ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 7 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 538.561

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ОГИБАЮЩЕЙ ИМПУЛЬСА С ЗАПОЛНЕНИЕМ В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

В. В. Борисов

Построено точное решение задачи о поведении в бесстолкновительной плазме электромагнитного импульса, заданного в начальный момент. Найдены переходной процесс и последующий установившийся режим Рассмотрены, в частности, импульсы конечной длительности, а также сигналы с частотой заполнения, равной частоте плазменных колебаний Показано, что переход к переменным системы отсчета, движущейся с групповой скоростью, упрощает анализ решения.

1. Решения некоторых задач распространения импульсных сигналов в диспергирующей среде сводятся к функциям Ломмеля двух переменных $U_n(w, z)$, $V_n(w, z)$ и в этом случае включают как переходной процесс, так и последующий установившийся режим. Первый из известных результатов — решение предельной задачи в теории передающих линий [1, 2] — практически сразу был перенесен на решение волноводной задачи — возбуждение волновода плоским источником [3]. Распространение электромагнитных сигналов в бесстолкновительной плазме (предельная задача) рассмотрено в работе [4]. Здесь для описания переходного процесса из точного выражения получена асимптотическая формула для огибающей. Позднее к функциям Ломмеля двух переменных были сведены решения задачи об отражении (преломлении) сигнала от полупространства, занятого ионизованным газом [5, 6], об излучении электрического диполя в бесстолкновительной плазме [7] и т. д.

В настоящей работе рассмотрим изменение огибающей волнового пакета при распространении в бесстолкновительной плазме. Полагаем, что в начальный момент времени задано пространственное распределение поля. При этом в отличие от [3–7] формулами работ [1, 2] непосредственно воспользоваться нельзя и представление конечного результата через функции Ломмеля самостоятельная задача. Покажем, что переход к переменным системы отсчета, движущейся с групповой скоростью, упрощает решение и, тем самым, анализ структуры поля. Оценим время существования пакета.

2. Электромагнитный сигнал распространяется в положительном направлении оси x. Задача линейная, столкновения не учитываем, ионы неподвижны. Тогда поперечная составляющая вектора напряженности электрического поля удовлетворяет уравнению

$$(\partial^2/\partial x^2) E(x, \tau) - (\partial^2/\partial \tau^2) E(x, \tau) - (\omega_0^2/c^2) E(x, \tau) = 0. \qquad (1)$$

Здесь $\tau = ct$, c — скорость света, частота плазменных колебаний ω_0 не зависит от координат и времени, система единиц Гаусса $\varepsilon = \mu = 1$.

В момент $\tau = 0$ огибающая волнового пакета — единичная функция Хэвисайда $h(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$. Частота ω, волновое число $k = (1/c)\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}$, $\omega > \omega_0$. Начальные условия:

$$E(x, 0+) = h(-x)\sin\left(-\frac{x}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right),$$
$$\left.\frac{\partial E(x,\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=0+} = h(-x)\cos\left(\frac{x}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right). \qquad (2)$$

Функция Римана уравнения (1) $R = J_0[(\omega_0/c)\sqrt{(\tau-\tau')^2-(x-x')^2}]$ и, согласно общим формулам [8], решение задачи (1), (2)

$$E(x,\tau) = \frac{1}{2}\left[-h(-\tau-x)\sin\left(\frac{\tau+x}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)+\right.$$
$$\left.+h(\tau-x)\sin\left(\frac{\tau-x}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right] + \frac{\omega_0\tau}{2c}\int\limits_{\substack{x,\ x\in[-\tau,\ \tau]\\ -\tau,\ x<\ \tau}}^{\tau} ds\sin\left(\frac{x-s}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\times$$
$$\times\frac{J_1\left(\omega_0 c^{-1}\sqrt{\tau^2-s^2}\right)}{\sqrt{\tau^2-s^2}} + \frac{\omega}{2c}\int\limits_{\substack{x,\ x\in[-\tau,\ \tau]\\ -\tau,\ x<-\tau}}^{\tau} ds\cos\left(\frac{x-s}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-s^2}\right). \qquad (3)$$

Из (3) следуют условия на характеристиках $\tau-x=0+$, $\tau+x=0+$:

$$E(\tau-x, \tau+x)\Big|_{\tau+x=0+} = \sin\left(\frac{\tau-x}{2c}\left(\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right), \quad E(\tau-x, \tau+x\Big|_{\tau-x=0+} = 0, \qquad (4)$$

что сводит $E(x, \tau)$ в области изменения переменных $\tau-x>0$, $\tau+x>0$ к решению характеристической задачи Коши (1), (4). Согласно [8]

$$E(x,\tau) = \frac{\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}{2c}\int\limits_0^{\tau-x} ds\cos\left(\frac{s}{2c}\left(\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right)\times$$
$$\times J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{(\tau-x-s)(\tau+x)}\right).$$

Замена $s=(\tau-x)(1-s'^2)$ приводит к интегральному представлению функции $U_1(w, z)$. Окончательно получаем

$$E(x,\tau) = \begin{cases} 0, & x\in[\tau,\ \infty) \\ U_1\left(\dfrac{\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}{c}(\tau-x),\ \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\tau^2-x^2}\right), & x\in[-\tau,\ \tau] \\ \sin\left(\omega c^{-1}\tau - xc^{-1}\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right), & x\in(-\infty,\ -\tau] \end{cases}. \qquad (5)$$

Сравнивая с [4], отметим разницу в структуре решения.

Если сигнал в момент $\tau=0$ есть прямоугольный импульс с заполнением, то согласно (5) при $\tau-x>0$, $\tau+x>0$ будем иметь

$$E(x,\tau) = h(\tau-x)U_1\left(\frac{\tau-x}{c}\left(\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\right), \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-x^2} -$$
$$-h(\tau-x-\tilde{x})U_1\left(\frac{\tau-x-\tilde{x}}{c}\left(\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right), \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-(x+\tilde{x})^2}\right). \qquad (6)$$

Полагаем, что пространственная протяженность пакета в начальный момент времени $\tau=0$ $\tilde{x}$ кратна длине волны в среде $\lambda=2\pi/k$, т. е. $\tilde{x}=m\lambda$, $m=1, 2, 3, \ldots$

К линейной комбинации решений (5), сдвинутых относительно фронта $\tau=x$ и имеющих попарно различную частоту заполнения, сводится сигнал, огибающая которого при $\tau=0$ — один или несколько полупериодов синусоиды.

Рассмотрим решение (5), $x>0$. Напомним результаты, следующие из рядов $U_1(w, z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(w/z)^{2m+1}J_{2m+1}(z)$, $V_1(w, z)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(z/w)^{2m+1}J_{-(2m+1)}(z)$ и соотношения $U_1(w, z)=V_1(w, z)+\sin((1/2)(w+z^2w^{-1}))$ [9], необходимые для дальнейшего. Так как $E(x, \tau)=\sin((w/c)\tau-(x/c)\sqrt{\omega^2-\omega_0^2})+V_1((\tau-x)c^{-1}(\omega+\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}), (\omega_0/c)\sqrt{\tau^2-x^2})$, то в пределе $\tau\to\infty$ $E(x,\tau)\to\sin((\omega/c)\tau-x/c)\sqrt{\omega^2-\omega_0^2})$ — монохроматическая волна с частотой ω и волновым вектором $k=(1/c)\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}$ (установившийся режим). Переход к функциям $V_1(w, z)$ определяется условием $z<w$. Уравнение плоскости, за которой формируются гармонические колебания, $x=\tau\sqrt{1-(\omega_0^2/\omega^2)}$. Скорость ее перемещения $v=c\sqrt{1-(\omega_0^2/\omega^2)}$ совпадает с групповой скоростью.

Условие $w>z$ позволяет грубо оценить длительность переходного процесса ξ. Отсчитывая ξ с момента прихода сигнала в точку наблюдения, имеем $\xi\sim x(1-\beta)/\beta$, $\beta=v/c$ (ξ — время группового запаздывания).

3. Как следует из (5), у сигнала, огибающая которого в начальный момент времени $\tau=0$ — единичная функция Хэвисайда $h(-x)$, при $\omega>\omega_0$ всегда формируется установившийся гармонический режим и, тем самым, полуограниченный волновой пакет. Для сигнала конечной длительности, в том числе и прямоугольного импульса с заполнением, начиная с некоторого значения координаты x, представление решения в виде волнового пакета не имеет места.

Чтобы оценить область изменения переменных τ, x, где искажения импульса (6) существенны, получим приближенные выражения точных формул (5), (6), аналогичные приведенным в [4].

Вычисления упрощаются в системе отсчета K', движущейся с групповой скоростью $\beta=v/c=\sqrt{1-(\omega_0^2/\omega^2)}$. Так, легко видеть, что составляющие электрического и магнитного полей плоской монохроматической волны, распространяющейся в плазме, в системе K' — $E'=(\omega_0/\omega)E_0\sin(\omega_0/c)\tau'$, $B'=0$, электрическое поле — плазменные колебания, магнитное равно нулю. (Величины, относящиеся к движущейся системе, отмечены индексом.) Аналогично плазменные колебания в лабораторной системе K соответствуют плоской монохроматической волне в любой, движущейся со скоростью β, системе K', $\beta\perp\boldsymbol{E}$. Решения, включающие переходной процесс (5), в переменных движущейся системы отсчета $\tau_0'=(\tau_0-\beta x_0)(1-\beta^2)^{-1/2}$, $x_0'=(x_0-\beta\tau_0)(1-\beta^2)^{-1/2}$, $x_0=\omega_0 x/c$ и $\tau_0=\omega_0\tau/c$ — нормированные переменные, $\tilde{x}_0=\omega_0\tilde{x}/c$:

$$
\begin{aligned}
E(x_0', \tau_0') &= h(\tau_0'-x_0')U_1(\tau_0'-x_0', \sqrt{\tau_0'^2-x_0'^2}) = \\
&= h(\tau_0'-x_0')[\sin\tau_0'+V_1(\tau_0'-x_0', \sqrt{\tau_0'^2-x_0'^2})].
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Установившийся режим — $E(x'_0, \tau'_0) = \sin\tau'_0$, электрическое поле меняется со временем одновременно по всей области существования установившихся колебаний, $\tau'_0 + x'_0 \ll \tau'_0 - x'_0$.

Следуя [4], из (7) получим

$$E(x'_0, \tau'_0) \cong \operatorname{Re} \frac{\tau'_0 + x'_0}{\sqrt{2\pi(\tau'^2_0 - x'^2_0)^{1/2}}} \int\limits_1^\infty dt\, t^{1/2} \exp\left\{i\left[\frac{1}{2}(\tau'_0 + x'_0)(1 - t^2) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sqrt{\tau'^2_0 - x'^2_0}\, t - (\pi/4)\right]\right\}, \quad \sqrt{\tau'^2_0 - x'^2_0} \gg 1. \tag{8}$$

Асимптотика интеграла (8), согласно [10], выражается через интегралы Френеля $S(\psi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\psi \sin t^2 dt$, $C(\psi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\psi \cos t^2 dt$. При анализе переходного процесса наиболее существенна область переменных, где происходит слияние стационарной точки $t_c = \sqrt{(\tau'_0 - x'_0)(\tau'_0 + x'_0)^{-1}}$ и границы области интегрирования. После преобразований формул, приведенных в [10], приходим к выражению

$$E(x'_0, \tau'_0) \cong \frac{1}{\sqrt{2}} h(\tau'_0 - x'_0) \left\{\left[\frac{1}{2} + S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\tau'_0 - x'_0} - \sqrt{\tau'_0 + x'_0}\right)\right)\right] \times \right.$$
$$\cos\left(\tau'_0 - \frac{3}{4}\pi\right) - \left[\frac{1}{2} + C\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\tau'_0 - x'_0} - \sqrt{\tau'_0 + x'_0}\right)\right)\right] \times \tag{9}$$
$$\left. \times \sin\left(\tau'_0 - \frac{3}{4}\pi\right)\right\} + O\left(\frac{1}{\tau'_0 + x'_0}\right).$$

В переменных лабораторной системы отсчета $\tau'_0 = (\omega/c)(\tau - -x\sqrt{1 - (\omega_0^2/\omega^2)})$, аргумент интегралов Френеля $\psi = \sqrt{\varkappa_- c \varkappa_+ + \omega_0^{-1}} \times \times (\sqrt{\tau - x} - \sqrt{\tau + x})$, $\varkappa_\pm = (1/c)(\omega \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2})$ и соотношение (9) согласуется с результатом работы [4].

4. Коэффициенты при тригонометрических функциях в формуле (9) — медленно меняющиеся амплитуды. Рассмотрим их зависимость от x'_0, фиксируя время наблюдения τ'_0. Экстремальные точки функций $S(\psi)$ и $C(\psi)$ определяются условиями $(\partial/\partial x'_0) S(\psi_s) = 0$, $(\partial/\partial x'_0) \times \times C(\psi_c) = 0$ и будут $\psi_s^2 = \pi m$, $\psi_c^2 = \pi(m + 1/2)$, $m = 0, 1, 2, 3...$ Точка перегиба $\psi_s = 0$ в системе отсчета K' определяет начало координат $x'_0 = 0$, в системе K — уравнение плоскости, движущейся с групповой скоростью. Максимальные значения $S(\psi)$ и $C(\psi)$ достигаются при $x'_0 < 0$, и тогда $\psi > 0$. В область положительных значений $x'_0 > 0$ функции Френеля следует продолжить нечетным образом. Наименьшие значения амплитуд достигаются при $x'_0 > 0$. Из вида функций $S(\psi)$, $C(\psi)$ следует, что нарастание амплитуды происходит за интервал изменения ψ, равный $\Delta\psi = \psi_{\max} - \psi_{\min}$, где $\psi_{\max}$ — значение аргумента, при котором $S(\psi)$ $(C(\psi))$ достигает ближайшего к точке $\psi = 0$ максимума, $\psi_{\min}$ — минимума. Интервал $\Delta\psi$ — функция времени наблюдения τ'_0 и координаты x'_0. То значение $x'_0 = x'_{0\max}$, при котором $S(\psi)$ максимально согласно условию $\psi_s^2 = \pi$, определяется соотношением $x'^2_{0\max} = = 2\pi\tau'_0 - \pi^2$. Формула (9) предполагает выполнение условия $\tau'^2_0 - x'^2_0 \gg \gg 1$, следовательно,

$$|x'_{0s\max}| \cong \sqrt{2\pi\tau'_0}. \tag{10}$$

Для второго слагаемого, входящего в (9), будем иметь

$$|x'_{0c\max}| \cong \sqrt{\pi\tau'_0}. \tag{11}$$

Область изменения x'_0, где происходит нарастание амплитуды, порядка $2|x'_{0\max}|$, и при $\tau'_0 \gg 1$ ее протяженность много меньше расстояния от фронта до максимума сигнала.

Результаты (10), (11) легко переносятся на решение (6) (в момент $\tau=0$ прямоугольный импульс с заполнением). Как видно из графиков функций $S(\psi)$, $C(\psi)$ и формул (6), (9), при выполнении условия $|x'_{0\max}| \gtrsim \tilde{x}'_0$, величина $\tilde{x}'_0 = x_0(1-\beta^2)^{-1/2}$, огибающая сигнала (6) не имеет плоской части и наблюдается несколько последовательных максимумов, сравнимых по порядку величины. Поэтому полагаем, что искажения импульса существенны, если пространственная протяженность в начальный момент времени $\tilde{x}'_0$ равна половине области нарастания амплитуды. Тогда соотношения (10), (11) и условие $|x'_{0\max}| \cong \tilde{x}'_0$ приводят к следующим оценкам: $\tau'_0 \ll \tilde{x}'^2_0/2\pi$ — огибающая близка к первоначальной, $\tau'_0 \gg \tilde{x}'^2_0/2\pi$ — решение не может быть представлено в виде волнового пакета.

При $\tau'_0 \sim \tilde{x}'^2_0/2\pi$ волновой пакет сохраняется, но искажения первоначального сигнала существенны. Представление решения с помощью формулы (9) и следующей из нее после замены $\psi(\tau', x')$ на $\psi(\tau, x)$ остается справедливым (верно оно и при $\tau'_0 \gg \tilde{x}'^2_0/2\pi$). Для описания огибающей важно отличие амплитудных множителей (9). Так, скорость перемещения максимумов первого и второго слагаемых, согласно (10), (11), $\beta'_s = v'_s/c = -\sqrt{\pi/2\tau'_0}$, $\beta'_c = v'_c/c = -\sqrt{\pi/4\tau'_0}$ ($\beta'_{s,c} < 0$, $|\beta'_s| > |\beta'_c|$). В лабораторной системе отсчета $v_{s,c}$ везде меньше групповой скорости. Расстояние между максимумами $\delta' = x'_{0c} - x'_{0s} \cong 0{,}4\sqrt{\pi\tau'_0}$. При $\tau'_0 \to \infty$ $\beta'_{s,c} \to 0$ величина $\delta' \to \infty$.

Укажем на закономерности поведения сигнала в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью при $\tilde{x}'_0 \cong 2\sqrt{\pi\tau'_0}$, $\beta \ll 1$. «Протяженность» основной части второго слагаемого в (9) составляет $\sim 2/3$ первого. Огибающая второго слагаемого близка к треугольной (осцилляции $C(\psi)$ не учитываем), максимальное значение равно амплитуде первоначального импульса. Огибающая первого слагаемого (без учета осцилляций $S(\psi)$) имеет плоскую часть протяженностью $\sim 0{,}4\tilde{x}'_0$, амплитуда составляет $\sim 2/3$ от первоначальной. Максимум импульса перемещается со скоростью β'_c (в K $\beta_c < \beta$). Амплитудные множители основной части сигнала и фаза высокочастотного заполнения первого и второго слагаемых различны на всей протяженности основной части импульса, что приводит к фазовым искажениям высокочастотных колебаний.

5. В лабораторной системе отсчета, фиксируя координату наблюдения $x > 0$, из условия $\psi^2 = \pi$ легко найти время прихода максимума сигнала, отсчитываемое с момента прихода фронта в точку наблюдения, $\xi_{0\max} = \tau_0 - x_{0\max}$. Время группового запаздывания $\xi_0 = x_0(1-\beta)/\beta$. Нарастание амплитуды сигнала происходит за интервал

$$\Delta\xi_0 = \xi_{0\max} - \xi_0 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\pi\frac{\omega}{\omega_0} + \sqrt{2\pi x_0\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-1}+\pi^2}\right).$$

При $\omega\to\omega_0$ имеем $\Delta\xi_0\to\infty$, поскольку групповая скорость стремится к нулю, а максимум сигнала перемещается в отрицательном направлении оси x (см. ниже). При $\omega\neq\omega_0$ $\Delta\xi_0$ конечно и для начальной волны с огибающей функцией Хэвисайда всегда установится гармонический режим с амплитудой волны, равной первоначальной.

Если $x_0 \gg \tilde{x}_0$, то условие $\Delta\xi_0 \cong \tilde{x}_0$ позволяет оценить расстояние, пройдя которое прямоугольный импульс с заполнением исказится. В противном случае при оценке следует учесть, что расстояние, которое проходит задний фронт сигнала, равно $x_0+\tilde{x}_0$. По этой причине при анализе искажения огибающей импульса конечной длительности, в отличие от решения предельной задачи, удобно фиксировать время наблюдения и рассматривать пространственное распределение огибающей (см. пп. 3, 4). Оценки в этом случае непосредственно следуют из (10), (11).

Заметим, что неравенство $\Delta\xi_0 \ll \tilde{x}_0$, определяющее малость искажений первоначального сигнала, согласуется с обычно используемым соотношением только при выполнении условия $x_0 \gg (\pi/2)\omega_0(\omega^2-\omega_0^2)^{-1/2}$. Условие существенно при $\omega\cong\omega_0$.

6. Рассмотрим электромагнитный сигнал с частотой заполнения, равной частоте плазменных колебаний $\omega=\omega_0$. Для огибающей функции включения Хэвисайда точное решение задачи в области $\tau+x>0$, $\tau-x>0$ определяется формулой (5). Имеем $E(x_0,\tau_0)=U_0(\tau_0-x_0,\sqrt{\tau_0^2-x_0^2})$. Сравнивая с (7), видим, что при $\omega=\omega_0$ справедливы все результаты пп. 3, 4, записанные в движущейся с групповой скоростью системе отсчета K' после замены τ_0', x_0' на τ_0, x_0.

Решение в области изменения переменных $\tau+x<0$ получим непосредственно из формулы (3): $E(x,\tau)_{\tau+x<0}=\frac{1}{2}\frac{\omega_0}{c}\int\limits_{x-\tau}^{x+\tau} ds J_0\left(\frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2-(s-x)^2}\right)=$ $=\sin\tau_0$. Решение непрерывно на характеристике $\tau+x=0$.

Согласно вышеизложенному, легко рассмотреть пространственно-временную структуру сигнала в лабораторной системе отсчета при $\omega=\omega_0$. Так, при $\tau\to\infty$ и конечных значениях x имеем гармонический режим — плазменные колебания с амплитудой, равной половине первоначальной: $E(x_0,\tau_0)=(1/2)\sin\tau_0$. Максимумы огибающей первого и второго слагаемых в (9) перемещаются против первоначального направления движения сигнала со скоростью $\beta_s=-\sqrt{\pi/2\tau_0}$ и $\beta_c=$ $=-\sqrt{\pi/4\tau_0}$. Решение (5) справедливо в области $\tau_0^2-x_0^2\gg 1$, следовательно, $|\beta_{s,c}|<1$.

Для импульса с прямоугольной огибающей протяженностью $\tilde{x}_0$ и частотой заполнения $\omega=\omega_0$ также справедливы результаты п. 4, полученные в системе K' при $\omega\neq\omega_0$ после замены τ_0', x_0' на τ_0, x_0. Не повторяя сказанное в п. 4, отметим симметричное (относительно плоскости $x_0=-(1/2)\tilde{x}_0$) расплывание пакета, что в отличие от случая $\omega\neq\omega_0$ не сопровождается его перемещением с групповой скоростью. Результат существен для анализа пространственно-временной структуры импульса при $\omega\neq\omega_0$: расплывание сигнала, что хорошо видно в K' и совпадает с решением в K при $\omega=\omega_0$, и его перемещение с групповой скоростью. Так, при $\omega\cong\omega_0$ в лабораторной системе отсчета максимум сигнала первоначально перемещается в отрицательном направлении оси x и только для момента наблюдения $\tilde{\tau}_0$, оценка которого следует из соотношения $\sqrt{\pi/2\tilde{\tau}_0} - \beta = 0$, возможно движение пакета в направлении распространения первоначального сигнала. Величина $\tilde{\tau}_0$ тем больше, чем ближе частота заполнения ω к частоте плазменных колебаний. Значение $\tilde{\tau}_0$ при этом может быть такое, что представить решение в виде волнового пакета нельзя, что можно проверить по формулам п. 4.

7. Если начальное поле преобразуется к линейной комбинации волн с огибающей функцией включения, то при построении решения и анализе сигнала можно воспользоваться приведенными выше результатами.

Пусть при $\tau \to 0+$ $E(\tau, x) \to h(\tau - x)\sin(\omega c^{-1}\tau - \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}\, c^{-1}x) \times \cos(\Omega c^{-1}\tau - \sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2}\, c^{-1}x)$. Тогда начальные данные

$$E(0+, x) = -\frac{1}{2}h(-x)\left(\sin\frac{\omega_-}{c}x + \sin\frac{\omega_+}{c}x\right),$$

$$\omega_\pm = \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \pm \sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2}, \quad \omega > \omega_0, \ \Omega > \omega_0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}E(\tau, x)\Big|_{\tau=0+} = \frac{1}{2}h(-x)\left(\frac{\omega - \Omega}{c}\cos\frac{\omega_-}{c}x + \frac{\omega + \Omega}{c}\cos\frac{\omega_+}{c}x\right).$$

Формулы п. 2 после переобозначений приводят к следующим соотношениям в области $\tau \pm x > 0$:

$$E(\tau, x) = E_+(\tau, x) + E_-(\tau, x), \quad E_\pm(\tau, x) = \frac{1}{4}\left[\left(1 + \frac{\omega \pm \Omega}{\sqrt{\omega_\pm^2 + \omega_0^2}}\right)\times\right.$$

$$\times U_1\left(\frac{\omega_\pm + \sqrt{\omega_\pm^2 + \omega_0^2}}{c}(\tau - x), \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) +$$

$$\left. + \left(-1 + \frac{\omega \pm \Omega}{\sqrt{\omega_\pm^2 + \omega_0^2}}\right)U_1\left(\frac{\sqrt{\omega_\pm^2 + \omega_0^2} - \omega_\pm}{c}(\tau - x), \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right)\right].$$

Изменение огибающей при $x > 0$ определяется первыми слагаемыми функций $E_\pm(\tau, x)$. Согласно изложенному в пп. 3, 4 приходим к двум волновым пакетам, групповая скорость которых $\beta_\pm = \omega_\pm(\omega_\pm^2 + \omega_0^2)^{-1/2}$. Приближенное представление решения зависит от координаты и времени наблюдения. В области $\beta_-\tau < x < \beta_+\tau$ установившийся режим — волна с частотой $\sqrt{\omega_+^2 + \omega_0^2}$, при $x < \beta_-\tau$ — суперпозиция волн, частота которых $\sqrt{\omega_\pm^2 + \omega_0^2}$:

$$E \cong \frac{1}{4}\left[\left(1 + \frac{\omega - \Omega}{\sqrt{\omega_-^2 + \omega_0^2}}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{\omega_-^2 + \omega_0^2}}{c}\tau - \frac{\omega_-}{c}x\right) + \left(1 + \frac{\omega + \Omega}{\sqrt{\omega_+^2 + \omega_0^2}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times \sin\left(\sqrt{\omega_+^2 + \omega_0^2}\, c^{-1}\tau - \omega_+ c^{-1}x\right)\right].$$

Амплитуды волн не равны и меньше половины первоначальной. Это связано с сигналом, уходящим в область отрицательных значений x, в чем можно убедиться, рассмотрев решение при $x < 0$ (для краткости изложения опущено).

Точное решение для импульса конечной протяженности получим, заменив в каждом из слагаемых $E_{\pm}(\tau, x)$ функции $U_1(w, z)$ их линейной комбинацией (см. (5), (6)). Анализ искажения импульса при распространении аналогичен проведенному ранее для сигнала с прямоугольной огибающей.

Следуя изложенному, для начальной волны $E(x, \tau) \to h(\tau - x) \times \times \sin(\omega c^{-1}\tau - \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}\, c^{-1}x) \sin(\Omega c^{-1}\tau - \sqrt{\Omega^2 - \omega_0^2}\, c^{-1}x)$, решение сводим к функциям $U_2(w, z)$. Комбинируя с результатом предыдущей задачи, формируем сигналы конечной протяженности, в том числе несимметричный импульс, огибающая которого при $\tau = 0+$ имеет резкий передний фронт и непрерывно убывает до нуля.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Сравним решение в двух задачах.

I. Задано пространственное распределение поля (2) — при $\tau \to 0+$ импульс с частотой заполнения ω и огибающей функцией включения.

II. На плоскости $x = 0+$ $\quad E(\tau, 0+) = h(\tau) \sin \omega c^{-1} \tau$ [4].

Сигнал при $\tau > 0$ в задаче I — соотношение (5), в задаче II [4] —

$$E(\tau, x) = \begin{cases} 0, & x \in [\tau, \infty) \\ U_1\left(\dfrac{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}}{c}(\tau - x), \dfrac{\omega_0}{c}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right) + U_1\left(\dfrac{\omega_0^2}{c(\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2})} \times \right. & \\ \left. \times (\tau - x), \omega_0 c^{-1}\sqrt{\tau^2 - x^2}\right), & x \in (0, \tau] \end{cases} \qquad (12)$$

Результаты (5), (12) приведены в единых обозначениях.

Формулы (5), (12) определяют переходной процесс и последующий установившийся гармонический режим. Некоторые следствия:

1) Решение задачи I (5) справедливо в области $x \in (-\infty, \infty)$, источники поля при $\tau > 0$ отсутствуют. Решение задачи II (12) определено при $x > 0$ (или независимо при $x < 0$ после замены x на $-x$), непрерывно действующий источник поддерживает заданное поле при $x = 0$ (см. [8]).

2) В задаче II установившийся режим в окрестности $x = 0+$ определяется двумя слагаемыми (12), для всех $\tau > 0$, $\omega > \omega_0$ $E(\tau, 0+) = \sin \omega c^{-1} \tau$. Такой результат для $E(\tau, 0+)$ в задаче I имеем только в пределе $\tau \to \infty$, причем не для всех $\omega \geqslant \omega_0$: $\omega = \omega_0$, $E(\tau, 0+) = (1/2) \sin(\omega_0 / c\tau)$.

3) В задаче I пространственно-временная структура поля меняется на характеристике $\tau = -x$. При $x \in (-\infty, -\tau]$ переходной процесс отсутствует.

4) Задача I — при всех $\omega > \omega_0$ формируется полуограниченный волновой пакет, приближенное описание огибающей которого (9) верно и при $\omega \to \omega_0$. Амплитуда волны в установившемся режиме совпадает с первоначальной.

5) В задаче II отсутствует эффект отрицательного перемещения максимума пакета при положительной групповой скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов П. И. — ПММ, 1947, 11, № 2, с. 267.
2. Кузнецов П. И., Стратонович Р. А. Распространение электромагнитных волн в многопроводных системах. — М.: ВЦ АН СССР, 1958.

3. Хохлов Р. В.— ДАН СССР, 1948, **61**, № 4, с 637.
4 Денисов Н. Г.— ЖЭТФ, 1951, **21**, № 12, с. 1354
5. Борисов В В.— Вестник Лен. ун-та, 1971, № 10, с 46
6. Мананкова А. В., Борисов В. В.— Вестник Лен. ун-та, 1974, № 4, с. 52.
7. Ching-Lin Jiang — IEEE Trans. Anten. and Prop., 1975, **AP-23**, № 1, p. 83.
8 Смирнов В И Курс высшей математики.— М: Гостехиздат, 1957, 4.
9. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. I — М · ИЛ, 1949
10. Федорюк М. В. Метод перевала.— М: Наука, 1977.

Ленинградский государственный университет

Поступила в редакцию 1 октября 1982 г.

TO THE PROBLEM OF VARIATION OF THE PULSE ENVELOPE WITH FILLING IN THE DISPERSIVE MEDIUM

V. V. Borisov

The exact solution is constructed for the problem on the behaviour of an electromagnetic pulse given at the initial moment in colisionless plasma. The transition process and the subsequent setting regime have been found. Pulses of finite duration as well as signals with the filling frequency equal to the frequency of plasma oscillations are considered. It is shown that the transition to variables of the reference frame moving with the group velocity simplifies the solution analysis

---

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ, т. 59, вып. 3, 1982 г.

(Продолжение)

Плешаков Л. Д. Асимптотическое решение уравнения переноса линейно-поляризованного рентгеновского и гамма-излучения

Рассмотрено уравнение переноса в представлении, которое позволило выразить все параметры уравнения через сферические углы Показано, что это уравнение в низкоэнергетическом пределе переходит в известное уравнение оптики. Получено асимптотическое решение уравнения переноса для плоскопараллельной задачи с пространственной азимутальной симметрией

Извекова В. А., Кузьмин А. Д., Шитов Ю. П. Обнаружение регулярного, «аномального» по направлению дрейфа субимпульсов пульсара PSR 0320+39

По наблюдениям на 102,5 *МГц* у долгопериодического пульсара PSR 0320+39 (P=3,032 *с*) обнаружено явление регулярного дрейфа субимпульсов с периодом дрейфа $P_d = 8{,}5\ P$ и с интервалом между субимпульсами $S_d = 31{,}7$ *мс*. В отличие от других известных регулярно дрейфующих пульсаров субимпульсы PSR 0320+39 дрейфуют в противоположном обычному направлению — от переднего края окна радиоизлучения к его заднему фронту Обнаружение «аномального» по направлению дрейфа у PSR 0320+39 может служить экспериментальным подтверждением того, что направление дрейфа субимпульсов определяется геометрическим фактором, т е. взаимной ориентацией луча зрения и конуса излучения пульсара, и является сильным аргументом в пользу модели дрейфа как дифференциального вращения областей радиоизлучения вокруг магнитного полюса нейтронной звезды.

Зайцев В. В., Степанов А. В. Резонаторы для магнитогидродинамических волн в солнечной короне: эффект модуляции радиоизлучения.

Показано, что из характеристик солнечных радиовсплесков II типа следует существование минимума скорости Альвена в короне на высоте $\sim 1 R_{\odot}$. Область пониженного значения альвеновской скорости является резонатором для быстрых магнитозвуковых (БМЗ)-волн, определены собственные моды резонатора Период основной моды порядка нескольких минут БМЗ-волны в резонаторе могут возбуждаться на черенковском резонансе потоками энергичных ионов Модуляции метрового солнечного радиоизлучения с периодом несколько минут объясняются эффектом распространения радиоволн через колеблющийся магнитогидродинамический (МГД)-резонатор

(Окончание см. с. 822)