

УДК 538.577.2

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ «ЧЕРЕНКОВСКОГО» ИЗЛУЧЕНИЯ СОЛИТОНОВ В ДВУМЕРНЫХ LC -РЕШЕТКАХ

Ю. А. Степанянц

Представлены результаты экспериментального исследования «чертенковского» излучения солитонов, распространяющихся в одномерной линии передачи, связанной электрически с двумерной LC -решеткой. Показана возможность моделирования корабельных поверхностных и внутренних волн с помощью такой системы. Рассмотрены кинематические характеристики излучаемых волн, исследовано волновое поле в ближней зоне источника. Дано сравнение теоретических результатов с экспериментальными.

1. Хорошо известно, что если в какой-либо среде, обладающей спектром собственных колебаний, движется материальный объект, скорость которого превышает фазовую скорость волн в данной среде, то за ним возникают волновые возмущения, заключенные в определенном диапазоне углов (конусе Маха) [1, 5, 6]. В электродинамике такое излучение называют черенковским. В гидродинамике это явление тоже хорошо известно и легко наблюдается на поверхности воды при движении моторных лодок или кораблей. Подобного рода «корабельные» волны могут возникать в атмосфере и в океане (внутренние волны), обусловленные движущимися возмущениями атмосферного давления, вихрями, смерчами и т. п. Расчет таких волн обычно проводится в линейном приближении, причем возмущающий фактор заменяется соответствующей системой перемещающихся источников и стоков [1]. Волновое поле в этом приближении может быть выражено в квадратурах, и вся трудность решения задачи заключается в вычислении возникающих интегралов. Как правило, такие интегралы в элементарных функциях не выражаются, и поэтому приходится применять численные или асимптотические методы (например, метод стационарной фазы, дающий картину волнового поля вдали от источника). Трудными для теории остаются вопросы корректного сопоставления применяемой в ней системы источников и стоков с реальными возмущениями, вычисления волнового поля в ближней и переходной зонах, влияние нелинейности, которая может приводить к формированию солитонов [2] и т. д. В настоящее время эти вопросы изучены еще весьма мало.

Экспериментальное исследование корабельных волн связано с рядом трудностей, обусловленных необходимостью иметь волновой лоток больших размеров, относительно слабой нелинейностью, проявляющейся на больших расстояниях от источника, сложностью регистрации и т. д. В этой связи представляет интерес электрическое моделирование корабельных волн с помощью двумерных LC -решеток, в которых легко могут быть достигнуты существенно нелинейные сигналы на небольших расстояниях от источника и довольно просто осуществляется регистрация волновых процессов. Такие эксперименты и описаны ниже. Как будет показано, между уравнениями гидродинамики и уравнениями решетки в линейном длинноволновом приближении удается устано-

вить полную аналогию, что и позволяет моделировать образование корабельных волн. При учете нелинейности и дисперсии полной аналогии установить уже не удается, однако качественные черты волнового процесса остаются сходными, что позволяет при помощи модели лучше понять физику процесса.

В экспериментах в качестве движущегося объекта использовался солитон, бегущий вдоль одномерной нелинейной цепочки, электрически связанной с двумерной решеткой. Отметим, что подобного рода задача о черенковском излучении солитонов представляет самостоятельный интерес. Так, например, в замагниченной плазме могут существовать двух- и трехмерные локализованные солитоны [9], распространение которых может вызывать излучение других типов плазменных волн.

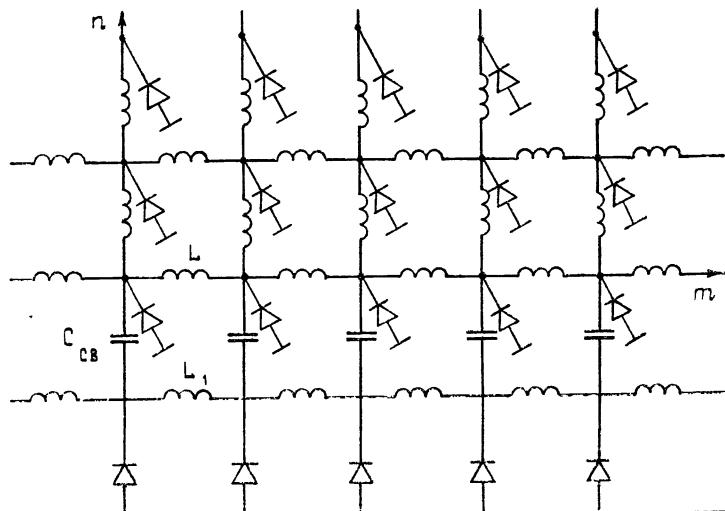


Рис. 1. Схема двумерной электрической решетки, используемой в эксперименте

2. Моделирование корабельных волн проводилось с помощью двумерной LC -решетки, схема которой приведена на рис. 1. Вдоль одной из сторон решетка была соединена с одномерной LC -цепочкой через емкости связи $C_{cb} \ll C_0, C_1$ (C_0, C_1 — начальные емкости диодов решетки и цепочки соответственно). Из уравнений Кирхгофа для такой сидящее дисперсионное уравнение:

$$L \frac{d^2 Q_{m,n}}{dt^2} - (\Delta_m u_{m,n} + \Delta_n u_{m,n}) = LC_{cb} \frac{d^2}{dt^2} (U_n - u_{m,n}) \delta_{m,1}, \quad (1)$$

где $Q_{m,n}$ — заряд на емкости в узле решетки с координатами (m, n) , его зависимость от напряжения $u_{m,n}$ выражается формулой $Q_{m,n} = -C_0 u_{m,n} + \alpha u_{m,n}^2$, U_n — напряжение на m -м звене в одномерной цепочке, $\delta_{m,1}$ — символ Кронекера, разностный оператор Δ_m определяется следующим образом: $\Delta_m u_{m,n} = u_{m-1,n} - 2u_{m,n} + u_{m+1,n}$. В линейном приближении, пренебрегая в (1) правой частью, можно получить следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = 4V_0^2 (\sin^2(k_m/2) + \sin^2(k_n/2)), \quad (2)$$

где $V_0^2 = (LC_0)^{-1}$, k_m, k_n — проекции волнового вектора на соответствующие оси решетки. Рассматриваемая решетка уже применялась для моделирования волновых процессов в сплошных средах. Ее нелинейные и дисперсионные свойства подробно изучались в работах [3, 4]. Одним из основных свойств решетки, отличающих ее от сплошной среды, является анизотропия.

На рис. 2а приведена фазовая поляра: зависимость фазовой скорости от угла между волновым вектором и осями решетки. Как следует из (2), при малых k_m, k_n анизотропия несущественна: $\omega^2 \simeq 4V_0^2 \times (\kappa_m^2/4 + \kappa_n^2/4) = V_0^2 k^2$. На рис. 2а видно, что фазовая поляра мало отличается от окружности даже при $k=\pi/2$.

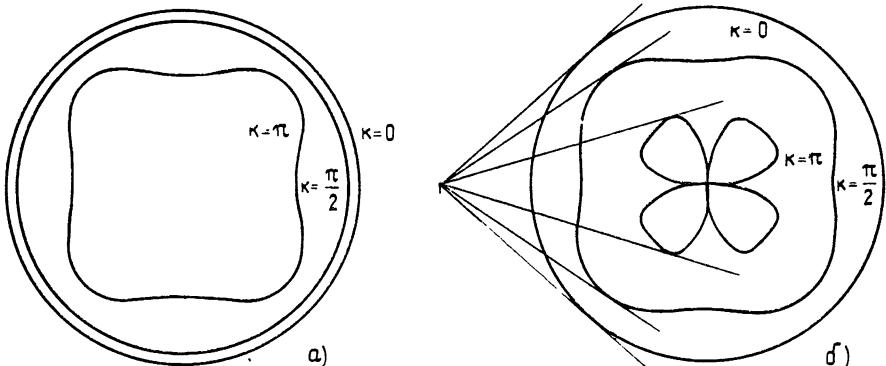


Рис. 2 Зависимость фазовой (а) и групповой (б) скоростей от угла между волновым вектором и осями решетки в полярных координатах.

Для линейных возмущений в длинноволновом приближении с учетом $\epsilon = C_{\text{св}}/C_0 \ll 1$ уравнение (1) переходит в обычное волновое уравнение с правой частью

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - V_0^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right) = \epsilon \frac{\partial^2 U(n, t)}{\partial t^2} \delta(m). \quad (3)$$

Пусть вдоль одномерной цепочки, параметры которой выбраны так, чтобы $V_{\text{ц}} = 1/\sqrt{L_1 C_1} > V_0$, распространяется единственный импульс. Этот импульс играет роль движущегося источника напряжения для двумерной решетки, так как в соответствующие узлы через емкости связи $C_{\text{св}}$ будет передаваться часть сигнала из цепочки. Рассмотрим фазовую картину волн, возникающую при движении такого источника. Существует простой способ, позволяющий наглядно представить геометрию излучаемых волн в диспергирующей среде [5]. Для этого нужно на графике групповой поляры (зависимость групповой скорости от угла между направлением распространения и осями решетки при фиксированном k) отложить вектор скорости источника. Тогда касательные, проведенные из конца этого вектора к кривым групповой поляры, образуют конус излучаемых волн (рис. 2б). Аналитически фазовую картину волн можно рассчитать, используя условие черенковского резонанса [5]:

$$\sin^2 h_m + \sin^2 h_n = F_r^2 h_m^2, \quad (4)$$

где $h_{m, n} = k_{m, n}/2$, а $F_r = V_{\text{ц}}/V_0$ — «число Фруда». Это условие в длинноволновом приближении ($h_{m, n} \ll 1$) принимает следующий вид:

$$h^2 - (0,5 - 0,25 \sin^2 2\varphi) h^4 \simeq F_r^2 h_n^2, \quad h^2 = h_m^2 + h_n^2, \quad (5)$$

где φ — угол между вектором \mathbf{h} и, например, осью m решетки.

Изучим волновое поле в решетке. Из уравнения (4) находим, что область изменения проекции волнового числа h_m ограничена условием

$$0 \leq F_r^2 h_m^2 - \sin^2 h_m \leq 1. \quad (6)$$

На рис. 3 показана область изменения h_m в зависимости от F_r . Зависимость h_n от h_m , которая следует из (4), показана на рис. 4. Для сравнения здесь же приведена аналогичная зависимость для поверхностных волн на воде при $F_r=2,55$. Как видно из рисунка, имеется не только качественное, но и удовлетворительное количественное совпадение между этими двумя кривыми. Чтобы найти угол, под которым излучается волна с заданными значениями k_m , k_n , вычислим производную $dh_m/dh_n = \operatorname{ctg} \theta$. Используя (4), получим

$$\theta = \operatorname{argctg} [(2F_r^2 h_n - \sin 2h_n) \sin^{-2} 2h_m]. \quad (7)$$

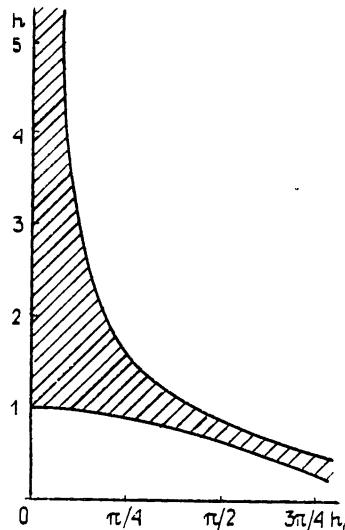


Рис. 3.

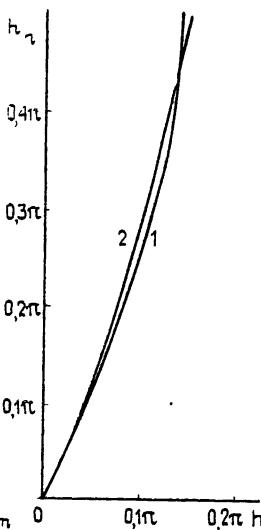


Рис. 4.

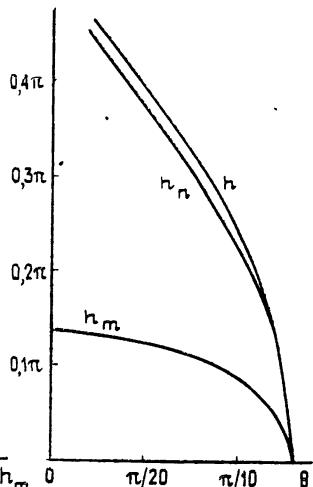


Рис. 5.

Рис. 3 Зависимость области возможных значений h_m от «числа Фруда»

Рис. 4 Зависимость между компонентами волнового вектора в электрической решетке (1), определяемая формулой (4), и аналогичная зависимость для поверхностных волн на воде (2).

Рис. 5 Зависимости компонент волнового вектора h_m , h_n и волнового числа h от угла между фронтом волны и осью движения источника

Величины h_m , h_n и θ связаны двумя уравнениями — (4) и (7). Считая одну из них независимой (удобно за независимую величину принять угол θ), две других можно выразить как функции от нее. На рис. 5 представлен график зависимостей h_m , h_n и h от θ для значения $F_r=2,55$, имевшего место в эксперименте. Как видно из графика, угол θ не может превышать при заданном значении F_r некоторого максимального значения. Это максимальное значение угла и определяет конус Маха, вне которого возмущения отсутствуют. Зависимость θ_{\max} от F_r при $F_r > 1$ имеет в точности такой же вид, как и для поверхностных и внутренних волн в жидкости:

$$\theta_{\max} = \operatorname{arcctg} \sqrt{F_r^2 - 1}. \quad (8)$$

График этой зависимости приведен на рис. 6. Отметим также, что вдоль любого угла внутри конуса Маха компоненты волнового числа h_n , h_m (а следовательно, h и ω) фиксированы. При этом значению θ_{\max} соответствуют $h_m=0$, $h_n=\pi l$, где $l=0, 1, 2, \dots$, а значению $\theta=0$ соответствуют $h_m=h_0$, $h_n=(\pi/2)+\pi l$, где h_0 — максимальное значение проекции h_m при заданном F_r (см. рис. 3).

3. Обсудим теперь связь полученных формул с соответствующими формулами для волн в жидкости. Структура волнового поля за движущимся телом в стратифицированной жидкости хорошо известна и описана, например, в [6]. Как следует из результатов п. 2, физическая картина явления, возникающего в электрической решетке, имеет много общего с тем, что наблюдается в жидкости при движении тела [6]. При этом, хотя формальная аналогия между точными уравнениями гидродинамики и уравнениями решетки отсутствует, можно найти эту аналогию между приближенными уравнениями для длинных волн, в которых, как известно, содержится большая часть излучаемой энергии. Ниже приведены точные дисперсионные зависимости [7]

для волн на поверхности жидкости

$$\omega = \sqrt{gk \operatorname{th} kh}, \quad (9)$$

для внутренних волн в океане с постоянной частотой Вяйсяля N

$$\omega = Nk[k^2 + (n\pi/H)^2]^{-1/2}, \quad (10)$$

где H — глубина океана, n — номер моды,

для внутренних волн в тонком термоклине

$$\omega = \sqrt{(\delta\rho/\rho)gk[\operatorname{cth} kh + \operatorname{cth} k(D-H)]^{-1}}, \quad (11)$$

где D — полная глубина океана, а H — глубина залегания термоклина. Как видно из сравнения с (2), все эти функции имеют одинаковый начальный участок при $k \rightarrow 0$. В этой области дисперсионные кривые для волн в жидкости, так же как и для волн в решетке, описываются формулой вида

$$\omega \simeq Vk - \beta k^3, \quad (12)$$

где коэффициенты V (скорость длинных волн) и β (дисперсионный параметр) для каждого типа волн свои.

Установим конкретную аналогию между уравнением (3), описывающим волны в электрической решетке, и полученным в [8] уравнением для внутренних волн в океане конечной глубины с постоянной частотой Вяйсяля при возбуждении одной моды:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - \frac{N^2}{k_{\parallel}^2} \Delta_{\perp} P = \frac{N^2}{k_{\parallel}^2} \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (13)$$

где P — возмущение давления, $q = R(d\delta(x)/dx)\delta(y)$, $\Delta_{\perp} = (\partial^2/\partial x^2) + (\partial^2/\partial y^2)$, R — дипольный момент, k_{\parallel} — проекция волнового числа по z , определяемая номером моды.

Для движущегося тела в правой части (13) можно заменить $\partial/\partial t = V_t(\partial/\partial x)$, где V_t — скорость тела. Сравнивая (3) и (13), видим, что эти уравнения переходят одно в другое с помощью замены:

$$u \rightarrow P, \quad V_0^2 \rightarrow \frac{N^2}{k_{\parallel}^2}, \quad \epsilon U \rightarrow \frac{N^2}{k_{\parallel}^2} \frac{R}{V_t}. \quad (14)$$

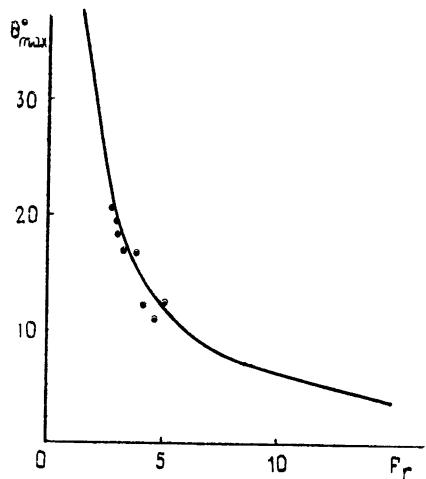


Рис. 6. Зависимость максимального угла полурасщепления конуса излучаемых волн от «числа Фруда»

Таким образом, для длинных волн на поверхности жидкости и внутренних волн в океане конечной глубины можно установить точную аналогию с волнами в линии передачи и использовать результаты электромоделирования для анализа возмущений за движущимся телом.

4. Экспериментально картина излучения волн движущимся источником изучалась на электрической решетке, схема которой изображена на рис. 1. Всего решетка содержала 20×30 звеньев. Вдоль одной стороны решетки, содержащей 30 звеньев, через небольшие емкости связи ($C_{\text{св}}/C_0 = 0,1$) к каждому звену подсоединялась одномерная цепочка LC -звеньев, выполненных по типу фильтра нижних частот. В качестве нелинейных емкостей использовались параметрические диоды КВ-105Б (в одномерной цепочке) и Д-814А (в двумерной решетке). Одномерная цепочка состояла из 40 звеньев, 30 из которых были подключены к большей стороне прямоугольной двумерной решетки. Вдоль остальных трех сторон прямоугольной решетки к каждому звену присоединялось согласующее сопротивление, так что отражение от этих границ практически отсутствовало. Параметры решетки ($L = 40 \text{ мкГн}$, $C_0 = 690 \text{ пФ}$) и цепочки ($L_1 = 2,6 \text{ мкГн}$, $C_1 = 1630 \text{ пФ}$) подбирались с таким расчетом, чтобы скорость длинных волн в цепочке $V_{\text{ц}} = 1/\sqrt{L_1 C_1}$ превышала скорость длинных волн в решетке $V_0 = 1/\sqrt{LC_0}$

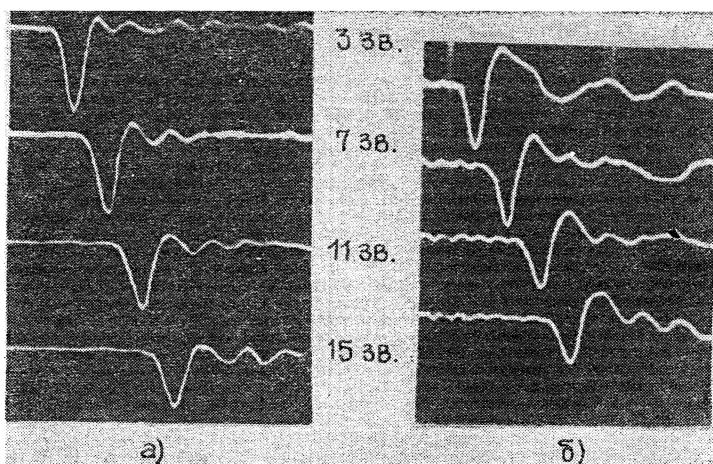


Рис. 7 Изменение амплитуды солитона при движении вдоль одномерной линии передачи (а) и сигнал, возбуждаемый на ближайших звеньях двумерной решетки (б)

Практически отношение этих скоростей составляло 2,55. Последнее звено одномерной цепочки также было нагружено на согласующее сопротивление. В цепочку от генератора прямоугольных импульсов Г5-15 подавались сигналы с частотой следования 1 кГц. Как известно [9], в такой нелинейной цепочке могут существовать уединенные стационарные импульсы — солитоны. В нашем случае десяти первых звеньев цепочки вполне хватало для формирования одного солитона из входного прямоугольного импульса. Этот солитон, распространяясь вдоль цепочки, часть энергии отдавал через емкости связи $C_{\text{св}}$ в двумерную решетку и таким образом служил движущимся источником, скорость которого была выше скорости собственных волн в решетке и могла меняться путем изменения амплитуды солитона (скорость солитона пропорциональна его амплитуде). Волновые процессы в двумерной решетке наблюдались на экране многолучевых осциллографов (С1-17, С1-33) после подключения сигналов с определенных звеньев к соответ-

ствующим лучам. На рис. 7 показано, как меняется амплитуда солитона при движении вдоль цепочки (а) и соответствующий сигнал, наводимый в двумерной решетке (б). Отыскивая в двумерной системе точки, в которые максимум сигнала приходит в одно и то же время, можно было найти фронт излучаемой волны (рис. 8) и тем самым определить черенковский угол излучения.

Проведенные измерения дали хорошее совпадение экспериментальных данных с теоретическими, изложенными в п. 2. На рис. 6 точками показаны экспериментальные значения угла Q_{\max} в зависимости от «числа Фруда».

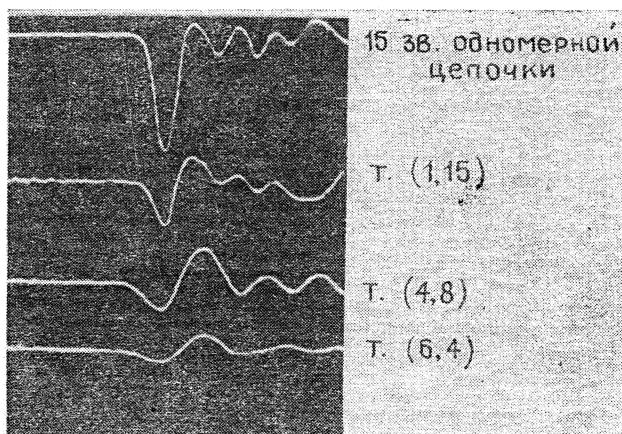


Рис. 8 Осциллограммы напряжений в различных точках решетки (их координаты указаны в скобках), соответствующих волновому фронту.

Если проследить за изменением m -й компоненты волнового числа со временем в некоторой точке решетки, то картина будет следующей. До прихода в рассматриваемую точку волнового фронта значение h_m будет равным нулю. Затем после прихода волнового фронта угол между направлением движения источника и направлением от источника на данную точку будет уменьшаться со временем и стремиться к нулю, следовательно, будет изменяться также и величина проекции h_m , стремясь к значению h_0 . Из сравнения формул (1) и (4) видно, что частота в данной точке также будет изменяться со временем:

$$\omega(t) = (U/\pi) h_m [\theta(t)]. \quad (15)$$

При этом длина волны изменяется по закону

$$\lambda = \frac{U}{f(t)} = \frac{\pi}{h_m [\operatorname{arctg}(y/Ut)]}. \quad (16)$$

Измеряя на экране осциллографа длительности отдельных цугов колебаний напряжения и задержку их максимумов относительно первого, можно было экспериментально измерить зависимость $\lambda(t)$.

На рис. 9 представлены теоретическая и экспериментальная зависимости $\lambda(t)$. Следует, однако, иметь в виду, что теоретические формулы, описывающие параметры внутренних волн, имеются только для достаточно больших расстояний от источника [8], в нашем случае при $n \gg 16$ звеньев. Измерения же проводились на расстояниях n до 30 звеньев, где известные в литературе асимптотические формулы не применимы. Таким образом, в электрической модели удается проследить

за картиной формирования волнового поля в ближней зоне источника. Особенно нагляден в этом отношении рис. 10, где изображена зависимость амплитуд максимумов в цуге от времени задержки. Как видно из рисунка, амплитуда первого импульса не максимальна, в то время как в дальней зоне максимальна всегда первая волна. Вблизи источника наиболее интенсивным является второй максимум, однако с увеличением расстояния происходит выравнивание амплитуд первых двух максимумов, и в дальнейшем амплитуда первого максимума становится наибольшей (эта тенденция видна на рис. 8).

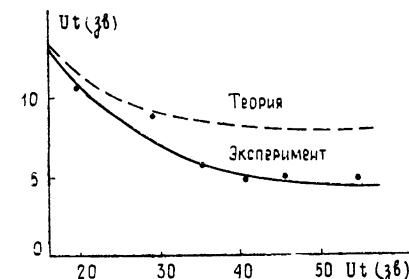


Рис. 9.

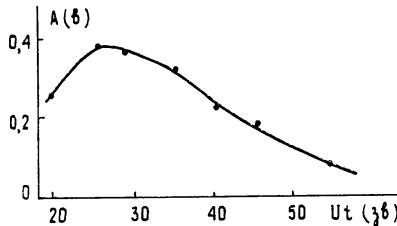


Рис. 10.

Рис. 9 Сравнение теоретической и экспериментальной зависимостей характерного периода волны в фиксированной точке от времени.

Рис. 10 Зависимость амплитуд максимумов волны в цуге от времени.

Таким образом, с помощью нелинейных электрических решеток удается исследовать черенковское излучение солитонов, которое может иметь место в плазме, и использовать полученные результаты для моделирования корабельных волн в жидкости.

Автор благодарен Л. А. Островскому и Е. Н. Пелиновскому за постановку задачи, интерес к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

- Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости — М.: Наука, 1977.
- Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах — М.: Наука, 1973.
- Островский Л. А., Папко В. В., Степанянц Ю. А. — ЖЭТФ, 1980, 78, № 2, с. 831.
- Stepaniants Yu A — Wave motion, 1981, 3, p 335.
- Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме — М.: Наука, 1976.
- Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны — М.: Мир, 1977.
- Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана — Л: Гидрометеоиздат, 1980.
- Докучаев В. П., Долина И. С. — Изв АИ Ц СССР Сер Физика атмосферы и океана, 1977, 13, № 6, с. 655.
- Зачаров В. Е., Кузнецов Е. А. — ЖЭТФ, 1974, 66, № 2, с. 594.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
6 сентября 1982 г

EXPERIMENTAL STUDY OF THE «CHERENKOV» RADIATION OF SOLITONS IN TWO-DIMENSIONAL LC-LATTICES

Yu. A. Stepaniants

Results of the experimental investigation of the «Cherenkov» radiation of a soliton propagating in a one-dimensional transmission line electrically connected with a two-dimensional LC-lattice are presented. The possibility of ship-wave modelling (both surface and internal) with the help of such a system is shown. Kinematic characteristics of the radiated waves are considered, the wave field near the source is investigated. Comparison of the theoretical and experimental results is given.