

УДК 517.93

## К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СТОХАСТИЧНОСТИ В ИНЕРЦИОННОМ АВТОГЕНЕРАТОРЕ

*В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Летчфорд, М. А. Сафонова*

Численными методами исследованы бифуркационные явления в трехмерной диссипативной системе в закритической области значений параметров. Оценено влияние гауссовых шумов на динамику системы. Детально проанализированы стохастические автоколебания при жесткой бифуркации. Результаты расчетов подтверждены физическим экспериментом на радиотехнической модели автогенератора.

**1. Введение.** В диссипативных системах со стохастическим поведением периодические траектории с изменением параметра претерпевают различные бифуркации, связанные с потерей ими устойчивости, которые могут явиться причиной возникновения стохастичности. Это явление типично для таких систем и не исключает возможности классификации стохастической динамики по типу потери устойчивости синхронными автоколебаниями [1].

В задаче о потере устойчивости периодическим движением важную роль играет величина мультипликаторов, которыми являются собственные числа линеаризации отображения Пуанкаре вблизи траектории. Потеря устойчивости происходит при обращении модуля мультипликатора в единицу, что возможно в трех различных случаях, положенных в основу классификации в работе [1]. С изменением управляющего параметра при достижении им некоторого критического значения один из мультипликаторов цикла выходит на единичную окружность, после чего имеет место либо мягкая потеря устойчивости — мультипликатор обращается в  $-1$ , рождается цикл удвоенного периода, либо жесткая — мультипликатор равен  $+1$ , система скачком переходит на далекий от исходного режим движения. Возможен третий случай: выход на единичный круг пары комплексно-сопряженных мультипликаторов с рождением вблизи исходного цикла инвариантного двумерного тора. Последовательность мягких бифуркаций приводит к развитию стохастичности по Фейгенбауму. Жесткие бифуркации могут приводить к так называемой перемежающейся стохастичности; разрушение двумерного тора с образованием странного аттрактора — модель рождения стохастичности по Рюэлю — Такецу [1-3].

В трехмерных диссипативных системах, характеризующихся относительно сильным сжатием во времени фазового объема и малой по сравнению с единицей величиной дробной части хаусдорфовой размерности аттрактора, отображение приближенно одномерное и реальны первые два механизма стохастичности: цепочка удвоений Фейгенбаума и перемежающийся хаос [4]. С ростом фрактальной размерности отображение становится существенно двумерным, что не исключает возможности выхода на единичную окружность пары комплексно-сопряженных мультипликаторов и развития в дальнейшем стохастичности по Рюэлю — Такецу [1, 2]. Вероятность последней ситуации возрастает в неавтономных и близких к консервативным трехмерных системах.

Есть основания полагать, что во многих диссипативных автостохастических системах в принципе возможна реализация всех трех типов бифуркаций и связанных с ними механизмов развития стохастичности. В настоящей работе это обсуждается на конкретном примере.

Методами численного моделирования исследуется динамика автостохастического инерционного генератора в отсутствие и при наличии естественных шумов. Уравнения моделирования имеют вид

$$\dot{x} = (m - z)x + y + \xi(\tau), \quad \dot{y} = -x + \xi(\tau), \quad \dot{z} = f(x) - gz + \xi(\tau), \quad (1)$$

где  $m$  и  $g$  — параметры системы,  $f(x)$  — нелинейная функция,  $\xi(\tau)$  — нормально распределенный  $\delta$ -коррелированный шум, удовлетворяющий условиям

$$\langle \xi(\tau) \rangle = 0, \quad \langle \xi(\tau) \xi(\tau') \rangle = D\delta(\tau - \tau'), \quad (2)$$

$D$  — интенсивность флуктуаций. Чисто динамическая стохастичность при определенных значениях параметров  $m$  и  $g$  следует из решения уравнений (1) при  $D = 0$ . Соответствующая этому случаю математическая модель и ее радиотехнический аналог подробно описаны в работах [5, 6], в которых основное внимание уделено исследованию предстохастического режима автоколебаний. В настоящей работе методами численного и физического моделирования исследуется динамика системы (1) главным образом в закритической области значений параметров, т. е. в области стохастических колебаний

**2. Численный анализ особенностей периодических траекторий системы.** Пространство параметров системы (1) в режиме автоколебаний ( $m > 0$ ) представляет собой положительный квадрант плоскости с координатами  $m > 0$ ,  $g > 0$ . Исследуем эволюцию основного предельного цикла системы  $\Gamma_1$  периода  $T_0 \approx 2\pi$ , который рождается устойчивым в результате бифуркаций Андронова—Хопфа на линии  $g = 0$ . Проследим за мультипликаторами цикла  $\Gamma_1$  при изменении параметра  $m$  для фиксированного  $g$  и, обнаружив типичные особенности (обращение модуля одного из мультипликаторов в единицу), произведем численное построение соответствующих бифуркационных линий на плоскости параметров [7]. Бифуркационные линии семейства циклов  $\Gamma_1$  представлены на рис. 1, где изображены три характерных кривых. На кривой  $l_{11}$ , которую в дальнейшем будем называть линией удвоения, мультипликатор  $\mu_1$  цикла  $\Gamma_1$  равен  $-1$ , что соответствует мягкой потере устойчивости через удвоение. На кривой  $l_{21}$  мультипликатор  $\mu_1 = +1$ , что соответствует слиянию устойчивого и неустойчивого циклов периода  $T_0$ , т. е. жесткой бифуркации. Подчеркивая это обстоятельство, кривую  $l_{21}$  будем называть линией кратности. На линии  $l_{31}$  произведение мультипликаторов  $\mu_1 \mu_2$  цикла  $\Gamma_1$  равно по модулю единице, и при малом возмущении вблизи этой линии возможна бифуркация рождения двумерного тора. В точках  $A$  и  $B$  рис. 1, в которых кривая  $l_{31}$  пересекает  $l_{11}$  и  $l_{21}$ , имеет место вырождение, соответствующее резонансам на торе  $1:2$  ( $A$ ) и  $1:1$  ( $B$ ) [8].

Пространство параметров системы (1) определяет функцию  $\mu_1(m, g)$ , задающую сложную трехмерную поверхность, характеризующую степень устойчивости периодического движения  $\Gamma_1$ . При проектировании трехмерной поверхности на плоскость параметров возможны особенности, которых в данном случае только две: складка и сборка Уитни [9]. С этой точки зрения, кривая  $l_{11}$  на рис. 1 — линия складки, кривая  $l_{21}$  — линия сборки Уитни, которые характеризуют два типа катастроф в гру-

\* Расчет первой ляпуновской величины  $L_1$  вдоль линии рождения цикла  $\Gamma_1$  подтвердил суперкритический характер бифуркации, т. е.  $L_1 < 0$  для любых значений  $g > 0$ .

бых двухпараметрических системах [9]. Важным является наличие сборки и ее характерного уголка вблизи точки  $Q$  (рис. 1), где сливаются и исчезают сразу три цикла периода  $T_0$ . Есть основания связывать наличие складки  $l_{11}$  с механизмом стохастичности Фейгенбаума, а наличие сборки  $l_{21}$  — с возникновением перемещающейся стохастичности.

Бифуркационные явления численно исследовались для циклов периода  $T \approx 2^n T_0$  ( $n=1, 2, 3$ ). Установлено, что для каждого отдельно взятого семейства циклов имеет место картина, подобная изображенной на рис. 1. При этом наблюдается следующее: для  $n=0$  имеется лишь одно семейство циклов  $\Gamma_1$ , для  $n=1$  (двухтактные циклы) обнаружено два независимых семейства циклов  $\Gamma_2$ , которые могут существовать при одних и тех же значениях параметров, но различных фазовых координатах. При  $n=2$  существует четыре самостоятельных семейства четырехтактных циклов. Видимо, число  $P$  независимых семейств циклов периода  $\approx 2^n T_0$  подчиняется соотношению  $P = 2^n$ . Мы остановимся на исследовании области, ограниченной бифуркационной линией удвоения одного из двух семейств двухтактных циклов. Соответствующие результаты расчетов представлены на рис. 2. Помимо описанных выше бифуркационных линий  $l_{12}$ ,  $l_{22}$  на рис. 2 дана линия критических параметров  $l_{кр}$ , соответствующая возникновению стохастичности через удвоения. В основу расчета  $l_{кр}$  положено свойство универсальности значения мультипликатора циклов  $2^n T_0$  в критической точке,  $\mu_{кр} = -1,5988\dots$  ( $-1,60112\dots$ ; численно) [10]. Отметим, что при подходе к  $l_{кр}$  по любому направлению плоскости параметров фиксируются бифуркации удвоения, а внутри области, включая границу  $l_{кр}$ , существует один из квазиаттракторов системы (1), который и изучается в настоящей работе.

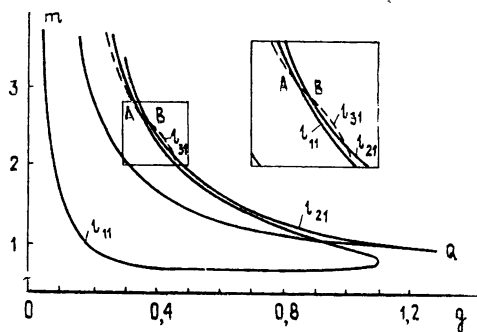


Рис. 1.

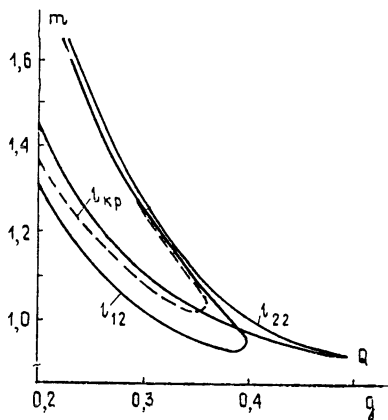


Рис. 2.

Зафиксировав  $g = 0,3$ , произведем расчет наибольшего из мультипликаторов  $\mu_1$  двухтактного цикла  $\Gamma_2$  в зависимости от параметра  $m$ . Результаты приведены на рис. 3, из которых следует, что кривая  $\mu_1(m)$  существенно неоднозначна и имеет вид петли с особенностями в бифуркационных точках  $B, D, F, C$  и  $E$ , характеризующими эволюцию периодической траектории  $\Gamma_2$  в рассматриваемом сечении. С увеличением параметра  $m$  в бифуркационной точке  $C$  ( $\mu_1 = +1$ ) рождаются устойчивый  $\Gamma_2'$  и неустойчивый  $\Gamma_2''$  двухтактные циклы. В точке  $F$  неустойчивый цикл  $\Gamma_2''$  сливается с устойчивым  $\Gamma_2$  и в результате жесткой бифурка-

\* Вдоль кривой  $\mu_1(m)$  период цикла непрерывно меняется, но топологическая структура движения остается неизменной

ции оба исчезают. Бифуркационная точка  $B$  характеризует мягкую потерю устойчивости циклом  $\Gamma_2$  через удвоение ( $\mu_1 = -1$ ), цикл  $\Gamma_2$  становится седловым. В точке  $D$  мультипликатор  $\mu_1$  цикла  $\Gamma_2$  вновь входит в единичный круг и цикл приобретает устойчивость. В области значений параметра  $m$  между точками  $C$  и  $F$  имеются три цикла периода  $T \approx 2T_0$ : устойчивый  $\Gamma_2'$  и неустойчивые  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_2''$ . Это справедливо для всей внутренней области, ограничиваемой линией кратности  $l_{22}$  (см. рис. 2). Точка  $E$  характеризует бифуркацию удвоения цикла  $\Gamma_2$ , и если проследить за зависимостью  $\mu_1(m)$  дальше по параметру  $m$ , то мы вновь получим аналогичную кривую (на рис. 3 не показанную), которая будет характеризовать второе семейство двухтактных циклов, исключаемое из рассмотрения в силу аналогии в характере особенностей.

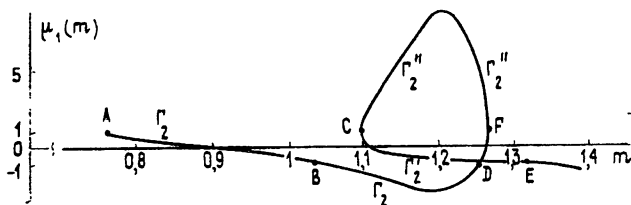


Рис 3. Зависимость мультипликатора двухтактного цикла  $\Gamma_2$  от параметра  $m$  для  $g = 0,3$ . Бифуркационные значения параметра  $m$  и координаты цикла  $\Gamma_2$  в секущей плоскости  $x = 0$

$B - m = 1,02454,$	$y = -0,749208,$	$z = 2,14088,$
$D - m = 1,25699,$	$y = -0,166312,$	$z = 0,721466,$
$F - m = 1,26302,$	$y = 0,150668,$	$z = 0,679594,$
$C - m = 1,10112,$	$y = 0,363858,$	$z = 0,403447,$
$E - m = 1,31902,$	$y = 0,849057,$	$z = 0,424323$

Из графика рис. 3 следует, что в области квазинатрактора одномерное отображение, которое приближенно описывает систему (1), должно содержать по крайней мере один минимум, так как отображение с одним максимумом типа параболы не имеет неподвижных точек с мультипликатором  $+1$  за исключением тривиального случая рождения цикла. Наличие жесткой бифуркации может приводить к перемежающейся стохастичности вне петли мультипликатора в окрестностях точек  $C$  и  $F$ . Вероятно, что при удалении по параметру  $m$  от точки  $F$  система скачком перейдет на устойчивый цикл  $\Gamma_2'$ . При уменьшении параметра  $m$  из точки  $C$ , ввиду отсутствия здесь устойчивых циклов этого семейства, возможен выход либо на странный аттрактор, либо на один из синхронных режимов. Эти предположения были проверены численным экспериментом.

**3. Численное моделирование стохастической динамики.** На рис. 4 (сплошная кривая 1) приведена зависимость среднего по аттрактору положительного ляпуновского показателя  $\lambda^+(m)$  в сечении  $g = 0,3$ , вычисленная в отсутствие шума в предположении  $f(x) = g1(x)x^2$ , где  $1(x)$  — единичная функция Хевисайда. Эта зависимость подтверждает наличие синхронных режимов в закритической области и аппроксимируется вблизи критической точки выражением (сплошная кривая 2 на рис. 4)

$$\lambda^+(m) = 0,181(m - m_{кр})^\gamma, \quad \gamma \simeq 0,45. \quad (3)$$

Результаты естественны, так как одномерное отображение здесь типа параболы [5, 11]. В силу свойств системы (1), степень сжатия фазового объема которой для  $m \leq 1,3$  в основном определяется величиной  $g$ , зависимость, аналогичной (3), характеризуется и фрактальной размерность  $d_f(m)$ :

$$d_f(m) = \frac{\lambda^+(m)}{|\lambda^-|} \approx \frac{\lambda^+(m)}{g}. \quad (4)$$

В области аттрактора  $d_f \leq 0,21$ , что делает возможным приближенное его описание с помощью одномерного отображения в исследуемой области, хотя форма отображения с ростом величины  $m$  меняется [11].

Динамика системы с приближением по параметру  $m$  к линии критических значений  $l_{кр}$  (рис. 2) снизу и сверху оказывается принципиально различной. При подходе снизу имеют место мягкие бифуркации удвоения и фейгенбаумовская стохастичность, обсуждавшаяся в работах [5, 6, 11] и подтверждаемая соотношением (3). При движении по параметру  $m$  в направлении  $l_{кр}$  сверху

цепочка бифуркаций удвоения может прерываться вследствие жестких бифуркаций, приводящих к скачкообразному переключению на один из синхронных или стохастический аттракторы в зависимости от взаиморасположения их областей притяжения в фазовом пространстве. Влияние бифуркации  $+1$  на динамику системы (1) было исследовано вблизи особых точек  $C$  и  $F$  рис. 3. В точке  $C$  при начальных условиях на цикле  $\Gamma_2'$  и в отсутствие шумов ( $D=0$ ) система интегрировалась на большом интервале времени  $0 < \tau < 1,4 \cdot 10^3$  и вычислялись  $d_f$ , функции распределения, автокорреляции, спектр мощности, а также точное отображение. При очень малом

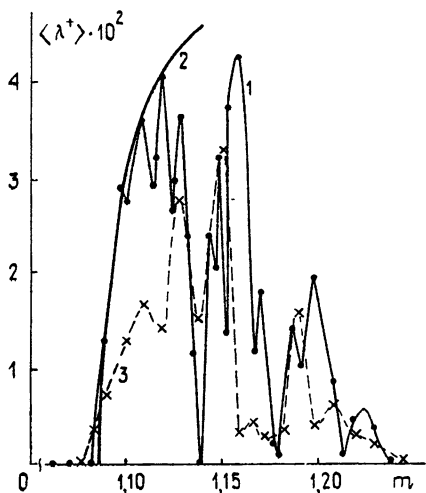


Рис. 4.

уменьшении параметра  $m$  от точки  $C$  ( $m_C = 1,10112\dots$ ) наблюдалась перемежающаяся стохастичность [1, 11], постепенно переходящая на аттрактор, обусловленный удвоениями. Результаты представлены на рис. 5.

Анализ временных реализаций показал, что наибольшая длительность ламинарной фазы (время, которое система проводит вблизи исходного цикла  $\Gamma_2'$ ) уменьшается с удалением от критической точки  $m_C$ , в то время как длительность турбулентных автоколебаний в среднем возрастает [3]. Из рис. 5 видно, что наиболее четко перемежающаяся стохастичность диагностируется по виду спектра. Исходные спектральные линии цикла  $\Gamma_2'$  постепенно уширяются, причем заметно сглаживаются пички-максимумы, чего не наблюдается при малых изменениях управляющего параметра для фейгенбаумовской стохастичности. В спектре появляются выбросы на частотах, кратных  $f_1$ , строго соответствующие заметно меньшему базовому периоду цикла  $\Gamma_2$ , на основе удвоений которого сформировался фейгенбаумовский аттрактор в критической точке  $m_{кр} = 1,08512$ . Дальнейшее уменьшение  $m$  приводит к исчезновению следов перемежасности в спектре, и при  $m = 1,0950$  система окончательно переходит в область притяжения фейгенбаумовского аттрактора [11].

Механизм уширения спектральных линий  $f_0$  цикла  $\Gamma_2'$  при удалении от критической точки исследован подробно. Расчет точечного отображения системы в секущей плоскости показал возможность приближенной одномерной аппроксимации  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ . Дважды примененное отображение  $\varphi[\varphi(x_n)]$  вблизи неподвижной точки  $x^*$ , соответствующей

моменту слияния циклов  $\Gamma_2'$  и  $\Gamma_2''$  рис. 3, качественно проиллюстрировано на рис. 6 для случаев меньшего ( $m = 1,1010$ , кривая 1) и большего ( $m = 1,1005$ , кривая 2) удаления от критической точки  $m_c = 1,10112$ . Как видно из рисунка, в случае 1 длительность ламинарной фазы больше и модуляция амплитуды цикла осуществляется медленнее во времени. С удалением от критической точки (кривая 2 рис. 6) длительность ламинарной фазы уменьшается, и при этом возрастают глубина и скорость модуляции амплитуды цикла. Этим и объясняется уширение спектральных линий  $f_0$  с уменьшением параметра  $m$  на рис. 5.

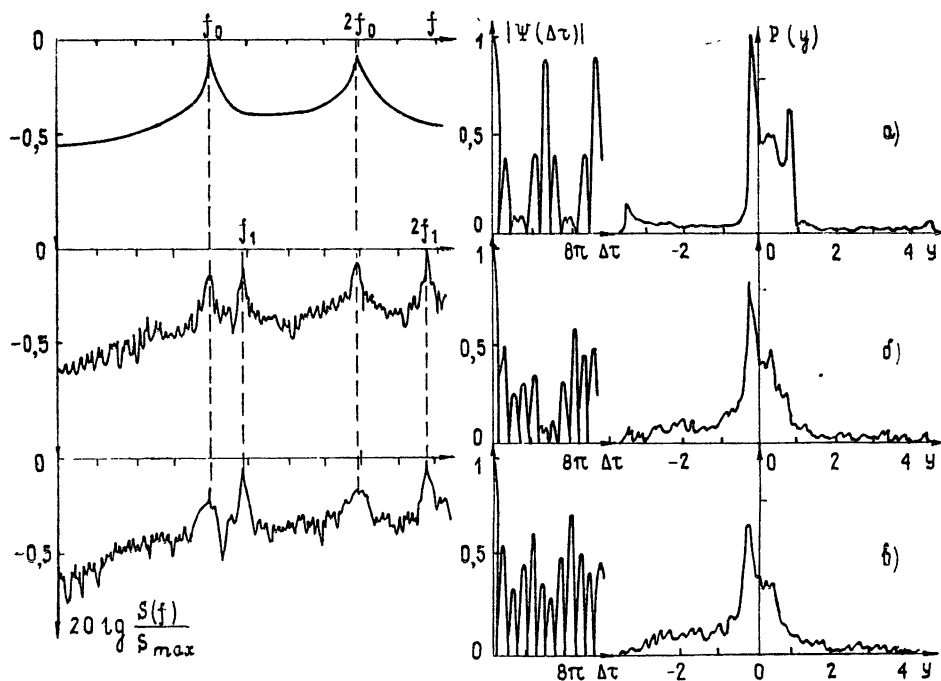


Рис 5. Спектр мощности  $S(f)$ , автокорреляционные функции  $|\psi(\Delta\tau)|$  и функции распределения реализации процесса  $y(\tau)$  вблизи касательной бифуркации  
а)  $m = m_c = 1,10112$ , б) 1,1010, в) 1,1005.

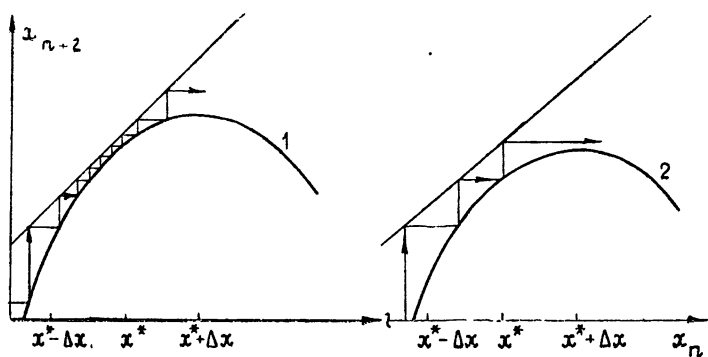


Рис. 6.

Вблизи точки  $F$  (рис 3) при малом увеличении параметра  $m$ , как показал анализ временных реализаций, фиксировалось переключение на устойчивый цикл  $\Gamma_2'$ . В результате переходного процесса в спектре

наблюдались линии  $f_0$  и  $f_1$  циклов  $\Gamma_2'$  и  $\Gamma_2''$ . Однако с увеличением времени интегрирования следы неустойчивого цикла исчезали, свидетельствуя о жестком переключении на устойчивый цикл  $\Gamma_2'$ .

Специальные исследования подтвердили, что появление двух рационально не связанных частот  $f_0$  и  $f_1$  в спектре перемежающейся стохастичности не есть результат рождения двумерного тора, а следствие переключения системы с одного аттрактора на другой.

**4. Влияние гауссовых шумов на динамику системы.** Исследования динамических явлений в системе (1) при наличии шумов показали, что с увеличением интенсивности флуктуаций  $D$  в пространстве параметров постепенно исчезают окна устойчивости многотактных циклов и при относительно больших шумах аттрактор в закритической зоне становится гиперболическим. Эта ситуация отражена на рис. 4 (пунктирная кривая 3) для  $D=10^{-2}$ . Подтверждается известный из теории факт снижения порога под воздействием шума и расширения по параметру области стохастической динамики.

Исследования влияния шума в режиме перемежающейся стохастичности показали, что реакция системы на шум характеризуется сложной нелинейной зависимостью от интенсивности  $D$  и смещения от критической точки касательной бифуркации.

Вблизи критического значения параметра в результате воздействия шума увеличивается длительность ламинарной фазы и уменьшается  $\lambda^+$ . При удалении от критической точки ситуация в целом противоположна: под воздействием шума в среднем увеличивается длительность турбулентных всплесков, что приводит к возрастанию  $\lambda^+$ . Данные расчетов  $\lambda^+(D)$  для двух характерных случаев представлены на рис. 7 (кривая 1 —  $m=1,1005$ , кривая 2 —  $m=1,1010$ ) и иллюстрируют сказанное выше. Отметим, что сложная немонотонная зависимость  $\lambda^+(D)$  (кривая 2) не есть результат ошибок счета, а свидетельство влияния касательных бифуркаций для циклов других семейств.

В частности, уменьшение  $\lambda^+$  при  $D=10^{-4}$  обусловлено увеличением длительности ламинарной фазы четырехтактного цикла, касательная бифуркация для которого здесь очень близка по параметру  $m$ .

Из соотношения для длительности ламинарной фазы [1, 3]

$$\tau_{л} = C(m_c - m)^{-1/2}$$

с учетом описанных результатов следует, что в зависимости от интенсивности шума и смещения по параметру  $m$  от  $m_c$  эффективное пороговое значение параметра может как увеличиваться, так и уменьшаться в отличие от однозначной ситуации при удвоениях.

**5. Результаты физического эксперимента.** Автоколебательные режимы в закритической зоне исследовались на радиотехнической модели инерционного генератора, который описывается уравнениями (1) [6]. Низкий уровень шума экспериментальной установки обеспечивал возможность наблюдения синхронных, стохастических и переходных режимов автоколебаний при изменении параметра возбуждения  $m$ .

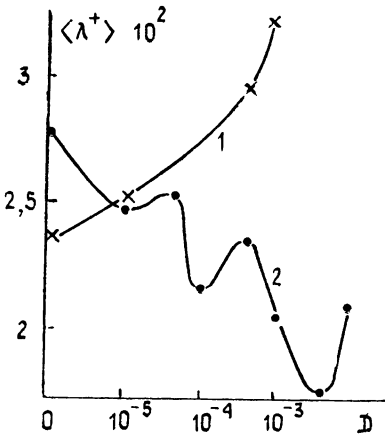


Рис. 7.

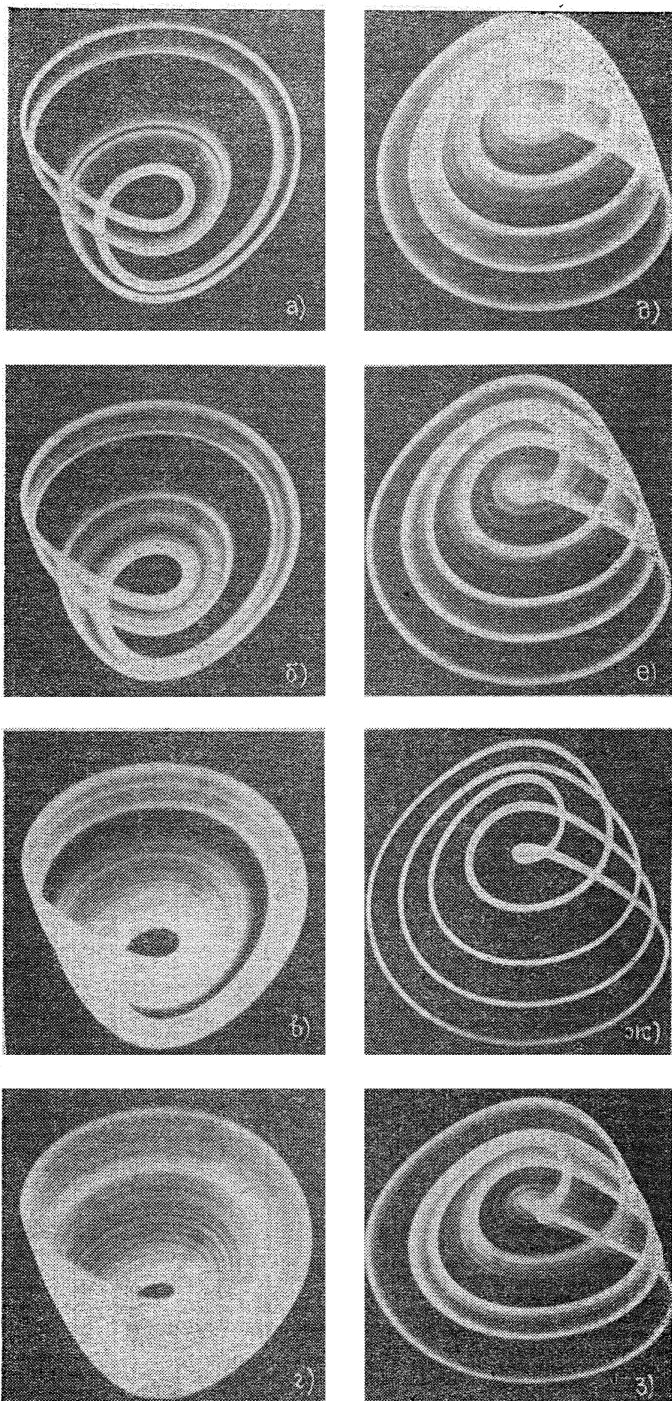


Рис. 8. Эволюция проекции фазовых траекторий на плоскость  $xy$  с ростом параметра  $m$  для фиксированного  $g = 0,3$  (физический эксперимент), а)  $m = 1,075$ , б)  $1,080$ , в)  $1,100$ , г)  $1,160$ , д)  $1,180$ , е)  $1,182$ , ж)  $1,185$ , з)  $1,210$ .



Рис. 8а—г иллюстрирует эволюцию  $x$ -,  $y$ -проекций фазовой траектории с изменением  $t$  в интервале  $1,08 \leq t \leq 1,16$ . С ростом  $t$  вначале зашумляются циклы больших периодов, растет глубина стохастической автомодуляции и в итоге формируется развитый аттрактор (рис. 8г). В указанной области изменения  $t$  гистерезис отсутствует. С увеличением  $t > 1,16$  в эксперименте чаще наблюдалась картина, изображенная на рис. 8д—з. Траектория попадала в область притяжения пятитактного цикла, и на фоне фейгенбаумовского аттрактора наблюдалась перемежающаяся стохастичность. С приближением

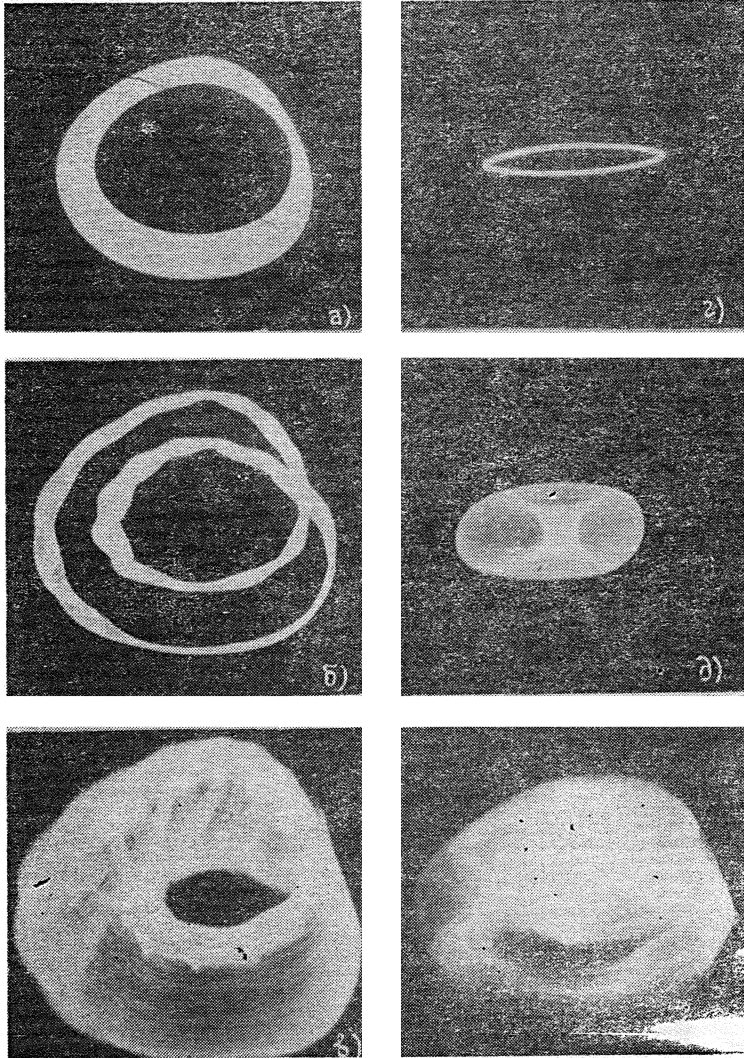


Рис. 9. Мягкие и жесткие бифуркации двумерного тора; а) устойчивый эргодический тор при внешней синхронизации генератора ( $m = 0,72$ ,  $g = 0,3$ ); б) удвоение тора при увеличении  $m$  до значения  $m = 1,0$ ; в) странный аттрактор как результат цепочки удвоений торов,  $m = 1,20$ ; г) цикл частоты внешнего сигнала,  $m = 1,3$ ; д) рождение двумерного тора при уменьшении интенсивности внешнего сигнала,  $m = 1,3$ ; е) разрушение тора при малом уменьшении параметра  $m$  и появлении странного аттрактора.

к критической точке касательной бифуркации длительность ламинарной фазы увеличивается, о чем свидетельствует последовательное увеличение относительной яркости цикла на рис. 8д—ж. Хорошо видно, как

ширина траектории пятитактного цикла с приближением к точке устойчивости постепенно уменьшается, подтверждая результаты расчетов спектра рис. 5. Дальнейшее увеличение  $m$  приводило к перескокам на циклы других семейств и на их базе регистрировалась перемежающаяся стохастичность (рис. 8з). Выход из аттрактора осуществлялся на устойчивый четырехтактный, а затем двухтактный циклы. Эксперименты со сменой направления движения по параметру  $m$  давали аналогичные рис. 8д — з результаты, отличающиеся лишь типом синхронного режима, на базе которого фиксировалась перемежаемость. При входе в зону аттрактора сверху по  $m$  наблюдалось только одно удвоение  $2T_0 \rightarrow 4T_0$ , а затем перемежающаяся стохастичность. Картина, аналогичная рис. 8а — г, при движении по  $m$  сверху не наблюдалась.

Приведенные экспериментальные данные хорошо согласуются с результатами численного счета рис. 2—5. Отсутствие гистерезисных явлений при движении по параметру  $m$  снизу объясняется тем, что область притяжения синхронных режимов здесь ниже уровня шумов схемы и аттрактор практически гиперболичен. С ростом  $m$  ширина окон устойчивости по параметру  $m$  многотактных циклов возрастает, что хорошо видно из рис. 4, и проявляются вышеописанные свойства жесткой бифуркации, включая гистерезис. Реализация синхронного режима в закритической области зависит от начальных условий и уровня шумов, которые в физическом эксперименте не контролировались. Этим, в частности, объясняется неожиданное, на первый взгляд, появление пятитактного цикла на рис. 8.

Проведенные эксперименты свидетельствуют о том, что в исследуемой системе перемежающаяся стохастичность всегда наблюдается на фоне фейгенбаумовского аттрактора. Механизм перемежаемости, видимо, реализуется только тогда, когда в фазовом пространстве вблизи синхронного режима имеется область странного аттрактора и бифуркация  $+1$  вызывает переключение, в процессе которого и проявляются специфические свойства перемежающейся стохастичности [3].

Возможность реализации устойчивого тороидального движения в автономной системе (1) при численных и физических экспериментах не установлена, хотя негрубые бифуркационные точки на плоскости параметров  $m$  и  $g$ , в которых пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит на единичную окружность, численно найдены. В физическом эксперименте двумерный тор легко реализовывался при подаче внешнего регулярного сигнала. Численный анализ неавтономной системы (1) это подтвердил. Интересным является тот факт, что если выбором амплитуды внешнего воздействия обеспечить устойчивость тороидального движения и в дальнейшем следить за его эволюцией при вариации параметров  $m$  и  $g$ , то наблюдается картина, аналогичная рассмотренной нами для циклов. При движении по параметру  $m$  снизу по направлению к линии критических значений параметров имеет место последовательность фейгенбаумовских удвоенных тора, приводящая в итоге к возникновению стохастических автоколебаний. При движении по  $m$  сверху фиксируются жесткие бифуркации, приводящие к разрушению двумерного тора без удвоений с выходом на странный аттрактор. Результаты экспериментов приведены на рис. 9 [12].

---

Приведенные исследования динамики системы (1), во многом аналогичные результаты, полученные нами при численном анализе системы Рёсслера [13], а также многочисленные литературные данные [1, 3—5, 11, 14, 15] свидетельствуют о том, что для квазигиперболических аттракторов с малой фрактальной размерностью за порогом критичности типичны мягкие и жесткие бифуркации периодических траекторий.

Бифуркация рождения устойчивого двумерного тора из цикла в неавтономных трехмерных системах, степень сжатия фазового объема в которых зависит от координат, видимо, не реализуется [15] и для существования эффекта требуется повышение размерности фазового пространства до  $N=4$  путем введения, например, внешнего регулярного воздействия. Анализ систем с прямой бифуркацией Андронова—Хопфа показывает, что типичным механизмом развития стохастичности здесь является механизм фейгенбаумовских удвоений, на фоне которого в закритической зоне проявляются перемежающие свойства жестких бифуркаций.

Пользуемся возможностью поблагодарить А. И. Хибника за предоставление оригинальных программ и помощь в проведении расчетов на ЭВМ и М. И. Рабиновича за обсуждения рассматриваемых проблем и ряд полезных замечаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Eckman J—P.—Rev. Mod. Phys., 1981, 53, part. I, № 4, p. 643
2. Рюэль Д., Такенс Ф—В кн. Странные аттракторы /Ред. Я. Г. Синай, Л. П. Шильников.—М: Мир, 1981, с. 117
3. Manneville P, Pomeau Y.—Physica, 1980, 1D, p. 219
4. Izrailev F. M., Rabinovich M. I, Ugodnikov A. D—Phys. Lett., 1981, A86, № 6—7, p. 321.
5. Анищенко В С., Астахов В В, Летчфорд Т. Е.—Радиотехника и электроника, 1982, 27, № 10, с 1972
6. Анищенко В С, Астахов В В, Летчфорд Т. Е.—ЖТФ, 1983, 53, № 1, с 152.
7. Хибник А. И Периодические решения систем дифференциальных уравнений. Алгоритмы и программы на фортране.—Пушчино: ОНТИ, Научный центр биологических исследований, 1979, вып 5.
8. Арнольд В И Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1978
9. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.—М.: Мир, 1980.
10. Gaizel T., Nierwetberg J, Keller J—Phys. Lett., 1981, A86, № 2, p 75
11. Анищенко В С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е., Сафонова М. А.—Изв. вузов—Радиофизика, 1983, 26, № 2, с. 169
12. Анищенко В С. Тезисы докладов III Всесоюзной конференции «Флуктуационные явления в физических системах»—Вильнюс, 1982, с. 17.
13. Rössler O. E — Rhys Lett, 1976, 57A, № 5, p. 397.
14. Helleman R. H. G. — Fundam. Probl. Statist Mech, 5 Proc, 5-th Int Summer Sch., Enschede, June 23—Jule 5, 1980, Amsterdam e a, 1980, p 165.
15. Ott E—Rev. Mod Phys., 1981, 53, part I, № 4, p 655

Саратовский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
5 июля 1982 г

#### ON THE STRUCTURE OF QUASI-HYPERBOLIC STOCHASTICITY IN THE INERTIAL AUTOGENERATOR

*V. S. Anishchenko, V. V. Astachov, I. E. Letchford, M. A. Safonova*

The bifurcation phenomena in the three-dimensional dissipative system were investigated by the numerical methods for the supercritical region of parameter's values. The Gauss noise influence on the system dynamics was evaluated. The stochastic auto-oscillation for the rigid bifurcation were analysed in detail. The results of calculations were confirmed by the physical experiment using the radiotechnical model of autogenerator