом a ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$, функция $\epsilon(r) = 1$ при $r > a$ и непрерывна при $r = a$), а ось x ориентирована в направлении распространения падающей волны. Считая падающую волну поляризованной вдоль оси z , найдем, что единственная, отличная от нуля z -компонента U полного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в безразмерных переменных $x/a, \dots$, обозначенных теми же буквами, что и исходные размерные переменные, имеет вид

$$(\Delta + \kappa^2 \epsilon) U = 0. \quad (1)$$

Здесь $\epsilon = 1$ при $r > 1$, $\kappa = k_0 a \gg 1$. Пусть R, θ — полярные координаты точки наблюдения \mathbf{R} . Тогда рассеянное поле $U_s(\mathbf{R}) = U(\mathbf{R}) - U_0(\mathbf{R})$, где $U_0(\mathbf{R}) = \exp(i\kappa R \cos \theta)$ — поле падающей волны, при $R \rightarrow \infty$ имеет вид расходящейся цилиндрической волны

$$U_s(R, \theta) = f(\theta) e^{i\kappa R} (\sqrt{R})^{-1},$$

и задача состоит в определении амплитуды рассеяния $f(\theta)$.

Точная формула для амплитуды рассеяния. Пусть S_1 — окружность радиуса $r_1 \geq 1$. Явное выражение для функции Грина окружности S_1 , которое мы здесь не приводим, легко находится методом разделения переменных. Используя эту функцию в формуле Грина, приходим к соотношению, связывающему рассеянные поля в точке наблюдения и на окружности S_1 :

$$U_s(R, \theta) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{H_0^{(1)}(\kappa R)}{H_0^{(1)}(\kappa r_1)} \Phi_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{H_m^{(1)}(\kappa R)}{H_m^{(1)}(\kappa r_1)} \Phi_m \cos m\theta \right), \quad (2)$$

где $H_m^{(1)}$ — функции Ганкеля, $\Phi_m = \int_0^{2\pi} U_s(r_1, \varphi) \cos m\varphi d\varphi$ — коэффициенты Фурье рассеянного поля на окружности S_1 . Положим в (2) $r_1 = 1$, поместив тем самым S_1 на границу неоднородности, и устремим $R \rightarrow \infty$. Тогда получим следующее выражение для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{8}{\pi^3 \kappa}} e^{-i\pi/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\Phi_0}{H_0^{(1)}(\kappa)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m \Phi_m}{H_m^{(1)}(\kappa)} \cos m\theta \right). \quad (3)$$

Формула (3), будучи точной, не дает, очевидно, решения задачи, так как рассеянное поле на границе неоднородности неизвестно.

Приближенное выражение для амплитуды рассеяния. Пусть \tilde{U} — некоторое приближенное выражение для полного поля на S_1 , \tilde{U}_s — соответствующее приближение для рассеянного поля. Тогда, вычисляя по этому приближению коэффициенты Фурье, получим приближенное выражение для амплитуд рассеяния.

* Аналогичное обобщение МДИ проведено в работе [8].

Если окружность S_1 пересекает простая каустика, то в качестве \tilde{U} следует использовать асимптотику Эйри [7] поля U . Асимптотика Эйри полностью определяется ГО полем на S_1 , которое мы и рассмотрим в первую очередь.

Лучевое поле на границе неоднородности. Лучевая структура ГО поля на S_1 определена, если известна функция $\vartheta = \vartheta(\rho)$, где ϑ — угол точки выхода из неоднородности луча с прицельным параметром ρ (см. рис. 1). Функция $\vartheta(\rho)$ имеет вид (см. например, [10])

$$\vartheta(\rho) = \pi - \arcsin \rho - 2\alpha(\rho), \quad (4)$$

где
$$\alpha(\rho) = \rho \int_{r_n}^1 \frac{d\eta}{\eta \sqrt{\varepsilon(\eta)\eta^2 - \rho^2}},$$

а радиус точки поворота $r_n = r_n(\rho)$ определяется уравнением $\varepsilon(r_n)r_n^2 = \rho^2$. При этом якобиан $D = D(\rho)$, описывающий поведение амплитуды на луче, и эйконал $\sigma = \sigma(\rho)$ равны соответственно:

$$D(\rho) = -\sqrt{1 - \rho^2} \dot{\vartheta}(\rho); \quad (5)$$

$$\sigma(\rho) = -\sqrt{1 - \rho^2} + 2\rho\alpha(\rho) + 2\beta(\rho), \quad (6)$$

где точка означает дифференцирование по ρ , а $\beta(\rho) = \int_{r_n}^1 \sqrt{\varepsilon(\eta)\eta^2 - \rho^2} \times$

$\times \frac{d\eta}{\eta}$. Дифференцируя (4) по ρ и проводя некоторые преобразования, получим следующее выражение для $\dot{\vartheta}(\rho)$:

$$\dot{\vartheta}(\rho) = -A/\sqrt{1 - \rho^2} - 4\gamma(\rho), \quad (7)$$

где

$$\gamma(\rho) = \int_{r_n}^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\varepsilon\eta^2 - \rho^2}} \frac{(\varepsilon')^2 \eta - \varepsilon\varepsilon' - \varepsilon\varepsilon''\eta}{(\varepsilon'\eta + 2\varepsilon)^2}, \quad (8)$$

$$A = (\varepsilon'_1 - 2)(\varepsilon'_1 + 2)^{-1},$$

$\varepsilon'_1 = \varepsilon'_1(1-0)$, причем для сходимости интеграла $\gamma(\rho)$ должно быть выполнено условие

$$\varepsilon'(r)r + 2\varepsilon(r) > 0, \quad (9)$$

которое фактически совпадает с условием монотонности «приведенной» диэлектрической проницаемости $\varepsilon(r)r^2$.

Изучим поведение функций (4)–(6) в окрестности полюса цилиндра, т. е. при $\rho \rightarrow 1-0$. При условии (9) можно получить следующие асимптотические выражения:

$$\vartheta(\rho) = (\pi/2) + \sqrt{q}(A + Bq) + O(q^{3/2}); \quad (10)$$

$$D(\rho) = A - Cq + O(q^2); \quad (11)$$

$$\sigma(\rho) = \sqrt{q}(-A + (C/3)q) + O(q^{5/2}), \quad (12)$$

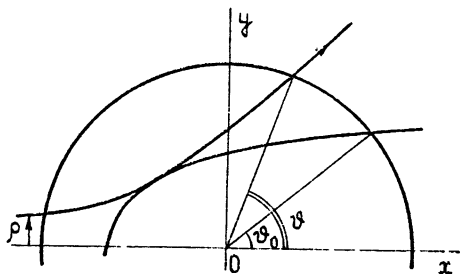


Рис. 1.

где коэффициент A определен равенством (8), $B = [(\epsilon_1')^3 + 18(\epsilon_1'')^3 - 20\epsilon_1' - 16\epsilon_1'' - 8] [6(2 + \epsilon_1')^3]^{-1}$, $C = 8 [\epsilon_1' + \epsilon_1'' - (\epsilon_1')^3] [(\epsilon_1' + 2)^3]^{-1}$, $\epsilon_1'' = \epsilon''(1-0)$, $q = 1 - \rho^2$. Полагая в (10) $\vartheta = \varphi$, найдем зависимость D и σ от полярного угла:

$$D(\varphi) = A - (C/A^2)(\varphi - \pi/2)^2 + O((\varphi - \pi/2)^3); \quad (11')$$

$$\sigma(\varphi) = \pi/2 - \varphi + O((\varphi - \pi/2)^3). \quad (12')$$

Из (11) следует, что на лучах, прошедших неоднородность, при $\rho \rightarrow 1$ якобиан стремится к A . На лучах же падающего поля $D = -1$. Поэтому при $\epsilon_1' \neq 0$ якобиан разрывен в полюсе. Однако его первая производная по φ , как видно из (11'), оказывается непрерывной. (Тот факт, что ГО поле может иметь особенность в полюсе, отмечается в работе [11], где рассматривался частный случай квадратичной зависимости $\epsilon(r)$.)

Эйконал на лучах падающего поля равен $\cos \varphi$. Отсюда и из (12') следует, что эйконал в окрестности полюса — по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемая функция угла.

Разрывы поля на поверхности интегрирования, связанные с несовершенством аппроксимации \tilde{U} , — это фиктивные источники, которые могут внести большую погрешность в амплитуду рассеяния. Исключить вклад в амплитуду рассеяния от разрыва в полюсе (который, очевидно, сохранится и при использовании асимптотики Эйри) нам позволит некоторый формальный прием, описанный ниже.

Асимптотика Эйри поля на границе неоднородности. Рассмотрим теперь асимптотику Эйри поля на границе неоднородности, считая, что границу пересекает простая каустика и угол точки пересечения ϑ_0 лежит в интервале $0 < \vartheta_0 < \pi/2$ (см. рис. 1). Для выполнения последнего условия необходимо и достаточно, чтобы было

$$A < 0. \quad (13)$$

Действительно, при $A < 0$ якобиан на лучах с прицельными параметрами $\rho \rightarrow 1$, согласно (11), сохраняет знак, т. е. эти лучи не касаются каустики. Из (10) же следует, что для этих лучей $\vartheta < \pi/2$. Следовательно, точка пересечения каустики с границей действительно лежит в указанном интервале углов. Необходимость условия (13) столь же очевидна.

Снабжая величины, относящиеся к «прямому» и «отраженному» от каустики лучам индексами «1» и «2», запишем асимптотику Эйри поля в области «света» в виде

$$\tilde{U} = e^{-i\tau/4} \sqrt{\pi/6} \left((1/\sqrt{-D_1}) e^{i\alpha_1} M^* + (1/\sqrt{D_2}) e^{i\alpha_2} M \right), \quad (14)$$

где $M = M(\mu) = e^{-i\mu} \sqrt{\mu} [J_{1/3}(\mu) + J_{-1/3}(\mu) + i(J_{2/3}(\mu) - J_{-2/3}(\mu))]$, $\mu = (\pi/2)(\sigma_2 - \sigma_1)$, а звездочка означает комплексное сопряжение. При записи (14) функции Эйри и ее производная выражены через более удобные в обращении функции Бесселя согласно формулам, приведенным в [12]. Формула (14) описывает поле на границе неоднородности в области «света», т. е. при $\vartheta_0 \leq \varphi \leq \pi$. Выражение же для поля в области каустической «тени», при $0 \leq \varphi < \vartheta_0$, получим, продолжая (14) в эту область по обычному рецепту (см., например, [1]): в области «света» вблизи каустики находим прицельные параметры лучей, приходящих в точку $\varphi = \vartheta_0 + \delta$, $0 \leq \delta \leq 1$, а также соответствующие им значения якобианов и эйконалов. После этого, полагая δ отрицательным и используя известные аналитические свойства функций Бесселя [13], при-

ходим к искомому выражению для теневого поля. Реализация этой программы дает следующие результаты:

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} &= \rho_0 \pm h_1 \delta^{1/2} - h_2 \delta + O(\delta^{3/2}), \\ D_{1,2} &= \mp \frac{2\sqrt{1-\rho_0^2}}{h_1} \delta^{1/2} \left[1 \pm 2 \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{\rho_0 h_1}{2(1-\rho_0^2)} \right) \delta^{1/2} + O(\delta) \right], \\ \sigma_{1,2} &= \sigma_0 - \rho_0 \delta \mp (2h_1/3) \delta^{3/2} + O(\delta^2), \\ \mu &= (2\kappa h_1/3) \delta^{3/2} (1 + O(\delta)), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_\tau &= e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{2\kappa}{3\pi\sqrt{1-\rho_0^2}}} h_1 \delta_1^{1/2} \left[K_{1/3} \left(\frac{2\kappa h_1}{3} \delta_1^{3/2} \right) - i \left(\frac{h_2}{h_1} - \frac{\rho_0 h_1}{2(1-\rho_0^2)} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \delta_1^{1/2} K_{2/3} \left(\frac{2\kappa h_1}{3} \delta_1^{3/2} \right) \right] \exp [i\kappa (\sigma_0 + \rho_0 \delta_1)]. \end{aligned}$$

Здесь ρ_0 — прицельный параметр луча, касающегося каустики в точке ее пересечения с границей неоднородности, $\vartheta(\rho_0) = \vartheta_0$, $h_1 = \sqrt{2/\vartheta_0}$, $h_2 = \vartheta_0/3\vartheta_0^2$, $\vartheta_0 = d^2\vartheta(\rho_0)/d\rho^2$, $\vartheta_0' = d^3\vartheta(\rho_0)/d\rho^3$, $\rho_{1,2}$ — прицельные параметры «прямого» и «отраженного» от каустики лучей, причем первому индексу соответствует верхний знак, $\sigma_0 = \sigma(\rho_0)$, \tilde{U}_τ — поле в области «тени», при $\varphi < \vartheta_0$, $\delta_1 = \vartheta_0 - \varphi$ — угловое расстояние от каустики до текущей точки, K — функция Макдональда. Заметим, что полученная таким способом асимптотика Эйри (14), (15) будет лишь непрерывной на каустике.

Приближенные коэффициенты Фурье и амплитуда рассеяния. Переход к методу дифракционного интеграла. Используя асимптотику (14), (15), запишем приближенные коэффициенты Фурье в виде

$$\tilde{\Phi}_m = e^{-i\pi/4} \sqrt{\pi/6} (I_1 + I_2 + I_3) + \int_0^{\vartheta_0} \tilde{U}_\tau \cos m\varphi d\varphi - \pi i^m J_m(\kappa). \quad (16)$$

Здесь интеграл, содержащий U_0 , выражен через функцию Бесселя J_m , предпоследний член представляет собой вклад в коэффициенты Фурье от области «тени», а интегралы I_1 , I_2 , I_3 — от области «света», равные

$$I_1 = \int_{\tau/2}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{-D_1}} e^{i\kappa r_1} M^*(\mu) \cos m\varphi d\varphi; \quad (17')$$

$$I_2 = \int_{\tau/2}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{D_2}} e^{i\kappa r_2} M(\mu) \cos m\varphi d\varphi; \quad (17'')$$

$$I_3 = \int_{\vartheta_0}^{\tau/2} \left[\frac{1}{\sqrt{-D_1}} e^{i\kappa r_1} M^*(\mu) + \frac{1}{\sqrt{D_2}} e^{i\kappa r_2} M(\mu) \right] \cos m\varphi d\varphi. \quad (17''')$$

Существенно, что в этих интегралах можно перейти к интегрированию по лучевой координате ρ или радиусу точки поворота r_τ , причем последняя замена более удобна в случае, когда величины (4) — (7) не вычисляются явно.

Приведем здесь результат перехода к интегрированию по ρ :

$$I_1 = \int_0^{\hat{\rho}} e^{x \cos \vartheta(\rho)} M^* \left[\frac{x}{2} (\sigma(\rho) - \cos \vartheta(\rho)) \right] \cos m \vartheta(\rho) |\dot{\vartheta}(\rho)| d\rho,$$

$$I_2 = \int_0^{\hat{\rho}} \sqrt{\frac{|\dot{\vartheta}(\rho)|}{V \sqrt{1-\rho^2}}} e^{ix \vartheta(\rho)} M \left[\frac{x}{2} (\sigma(\rho) - \cos \vartheta(\rho)) \right] \cos m \vartheta(\rho) d\rho,$$

$$I_3 = \int_{\rho_0}^1 \left\{ \frac{1}{V \sqrt{1-\rho^2} \dot{\vartheta}(\rho)} e^{ix \vartheta(\rho)} M^* \left[\frac{x}{2} (\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho)) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{V \sqrt{1-\rho_2^2} |\dot{\vartheta}(\rho_2)|} e^{ix \vartheta(\rho_2)} M \left[\frac{x}{2} (\sigma(\rho_2) - \sigma(\rho)) \right] \right\} \cos m \vartheta(\rho) \dot{\vartheta}(\rho) d\rho.$$

Здесь $\rho_2 = \rho_2(\rho)$ — прицельный параметр «отраженного» от каустики луча, приходящего в точку $\varphi = \vartheta(\rho)$, а $\hat{\rho}$ удовлетворяет условиям $\vartheta(\hat{\rho}) = \pi/2$, $\hat{\rho}_2 < \rho_0$.

Выражения (16), (17) следует использовать для прямых численных расчетов амплитуды рассеяния (3) лишь в случае $\epsilon'_1 = 0$. Если же $\epsilon'_1 \neq 0$ и приближение (14), (15) имеет разрыв в полюсе, целесообразно модифицировать расчетную формулу для амплитуды рассеяния таким образом, чтобы исключить этот разрыв. Для этого введем в рассмотрение поле \tilde{U} :

$$\tilde{U} = \begin{cases} \tilde{U}, & \varphi < \pi/2 \\ e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{V-A} e^{ix_1} M^* + \frac{1}{V D_2} e^{ix_2} M \right), & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

Так, построенное поле \tilde{U} непрерывно дифференцируемо в полюсе, а $\tilde{U} = \tilde{\tilde{U}} + P$, где разрывная «невязка» P равна

$$P = \begin{cases} 0, & \varphi < \pi/2 \\ e^{-i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{6}} \left(1 - \frac{1}{V-A} \right) e^{ix_1} M^*, & \pi/2 \leq \varphi \leq \pi \end{cases}$$

Амплитуда рассеяния при этом равна

$$\tilde{f} = \tilde{\tilde{f}} + \Delta f, \quad (18)$$

где $\tilde{\tilde{f}}$ — вклад в амплитуду от поля $\tilde{\tilde{U}}$, который вычисляется через коэффициенты Фурье $\tilde{\tilde{F}}_m$, отличающиеся от \tilde{F}_m множителем $1/\sqrt{V-A}$ перед I_1 , а Δf — вклад в амплитуду от «невязки» P , который мы вычислим, применяя к (3) метод стационарной фазы. При этом величина M^* всюду считается медленно меняющейся (что оправдано, так как характерный масштаб изменения M — ширина прикаутической зоны — обычно велик по сравнению с длиной волны [10]), а для функций Ганкеля используется дебаевская асимптотика. Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

$$\Delta f = \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2}} \exp \left[-i 2x \sin \frac{\theta}{2} \right] \times$$

$$\times \left(1 - \frac{1}{\sqrt{-A}}\right) e^{-i\tau/4} \sqrt{\frac{\pi}{6}} M^*(\tilde{\mu}), \quad (19)$$

где $\tilde{\mu} = (\kappa/2) [\sin(\theta/2) + \sigma(\rho_2(\tilde{\varphi}))]$, $\rho_2(\tilde{\varphi})$ — прицельный параметр «отраженного» от каустики луча ($0 \leq \rho_2 < \rho_0$), приходящего в точку $\tilde{\varphi} = \pi/2 + \theta/2$.

Формулы (3)–(7), (14)–(19) представляют решение задачи и могут быть использованы для прямых численных расчетов.

В заключение этого раздела осуществим переход от наших формул для амплитуды рассеяния к формуле, которая может быть получена методом дифракционного интеграла. Для этого формально методом стационарной фазы вычислим асимптотику при $\kappa \rightarrow \infty$ коэффициентов Фурье (16). В пределе $\kappa \rightarrow \infty$ ширина прикаустической зоны стремится к нулю, и мы можем считать множитель M равным своему асимптотическому значению $\sqrt{6/\pi} e^{-\pi/4}$. В результате найдем

$$\tilde{\Phi}_m \approx \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 - m^2}}} \exp \left[i \left(\sqrt{\kappa^2 - m^2} + m \arcsin \frac{m}{\kappa} - \frac{\pi}{4} \right) (e^{2i\eta_m} - 1) \right], & m < \kappa, \\ 0, & m > \kappa, \end{cases}$$

где $\eta_m = \kappa \beta(m/\kappa) - \sqrt{\kappa^2 - m^2} + m \arccos(m/\kappa)$. Подставляя эти значения в формулу (3) и используя дебаевскую асимптотику функций Ганкеля, приходим к выражению, которое, как можно показать, является решением задачи в приближении МДИ*:

$$f(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} e^{i\pi/4} \left(\frac{1}{2} F_0 + \sum_{m=1}^{[4]} F_m \cos m\theta \right), \quad (20)$$

где $F_m = \exp(i2\eta_m) - 1$.

Точное решение задачи для специального профиля диэлектрической проницаемости. Мы рассмотрим здесь гиперболический профиль диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} 1 - \xi(r^{-2} - 1), & r \leq 1 \\ 1, & r > 1 \end{cases}$$

(ξ — произвольный параметр), для которого задача дифракции решается точно методом разделения переменных. Опуская несложные промежуточные выкладки, приведем окончательный результат:

$$f(\theta) = -2 \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa}} e^{-i\tau/4} \left(\frac{1}{2} \frac{\tilde{T}_0}{T_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tilde{T}_m}{T_m} \cos m\theta \right),$$

где $T_m = \tilde{T}_m + i\tilde{T}_m$, $\tilde{T}_m = [(\nu(m) - m) J_{\nu(m)}(\chi_1) - \chi_1 J_{\nu(m)+1}(\chi_1)] J_m(\chi) + \chi J_{\nu(m)}(\chi) J_{m+1}(\chi)$, $\tilde{T}_m = [(\nu(m) - m) J_{\nu(m)}(\chi_1) - \chi_1 J_{\nu(m)+1}(\chi_1)] Y_m(\chi) + \chi J_{\nu(m)}(\chi) Y_{m+1}(\chi)$, $\nu(m) = \sqrt{m^2 + \kappa^2 \xi}$, $\chi_1 = \kappa \sqrt{1 + \xi}$, J и Y — функции Бесселя и Неймана.

* В работе [9] получен результат, отличающийся от (20), что связано с использованием в [9] приема, фактически выходящего за рамки МДИ.

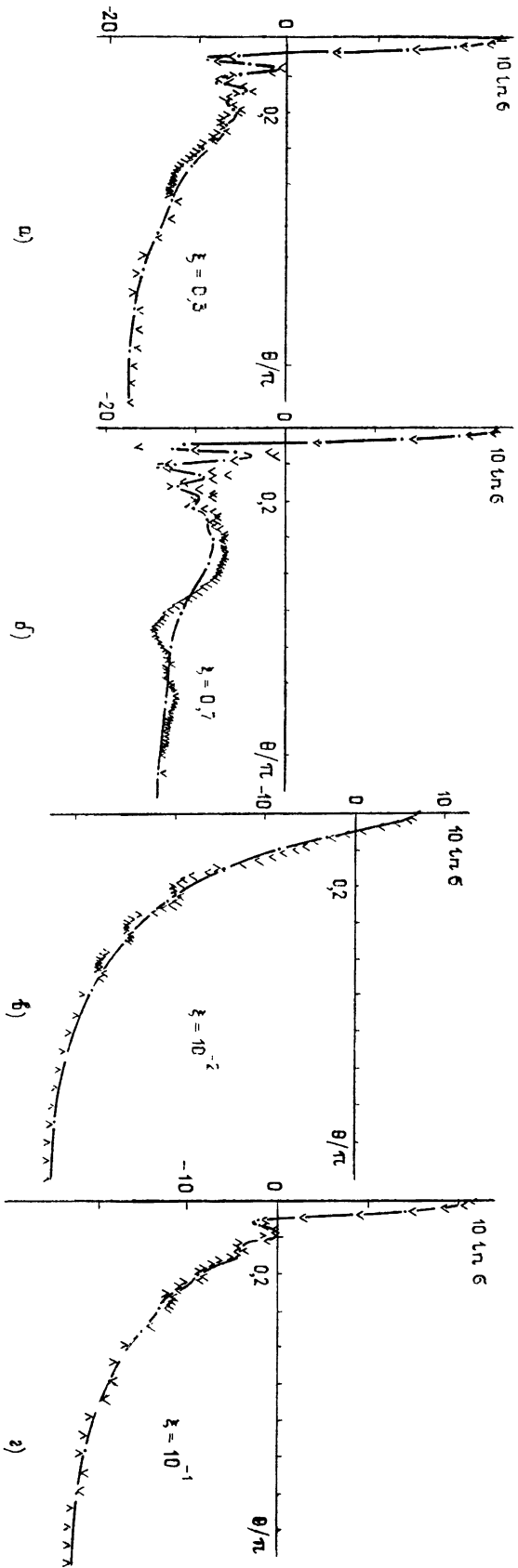


Рис. 2.

Сравнение вычислений по точным и приближенным формулам. Были проведены численные расчеты дифференциального сечения рассеяния $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$ для гиперболического профиля диэлектрической проницаемости по точной и приближенной формулам. Результаты вычислений для $k=20$ представлены на рис. 2, где штрихпунктирные кривые соответствуют точному, а галочки — приближенному решению. Как видно из графиков, приближенный метод дает довольно большую погрешность в области $\xi \rightarrow 1$. Причина этого понятна: при $\xi \rightarrow 1$ $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ и происходит слияние каустики и разрыва в полюсе. В этом случае теряет силу асимптотика Эйри, на основе которой построено решение.

Итак, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что область применимости описанного здесь алгоритма ограничена такими неоднородностями, у которых разрыв градиента диэлектрической проницаемости на границе сравнительно мал.

Авторы признательны Ю. А. Кравцову за критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифракции.— М.: Связь, 1978
- 2 Гугман А. Л.—Радиотехника и электроника, 1967, 12, № 10, с 1726
- 3 Кравцов Ю. А., Фейзуллин З. И.—Изв вузов—Радиофизика, 1969, 12, № 6, с 886.
- 4 Орлов Ю. И.—Труды МЭИ, 1972, вып 119, с 82.
- 5 Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. В кн. Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн—М.: Научный совет по акустике АН СССР, МРП, 1970, с. 141.
- 6 Мороз А. В., Фейзуллин З. И.—Труды РТИ, 1982, вып 44, с 161
- 7 Кравцов Ю. А.—Изв. вузов—Радиофизика, 1964, 7, № 4, с 664
- 8 Орлов Ю. И.—Изв вузов—Радиофизика, 1974, 17, № 7, с 1035.
- 9 Орлов Ю. И., Демин А. В.—Труды МЭИ, 1980, вып 497, с. 10.
- 10 Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред — М.: Наука, 1980.
- 11 Kriegsmann G A—J Math Phys., 1976, 17, № 1, p 112
- 12 Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн — М.: Сов. радио, 1970, с 459.
- 13 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров — М.: Наука, 1978, с 778

Поступила в редакцию
15 ноября 1982 г.

ON A POSSIBLE EXTENSION OF KIRCHHOFF'S APPROXIMATION IN PROBLEMS OF WAVE DIFFRACTION BY TRANSPARENT INHOMOGENEOUS OBJECTS

A. V. Moroz, Z. I. Feizulin

An approximate method of diffraction field description in the scalar problem of wave scattering by large (in wavelength scale) transparent inhomogeneous objects is treated in the illustrative case of radially inhomogeneous plasma cylinder. Differential scattering cross section is calculated by the approximate procedure for a special radial dependence of permittivity which allows on the exact solution. Comparison of the approximate results and the exact solution is given.