

УДК 621.372.09

ТРАНСФОРМАЦИЯ МОД ПРИ ДВОЙНОМ ВЫРОЖДЕНИИ В ПЛОСКОМ ИМПЕДАНСНОМ АНИЗОТРОПНОМ ВОЛНОВОДЕ

В. В. Новиков

Анализируется распространение электромагнитных волн в плоском слабо нерегулярном волноводе, одна из стенок которого обладает анизотропным поверхностным импедансом. Построено приближенное решение задачи и исследован вопрос о трансформации нормальных волн в окрестности точки локального двукратного вырождения. Показано, что матрица трансформации в анизотропном волноводе совпадает с аналогичной матрицей в изотропном волноводе.

В работе [1] было проанализировано взаимодействие нормальных волн при наличии двукратного вырождения в плоском слабо нерегулярном волноводе, нижняя стенка которого является идеально проводящей, а верхняя обладает изотропным поверхностным импедансом. В настоящей работе мы рассмотрим аналогичную задачу, считая поверхностный импеданс верхней стенки анизотропным.

1. Введем декартову систему координат x, y, z , ось z которой направим перпендикулярно поверхностям, образующим плоский волновод с высотой H . Рассмотрим распространение плоского ($\partial/\partial y = 0$) электромагнитного поля с зависимостью от времени $\exp(-i\omega t)$ в направлении оси x при условии, что среда внутри волновода представляет собой вакуум. Нижнюю стенку волновода ($z=0$) предполагаем идеально проводящей, а на верхней стенке ($z=H$) зададим приближенные граничные условия импедансного типа для анизотропной среды

$$E_x = \parallel \delta_{\parallel} \tilde{H}_y + \parallel \delta_{\perp} \tilde{H}_x, \quad E_y = -\perp \delta_{\parallel} \tilde{H}_y - \perp \delta_{\perp} \tilde{H}_x,$$

где $\tilde{H} = Z_0 H$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$, $\parallel \delta, \perp \delta$ — элементы матричного приведенного поверхностного импеданса, которые будем считать не зависящими от структуры электромагнитного поля E и H , но зависящими от продольной координаты x .

Уравнения Максвелла и граничные условия на стенках волновода в данном случае могут быть записаны в следующей форме (используем безразмерные переменные $s=kx$ и $h=z/H$, $k=\omega/c$):

$$L_s e + \beta^{-2} L_h e = 0; \tag{1a}$$

$$\hat{L}_0 e|_{h=0} = 0; \tag{1б}$$

$$\hat{L}_1 e|_{h=1} = 0, \tag{1в}$$

где

$$L_s = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 1, \quad L_h = \frac{\partial^2}{\partial h^2}, \quad \beta = kH, \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_y \\ E_y \end{pmatrix},$$

$$\hat{L}_0 = \begin{pmatrix} \partial/\partial h, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_1 = \hat{I} \frac{\partial}{\partial h} - i\beta \hat{\Delta}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_{11}, & \Delta_{12} \\ \Delta_{21}, & \Delta_{22} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{11} = \delta_{\parallel} - \frac{\delta_{\perp\perp}\delta_{\parallel}}{\delta_{\perp}}, \quad \Delta_{12} = -\frac{\delta_{\perp}}{\delta_{\perp}}, \quad \Delta_{21} = \frac{\delta_{\parallel}}{\delta_{\perp}}, \quad \Delta_{22} = \frac{1}{\delta_{\perp}}.$$

Помимо граничных условий (1б) и (1в) решение задачи должно удовлетворять краевым условиям по продольной координате s . Мы потребуем, чтобы $e \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, а при $s < 0$ будем считать волновод регулярным ($\Delta_{ik} = \text{const}$) и задавать падающее из регулярного участка ($s < 0$) на нерегулярный участок ($s > 0$) волновода поле.

2. Решение задачи будем строить, опираясь на разложение по собственным вектор-функциям U_p поперечного оператора L_h :

$$L_h U_p = -\gamma_p^2 U_p; \quad (2a)$$

$$\hat{L}_0 U_p|_{h=0} = 0; \quad (2б)$$

$$\hat{L}_1 U_p|_{h=1} = 0. \quad (2в)$$

При этом временно считаем спектр поперечного оператора простым (в рассматриваемом импедансном приближении он дискретен). Из дифференциального уравнения (2а) и граничных условий (2б) и (2в) вытекают выражения для характеристического определителя поперечного оператора

$$\Phi(\eta, \beta\Delta_{ik}) = \Phi_{\parallel}(\eta, \beta\Delta_{11})\Phi_{\perp}(\eta, \beta\Delta_{22}) - \beta^2\Delta_{12}\Delta_{21}\text{tg}\eta, \quad (3)$$

$$\Phi_{\parallel}(\eta, \beta\Delta_{11}) = \eta \text{tg}\eta + i\beta\Delta_{11}, \quad \Phi_{\perp}(\eta, \beta\Delta_{22}) = -i\beta\Delta_{22}\text{tg}\eta + \eta,$$

нули которого $\eta = \eta_p[\beta\Delta_{ik}(s)]$ являются собственными значениями поперечного оператора, и для собственных вектор-функций

$$U_p = \begin{pmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \eta_p h \\ \rho_p \sin \eta_p h \end{pmatrix}, \quad \rho_p = \frac{i\Phi_{\parallel p}}{\beta\Delta_{12}\text{tg}\eta_p} = \frac{i\beta\Delta_{21}}{\Phi_{\perp p}}, \quad (4)$$

где

$$\Phi_{\parallel p} = \Phi_{\parallel}(\eta_p, \beta\Delta_{11}), \quad \Phi_{\perp p} = \Phi_{\perp}(\eta_p, \beta\Delta_{22}).$$

Известно [2], что собственные вектор-функции оператора ортогональны собственным вектор-функциям сопряженного оператора, а собственные значения сопряженного оператора комплексно сопряжены собственным значениям исходного оператора. В рассматриваемом случае нетрудно найти сопряженный оператор L_h^* и определить его собственные вектор-функции V_p . При этом оказывается, что они связаны с U_p соотношением

$$\bar{V}_p = \hat{M}U_p; \quad (5a)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \Delta_{12}/\Delta_{21} \end{pmatrix}, \quad (5б)$$

где черта над V_p означает комплексное сопряжение. В результате условие ортогональности U_p и V_q принимает вид

$$(U_p, V_q) = \sum_{k=1}^2 \int_0^1 U_{pk} \bar{V}_{qk} dh = \int_0^1 U_p \hat{M}U_q dh = N_p \delta_{pq} \quad (6)$$

Отсюда при использовании (4) и (5б) определяется нормировочный множитель N_p , который с учетом (3) может быть записан в следующей форме.

$$N_p = (\cos^2 \eta / 2\eta \Phi_{\perp}) (\partial \Phi / \partial \eta)|_{\eta=\eta_p}. \quad (7)$$

В дальнейших разложениях по собственным вектор-функциям поперечного оператора целесообразно использовать нормированные вектор-функции

$$U_p^{(0)} = U_p / \sqrt{N_p}, \quad (8)$$

для которых условие ортогональности (6) принимает вид

$$(U_p^{(0)}, V_q^{(0)}) = \int_0^1 U_p^{(0)} \hat{M} U_q^{(0)} dh = \delta_{pq}. \quad (9)$$

3 Решение уравнения (1a) будем искать в виде разложения по $U_p^{(0)}$, т. е. в виде ряда нормальных волн [3]

$$e(s, h) = \sum_{p=0}^{\infty} \psi_p(s) U_p^{(0)}(s, h), \quad (10)$$

и аналогичное разложение используем для производной

$$\frac{\partial e(s, h)}{\partial s} = \sum_{p=0}^{\infty} \varphi_p(s) U_p^{(0)}(s, h).$$

Из этих разложений и уравнения (1a) при использовании условия ортогональности (9) получается система дифференциальных уравнений для продольных функций $\psi_p(s)$ и $\varphi_p(s)$. С целью выделения в решении волн, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси s , вместо $\psi_p(s)$ и $\varphi_p(s)$ следует ввести новые неизвестные функции $A_p^{(+)}(s)$ и $A_p^{(-)}(s)$ с помощью соотношений

$$\psi_p = (\sqrt{S_p})^{-1} [A_p^{(+)} + A_p^{(-)}], \quad \varphi_p = i\sqrt{S_p} [A_p^{(+)} - A_p^{(-)}], \quad (11)$$

где

$$S_p = \sqrt{1 - (\gamma_p^2/\beta^2)}. \quad (12)$$

В результате для функций $A_p^{(+)}$ и $A_p^{(-)}$ получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dA_p^{(+)}}{ds} - iS_p A_p^{(+)} &= \sum_{q=0}^{\infty} [\Gamma_{pq}^{(+)} A_q^{(+)} + \Gamma_{pq}^{(-)} A_q^{(-)}], \\ \frac{dA_p^{(-)}}{ds} + iS_p A_p^{(-)} &= \sum_{q=0}^{\infty} [\Gamma_{pq}^{\prime(-)} A_q^{(+)} + \Gamma_{pq}^{(+)} A_q^{(-)}], \end{aligned} \quad (13)$$

в которой

$$\Gamma_{pq}^{(+)} = -\frac{S_p + S_q}{2\sqrt{S_p S_q}} B_{pq}, \quad \Gamma_{pq}^{(-)} = \frac{1}{2S_q} \frac{dS_q}{ds} \delta_{pq} - \frac{S_p - S_q}{2\sqrt{S_p S_q}} B_{pq}, \quad (14)$$

$$B_{pq} = \int_0^1 \hat{M} U_p^{(0)} \frac{\partial U_q^{(0)}}{\partial s} dh.$$

Преобразуем коэффициенты связи (14) к такой форме, которая содержала бы только производные по продольной координате от величин Δ_{ik} . В дальнейшем для производной по s от произвольной функции F используем обозначение $\partial F/\partial s \equiv F'$. Дифференцируя условие ортогональности (9) при $p=q$ по s и используя (4) и (5б), находим

$$\Gamma_{pp}^{(+)} = -B_{pp} = -\frac{\beta^2}{4N_p \Phi_{\perp p}} \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_p}{2\gamma_p} \right) (\Delta_{21} \Delta'_{12} - \Delta_{12} \Delta'_{21}). \quad (15)$$

Если продифференцировать по s уравнение (2а) для собственной вектор-функции $U_q^{(0)}$ и скалярно умножить результат на $V_p^{(0)}$, то после вычисления интеграла $(L_h(U_q^{(0)}), V_p^{(0)})$ по частям приходим, учитывая граничные условия (2б) и (2в), к соотношению

$$(\gamma_p^2 - \gamma_q^2) B_{pq} - (\gamma_q^2)' \delta_{pq} = i\beta \hat{M} U_p^{(0)} \cdot \hat{\Delta}' U_q^{(0)' }{}_{h=1}.$$

Отсюда вытекают выражения для B_{pq} при $p \neq q$ и для $(\gamma_q^2)'$ при $p = q$, на основании которых из (14) получаем

$$\Gamma_{pq}^{(-)} = \frac{i \cos \eta_p \cos \eta_q}{2\beta (S_p + S_q) \sqrt{S_p S_q N_p N_q}} A_{pq} \quad (\text{при всех } p \text{ и } q); \quad (16)$$

$$\Gamma_{pq}^{(+)} = - \frac{i\beta (S_p + S_q) \cos \eta_p \cos \eta_q}{2(\gamma_p^2 - \gamma_q^2) \sqrt{S_p S_q N_p N_q}} A_{pq} \quad (p \neq q), \quad (17)$$

где

$$A_{pq} = \Delta'_{11} + i\beta \left(\frac{\text{tg } \gamma_{lp}}{\Phi_{\perp p}} \Delta'_{12} \Delta'_{21} + \frac{\text{tg } \gamma_{lq}}{\Phi_{\perp q}} \Delta'_{21} \Delta'_{12} \right) - \frac{\Phi_{\parallel p} \text{tg } \gamma_{lq}}{\Phi_{\perp q}} \Delta'_{22}. \quad (18)$$

4. Как видно из выражений (15)–(18), коэффициенты связи нормальных волн пропорциональны Δ'_{ik} и в случае слабо нерегулярного волновода при $\eta_p \neq \eta_q$ (вне окрестности точки вырождения) являются малыми величинами $O(1/kl)$, где l — масштаб изменения $\Delta_{ik}(x)$. Поэтому вне окрестности точки вырождения в нулевом приближении можно пренебречь связью между модами. В результате мы приходим к приближению ВКБ для решения системы уравнений (13):

$$A_{p\text{ВКБ}}^{(+)} = A_{p0}^{(+)} \exp \left(i \int_0^s S_p ds \right), \quad A_{p\text{ВКБ}}^{(-)} = A_{p0}^{(-)} \exp \left(-i \int_0^s S_p ds \right), \quad (19)$$

в котором $A_{p0}^{(+)}$ и $A_{p0}^{(-)}$ — константы*.

В окрестности точки вырождения при $\eta_p \rightarrow \eta_q$ коэффициенты связи вырождающихся мод, вообще говоря, неограниченно возрастают вследствие стремления к нулю разности $\gamma_p^2 - \gamma_q^2$ и нормировочных множителей N_p и N_q (7), которые пропорциональны производной $\partial\Phi/\partial\eta$, обращаемой в нуль в точке вырождения $s = s_0$ [2], где $\Delta_{ik} = \Delta_{ik}^{(b)}$ и характеристический определитель (3) имеет двойной корень $\eta_p(s_0) = \eta_q(s_0) = \eta_b$. Опираясь на уравнение для собственных значений

$$\Phi(\eta, \Delta_{ik}) = \Phi(\eta_b + \Delta\eta, \Delta_{ik}^{(b)} + \xi_{ik}) = 0, \quad \xi_{ik} \simeq \Delta'_{ik}(s_0)(s - s_0),$$

и проводя разложение Φ по $\Delta\eta$ и ξ_{ik} , можно получить приближенные выражения для $\Delta\eta$, η_p , η_q , N_p , N_q и, используя их, найти главные члены разложений коэффициентов связи (15)–(18) по $\Delta s = s - s_0$. В частности, для коэффициента связи $\Gamma_{pq}^{(+)}$ (17), обладающего наиболее сильной особенностью, при $A_{pq}(s_0) \neq 0$ получаем

$$\Gamma_{pq}^{(+)} \simeq i\alpha/4\Delta s, \quad (20)$$

где величина α равна $+1$ или -1 в зависимости от соотношения между $\sqrt{N_p}$ и $\sqrt{N_q}$ в окрестности точки вырождения $\sqrt{N_p} \simeq i\alpha\sqrt{N_q}$, которое является следствием приближенного равенства $N_p \simeq -N_q$ в этой области.

* Заметим, что можно уточнить приближение ВКБ (19), проведя учет перевозбуждения p -й моды самой в себя, описываемого коэффициентом связи $\Gamma_{pp}^{(+)}$. Однако, поскольку такое уточнение не влияет на результаты, касающиеся трансформации мод, мы его делать не будем, чтобы не усложнять формул.

Используя выражение (20), из системы уравнений (13) нетрудно найти приближенные представления для продольных функций вырождающихся мод при $\Delta s \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} A_p^{(\pm)} &= a_p^{(\pm)} (\Delta s)^{-1/4} + b_p^{(\pm)} (\Delta s)^{1/4}, \\ A_q^{(\pm)} &= i\alpha [a_p^{(\pm)} (\Delta s)^{-1/4} - b_p^{(\pm)} (\Delta s)^{1/4}], \end{aligned} \quad (21)$$

в которых $a_p^{(\pm)}$ и $b_p^{(\pm)}$ являются постоянными величинами. Следовательно, в точке вырождения продольные функции вырождающихся мод, как и их коэффициенты связи, имеют особенность.

5. Перейдем теперь к построению единого приближенного решения системы (13), которое было бы справедливо как в окрестности точки вырождения, так и вне ее и совпадало бы в этих областях соответственно с (21) и (19). В дальнейшем будем считать, что вырождаются моды с номерами m и n .

Особенности коэффициентов связи вырождающихся мод при $s=s_0$ затрудняют построение единого приближенного решения. Поэтому следует от продольных функций $A_{m,n}^{(\pm)}$, учитывая их поведение при $\Delta s \rightarrow 0$ (21), перейти к другим неизвестным функциям $f_{m,n}^{(\pm)}$, голоморфным в точке вырождения,

$$A_m^{(\pm)} = \frac{1}{V\bar{\gamma}} f_m^{(\pm)} + V\bar{\gamma} f_n^{(\pm)}, \quad A_n^{(\pm)} = i\alpha \left[\frac{1}{V\bar{\gamma}} f_m^{(\pm)} - V\bar{\gamma} f_n^{(\pm)} \right], \quad (22)$$

выбрав в качестве γ полуразность S_m и S_n (12),

$$\gamma = (1/2) (S_m - S_n), \quad (23)$$

которая в окрестности точки вырождения пропорциональна $\sqrt{\Delta s}$. Если к тому же для единообразия положить

$$A_p^{(\pm)} = f_p^{(\pm)} \text{ при } p \neq m, n,$$

то из системы уравнений (13) мы получаем уравнения для $f_p^{(\pm)}$:

$$\begin{aligned} \frac{df_p^{(+)}}{ds} &= iS_p f_p^{(+)} + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{pq}^{(+)} f_q^{(+)} + C_{pq}^{(-)} f_q^{(-)}], \quad p \neq m, n, \\ \frac{df_m^{(+)}}{ds} &= i [S_+ f_m^{(+)} + \gamma^2 f_n^{(+)}] + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{mq}^{(+)} f_q^{(+)} + C_{mq}^{(-)} f_q^{(-)}], \\ \frac{df_n^{(+)}}{ds} &= i [f_m^{(+)} + S_+ f_n^{(+)}] + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{nq}^{(+)} f_q^{(+)} + C_{nq}^{(-)} f_q^{(-)}], \quad (24) \\ \frac{df_p^{(-)}}{ds} &= -iS_p f_p^{(-)} + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{pq}^{(-)} f_q^{(+)} + C_{pq}^{(+)} f_q^{(-)}], \quad p \neq m, n, \\ \frac{df_m^{(-)}}{ds} &= -i [S_+ f_m^{(-)} + \gamma^2 f_n^{(-)}] + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{mq}^{(-)} f_q^{(+)} + C_{mq}^{(+)} f_q^{(-)}], \\ \frac{df_n^{(-)}}{ds} &= -i [f_m^{(-)} + S_+ f_n^{(-)}] + \sum_{q=0}^{\infty} [C_{nq}^{(-)} f_q^{(+)} + C_{nq}^{(+)} f_q^{(-)}], \end{aligned}$$

где $S_+ = (1/2)(S_m + S_n)$. Что касается коэффициентов связи $C_{pq}^{(\pm)}$, то для них нетрудно получить соответствующие выражения через коэффициенты связи $I_{pq}^{(\pm)}$, которые мы не приводим ввиду их громоздкости.

Анализ коэффициентов связи $C_{pq}^{(\pm)}$ показывает, во-первых, что они являются голоморфными функциями в окрестности точки вырождения. Во-вторых, они оказываются малыми величинами $O(1/kl)$ как вне окрестности точки вырождения, так и внутри нее. Поэтому в случае слабо нерегулярного волновода можно пренебречь в системе уравнений (24) членами, содержащими $C_{pq}^{(\pm)}$, и она распадается на две несвязанные системы для функций $f_p^{(+)}$ и $f_p^{(-)}$, которые описывают волны, распространяющиеся соответственно в положительном и отрицательном направлениях оси s (или x). Тогда при падении поля на нерегулярный участок ($s > 0$) волновода из регулярного участка ($s < 0$) в нулевом приближении не возбуждаются обратные волны, так что $f_p^{(-)} = f_m^{(-)} = f_n^{(-)} = 0$. Далее, как видно из системы (24), в нулевом приближении невырождающиеся моды ($p \neq m, n$) распространяются независимо друг от друга и от вырождающихся мод, и их продольные функции $f_p^{(+)} = A_p^{(+)}$ даются выражением (19). Между вырождающимися же модами имеет место связь и в нулевом приближении. Если положить

$$f_m^{(+)} = F_m \exp\left(i \int_{s_0}^s S_+ ds\right), \quad f_n^{(+)} = F_n \exp\left(i \int_{s_0}^s S_+ ds\right), \quad (25)$$

то из второго и третьего укороченных уравнений системы (24) для функций F_m и F_n получается система связанных дифференциальных уравнений

$$dF_m/ds = i\gamma^2 F_n, \quad dF_n/ds = iF_m, \quad (26)$$

из которой следует уравнение для F_n :

$$d^2 F_n/ds^2 + \gamma^2 F_n = 0. \quad (27)$$

В результате, учитывая выражения (25), (26), (22) и (11), мы находим единое приближенное решение (10) интересующей нас задачи:

$$e_0(s, h) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq m, n}}^{\infty} \frac{A_{p0}}{\sqrt{S_p}} U_p^{(0)} \exp\left(i \int_0^s S_p ds\right) + e_0^{(m,n)}(s, h), \quad (28)$$

где

$$e_0^{(m,n)} = \left[\sqrt{\frac{\gamma}{S_m}} \left(F_n - \frac{i}{\gamma} \frac{dF_n}{ds} \right) U_m^{(0)} - i\alpha \sqrt{\frac{\gamma}{S_n}} \left(F_n + \frac{i}{\gamma} \frac{dF_n}{ds} \right) U_n^{(0)} \right] \times \exp\left(i \int_{s_0}^s S_+ ds\right), \quad (29)$$

а функция F_n представляет собой решение уравнения (27). Следует отметить, что с точностью до обозначений система уравнений (26) для функций F_m и F_n для импедансного анизотропного волновода совпадает с аналогичной системой уравнений для импедансного изотропного волновода ((29) в [1]). Поэтому продольные функции в нулевом приближении имеют одинаковые аналитические представления в этих случаях, в частности, одинаковыми по форме оказываются и матрицы трансформации вырождающихся мод.

6. Решение уравнения (27), обладающего простой точкой поворота ($\gamma^2 \sim \Delta s$), эталонируется функциями Эйри [4]. Использование вне

окрестности точки поворота (точки вырождения) при $|\int_{s_0}^s \gamma ds| > 1$ главных членов асимптотических разложений функций Эйри приводит к приближению ВКБ для функции F_n :

$$F_{n\text{ВКБ}} = \frac{D_m}{2V\bar{\gamma}} \exp\left(i \int_{s_0}^s \gamma ds\right) + \frac{D_n}{2V\bar{\gamma}} \exp\left(-i \int_{s_0}^s \gamma ds\right). \quad (30)$$

Постоянные D_m и D_n здесь различны при $s < s_0$ и $s > s_0$ (соответственно $D_{m, n<}$ и $D_{m, n>}$) и между ними имеет место линейная связь:

$$D_{>} = \hat{Q} D_{<}, \quad \text{где } D_{\lessgtr} = \begin{pmatrix} D_{m\lessgtr} \\ D_{n\lessgtr} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Матрица \hat{Q} может быть найдена или на основании асимптотических представлений функций Эйри на всей комплексной плоскости или с помощью метода фазовых интегралов [5]. Подставляя (30) в (29), приходим к приближению ВКБ для поля вырождающихся мод:

$$e_{\text{ОВКБ}}^{(m, n)} = \frac{A_{m0\lessgtr}^{(+)}}{\sqrt{S_m}} U_m^{(0)} \exp\left(i \int_0^s S_m ds\right) + \frac{A_{n0\lessgtr}^{(+)}}{\sqrt{S_n}} U_n^{(0)} \exp\left(i \int_0^s S_n ds\right), \quad (32)$$

а следовательно, и к приближению ВКБ для решения (28) в целом. Поскольку в (32)

$$A_{m0\lessgtr}^{(+)} = D_{m\lessgtr} \exp\left(-i \int_0^{s_0} S_m ds\right), \quad A_{n0\lessgtr}^{(+)} = -i\alpha D_{n\lessgtr} \exp\left(-i \int_0^{s_0} S_n ds\right),$$

то в силу соотношения (31) связь между постоянными $A_{m0, n0>}^{(+)}$ и $A_{m0, n0<}^{(+)}$ дается выражением

$$A_{0>}^{(+)} = \hat{T} A_{0<}^{(+)}, \quad A_{0\lessgtr}^{(+)} = \begin{pmatrix} A_{m0\lessgtr}^{(+)} \\ A_{n0\lessgtr}^{(+)} \end{pmatrix},$$

в котором

$$\hat{T} = \hat{S}^{-1} \hat{T}_0 \hat{S}; \quad (33a)$$

$$\hat{T}_0 = \hat{\alpha} \hat{Q} \hat{\alpha}^{-1}, \quad (33b)$$

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \exp\left(i \int_0^{s_0} S_m ds\right), & 0 \\ 0, & \exp\left(i \int_0^{s_0} S_n ds\right) \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -i\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица \hat{T} (33a) представляет собой матрицу трансформации вырождающихся мод, а матрицу \hat{T}_0 (33b) можно назвать приведенной матрицей трансформации (если формально положить $s_0=0$, то $\hat{S}=\hat{I}$ и $\hat{T}=\hat{T}_0$). Явный вид матрицы трансформации зависит от матрицы \hat{Q} . Соответствующий анализ показывает, что в зависимости от характера изменения собственных чисел η_m и η_n , а точнее — $S_m = S_b + \Delta S_m$, $S_n = S_b + \Delta S_n$, в окрестности точки вырождения (рис. 1—4) приведенная

матрица трансформации описывается одним из следующих четырех выражений, справедливых при условии $\text{Im } S_m > \text{Im } S_n$ до точки вырождения ($s < s_0$),

$$\hat{T}_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1, & -\alpha \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 1, & \sigma \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_0^{(3)} = \begin{pmatrix} 0, & \alpha \\ -\alpha, & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_0^{(4)} = \begin{pmatrix} 0, & -\alpha \\ \alpha, & 1 \end{pmatrix}, \quad (34)$$

где величина α равна $+1$ или -1 в зависимости от соотношения между $\sqrt{N_m}$ и $\sqrt{N_n}$ в окрестности точки вырождения: $\sqrt{N_m} \simeq i\alpha\sqrt{N_n}$. Эти выражения имеют место как для анизотропного, так и для изотропного импедансных волноводных каналов. Анизотропия поверхностного импеданса не оказывает непосредственного влияния на значение приведенной матрицы трансформации нормальных волн, которое определяется исключительно поведением собственных значений вырождающихся мод в окрестности точки вырождения.

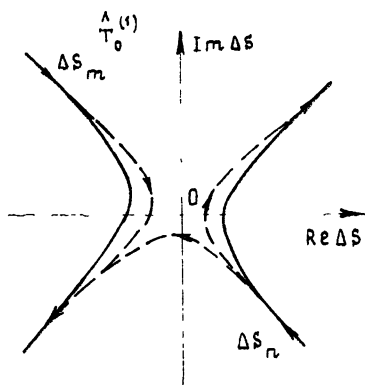


Рис. 1.

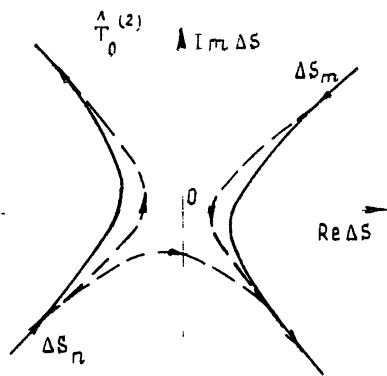


Рис. 2.

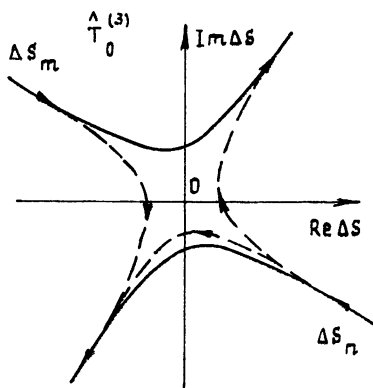


Рис. 3.

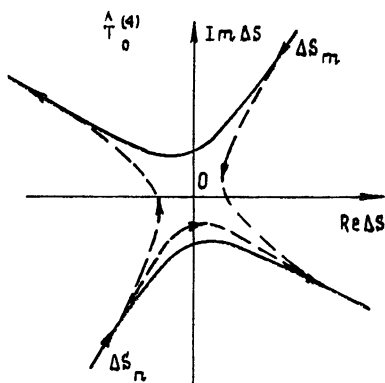


Рис. 4.

Рис 1—4 Различные варианты поведения ΔS_m и ΔS_n в окрестности точки вырождения и соответствующие им приведенные матрицы трансформации (сплошными линиями обозначены траектории ΔS_m и ΔS_n , стрелки указывают направление перемещения ΔS_m и ΔS_n при увеличении s)

Матрицы трансформации (34) оказываются недиагональными, что обусловлено расщеплением нормальных волн при их взаимодействии в окрестности точки вырождения. Трансформация нормальных волн при прохождении этой окрестности условно изображена пунктирными линиями на рис 1—4. Из этих рисунков видно, что мода, коэффициент затухания которой (или $\text{Im } \Delta S$) уменьшается при приближении к точке

вырождения, целиком трансформируется в моду, коэффициент затухания которой уменьшается и при удалении от точки вырождения; мода же, коэффициент затухания которой увеличивается при приближении к точке вырождения, расщепляется. Можно сформулировать этот результат иначе [6]: слабая (обладающая большим коэффициентом затухания) до точки вырождения мода полностью трансформируется в сильную — после точки вырождения — моду, а сильная до точки вырождения мода расщепляется

Подчеркнем еще раз, что приведенные результаты для трансформации мод справедливы при условии, что коэффициент A_{mn} (18) в точке вырождения отличен от нуля. Случай $A_{mn}(s_0) = 0$ требует специального рассмотрения. Отметим только, что коэффициент $A_{mn}(s_0)$, в частности, обращается в нуль, если в точке вырождения $\Delta_{12}^{(b)} = \Delta_{21}^{(b)} = 0$ ($\Delta'_{ik}(s_0) \neq 0$), а вырождение обусловлено совпадением собственных значений ТМ ($\Phi_{\parallel} = 0$)- и ТЕ ($\Phi_{\perp} = 0$)-типов в сечении $s = s_0$, где характеристический определитель имеет вид $\Phi = \Phi_{\parallel} \Phi_{\perp}$. При этом коэффициенты связи $\Gamma_{pq}^{(\pm)}$ (15) — (17) между всеми модами оказываются малыми величинами $O(1/kl)$ как вне, так и в окрестности точки вырождения, и в нулевом приближении взаимодействие между модами отсутствует, в том числе и в окрестности точки вырождения.

Рассмотренный случай сильного взаимодействия нормальных волн и отмеченный случай слабого взаимодействия отвечают соответственно жордановой и диагонализированной точкам вырождения второй кратности в терминологии авторов работ [7, 8].

Автор благодарит А. Д. Авдеева и В. В. Кириллова за полезное обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Бичуцкая Т И, Новиков В В — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 7, с. 860.
- 2 Наймарк М А Линейные дифференциальные операторы. — М. Наука, 1969, с. 104.
- 3 Краснушкин П Е, Яблочкин Н А Теория распространения сверхдлинных волн — Тр Гос союзного научн.-исслед. ин-та, 1955, 4(12), с. 3
- 4 Вазов В Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений — М.: Мир, 1968, с. 186.
- 5 Хединг Дж Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965, с. 73
- 6 Авдеев А Д — Распространение радиоволн над земной поверхностью и в ионосфере (сб Проблемы дифракции и распространения волн). — Л.: ЛГУ, 1981, 18, с. 74
- 7 Краснушкин П. Е., Федоров Е Н — Радиотехника и электроника, 1972, 17, вып 6, с. 1129.
- 8 Краснушкин П. Е — ДАН СССР Сер мат физ., 1978, 239, № 4, с. 815

Ленинградский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 июня 1982 г

MODE TRANSFORMATION IN A PLANE ANISOTROPIC IMPEDANCE WAVEGUIDE AT DOUBLE DEGENERATION

V. V. Novikov

The electromagnetic wave propagation in a plane smooth irregular waveguide is investigated for the situation where the one of the walls is described by an anisotropic surface impedance. The exact solution is evaluated asymptotically and the mode transformation at a local double degeneracy is studied. It is shown that the transformation matrix for the anisotropic impedance waveguide coincides with the one for the isotropic impedance waveguide.