ЛИТЕРАТУРА

1. Pilon R. O., Purves C. G.— IEE Trans., 1973, AES-9, № 5.
2. Калмыков А. И., Пичугин А. П.— Изв. АН СССР. Сер. Физика атмосферы и океана, 1981, 17, № 7, с. 754.
3. Лемента Ю. А., Фукс И. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 4, с. 503.
4. Каневский М. Б.— Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 7, с. 898.
5. Борсутский З. А. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 2027-81. Деп. от 7 мая 1981 г.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
6 сентября 1982 г.

УДК 534.222.2

ОБ ЭВОЛЮЦИИ МАЛЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ФРОНТЕ СЛАБОНЕОДНОМЕРНЫХ СОЛИТОНОВ

М. З. Песенсон

В качестве исходных рассмотрим следующие классы уравнений:
уравнение типа Кадомцева—Петвиашвили (КП) [1]

$$\partial^2_{xt} u + \partial^2_{xx} (F(u) + \partial^2_{xx} u) = -\beta^2 \partial^2_{yy} u; \tag{1}$$

слабо двумерное уравнение Клейна—Гордона

$$\partial^2_{tt} u - \partial^2_{xx} u + F(u, u_x) = \partial^2_{yy} u. \tag{2}$$

Здесь F — произвольная аналитическая функция u, u_x. Предполагается, что в одномерном случае уравнения (1), (2) имеют устойчивые решения в виде бегущего солитона $u = u_0(\theta)$, $\theta = x - A^2 t$. Геометрооптический подход, предложенный в работах [2, 3] (ранее — в [4] применительно к динамике ударных волн), сводит задачу о двумерной динамике солитона к нелинейной гиперболической (в устойчивом случае) системе уравнений относительно некоторых параметров солитона. В нелинейной гиперболической системе неизбежно появление в решении особенностей типа бесконечной производной, что не позволяет описать эволюцию возмущений за особенностью и, следовательно, ограничивает применимость решений, найденных в [2, 3]*. Вблизи особенности изменение параметров солитона происходит уже не адиабатически и сопровождается излучением энергии в несолитонной форме. Мы покажем, что, как и предполагалось в работе [3], высокочастотная диссипация, вызванная излучением, компенсирует нелинейное укручение (а не высокочастотная дисперсия, что, в принципе, могло бы быть). Это позволяет и после появления особенности описать эволюцию солитона в терминах выведенной гиперболической системы, без обращения к неупрощенному исходному уравнению. Для уравнения (1) при $F(u) = u^2/2$ (уравнение КП) Захаровым [5] было получено дисперсионное соотношение (которому соответствует линейное уравнение Бюргерса) для малых возмущений, распространяющихся по фронту солитона. Учет конечности малого возмущения приводит к уравнению Бюргерса. Покажем, что и для уравнений (1), (2) малые возмущения на фронте плоских солитонов удовлетворяют уравнению Бюргерса. Это позволит выйти за рамки адиабатического приближения. Полученное в квадратурах дисперсионное соотношение линейного уравнения Бюргерса описывает спектр затухающих колебаний при отрицательной дисперсии и инкремент неустойчивости солитона—при положительной.

Ищем решение уравнения (1) в виде

$$\begin{gathered} u(\theta, T_1, T_2, Y) = u_0(\theta) + \varepsilon u_1(\theta) \exp(i\Omega t + ipY) + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\theta, T_1, T_2, Y), \\ \varepsilon = l_x/l_y \ll 1, \quad T_n = \varepsilon^n t, \quad Y = \varepsilon y, \quad \Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n-1} \Omega_n, \end{gathered} \tag{3}$$

где l_x, l_y — характерные масштабы вдоль осей x и y соответственно.

Подставляя (3) в (1) и рассматривая только малые возмущения, найдем $u_n(\theta, T_1, T_2, Y)$:

---

* Аналогичная ситуация возникает при использовании усредненного вариационного принципа Уизема [4].

$$u_1(\theta) = u_0'(\theta), \quad u_2(\theta, T_1, T_2, Y) = c_1 u_0' + c_2 a_1(\theta) - i\Omega_1 a_2(\theta),$$

$$a_1(\theta) = u_0' \int \frac{d\theta}{(u_0')^2}, \quad a_2(\theta) = \frac{u_0'}{2} \int \left(\frac{u_0}{u_0'}\right)^2 d\theta,$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования. В классе убывающих функций следует положить $c_2=0$.

Заметим, что $u_3(\theta, T_1, T_2, Y)$ может уже не удовлетворять однородным краевым условиям, т. е. разложение (3) не описывает образования «хвоста» — волнового пакета малой амплитуды, следующего за солитоном [6]. Найдем функцию $u_3(\theta, T_1, T_2, Y)$:

$$u_3(\theta, T_1, T_2, Y) = c^3 u_0' + c_4 a_1(\theta) - i\Omega_1 a_3(\theta) - \Omega_1^2 a_4(\theta) - i\Omega_2 a_2(\theta) +$$

$$+ p^2\beta^2 a_5(\theta) + k_1 a_6(\theta), \quad a_3(\theta) = \hat{H}[c_1 u_0],$$

$$a_4(\theta) = \hat{H}\left[\int a_2(\theta)\, d\theta\right], \quad a_5(\theta) = \hat{H}\left[\int u_0\, d\theta\right],$$

$$a_6(\theta) = u_0' \int \frac{u_0}{(u_0')^2}\, d\theta, \quad \hat{H}[\psi(\theta)] \equiv u_0' \int \frac{1}{(u_0')^2}\left[\int u_0' \psi(\theta)\, d\theta\right] d\theta,$$

$$k_1 = p^2\beta^2 \lim_{\theta\to\pm\infty} \left[(\gamma_2/\gamma_1) \int a_2(\theta)\, d\theta - \int u_0(\theta)\, d\theta\right].$$

Знак «—» под символом предельного перехода соответствует положительной, а «+» — отрицательной дисперсии. Условия отсутствия в (3) секулярности дают Ω_1, Ω_2:

$$-\Omega_1^2 \gamma_1 + p^2\beta^2 \gamma_2 = 0, \quad \gamma_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\infty}^{\theta} u_0 d\theta\right) a_2'\, d\theta, \qquad \gamma_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\infty}^{\theta} u_0 d\theta\right) u_0'\, d\theta; \tag{4}$$

$$\operatorname{Im} \Omega_2 = -i p^2\beta^2 \frac{1}{2b_2}\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} b_4 + b_5 + h_2 + \frac{k_1 b_6}{p^2\beta^2}\right),$$

$$b_l = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{\infty}^{\theta} u_0 d\theta\right) a_l(\theta)\, d\theta, \quad h_l = \int_{-\infty}^{\infty} a_l(\theta) \left(\int_{\infty}^{\theta} u_0 d\theta\right) d\theta. \tag{5}$$

Из (4), (5) получим окончательно дисперсионное соотношение, которому соответствует линейное уравнение Бюргерса (так как $k_1 \sim p^2\beta^2$):

$$\Omega = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{1/2} p\beta - i p^2\beta^2 \left[\frac{(\gamma_2/\gamma_1) b_4 + b_5 + h_2 + (k_1 b_6)(p^2\beta^2)}{2b_2}\right] + O(\varepsilon^2). \tag{6}$$

Используя (6), найдем Ω для уравнения КП $(u_0 = 3A^2 \operatorname{ch}^{-2}[0{,}5\, A(x - A^2 t)])$ $a_2(\theta) = A^{-2}(u_0 + 0{,}5\,\theta u_0')$, $b_2 = \gamma_1 = -18A$, $\gamma_2 = -24A^3$, $k_1 = 2Ap^2\beta^2$, $(\gamma_2/\gamma_1) b_4 + b_5 + h_2 = -12$, $b_6 = -18A^{-1}$

$$\Omega = (2/\sqrt{3})\, A p\beta - i(4/3) A^{-1} p^2\beta^2, \tag{7}$$

что совпадает с результатом работы [5]. Для случая $F(u) = u^3/3$ — модифицированного уравнения КП — получим дисперсионное соотношение

$$\Omega = \sqrt{3}\, A p\beta - i(\pi A^{-1}/48) p^2\beta^2.$$

Подставляя (3) в (2), найдем по аналогии дисперсионное соотношение для поперечных возмущений солитона уравнения Клейна—Гордона:

$$\Omega = \frac{p}{(1-v^2)^{1/2}} - i \frac{vp^2}{1-v^2} \frac{b_3 + 2b_1 + 4v^2(b_1 + b_3) + (2b_1 - b_4)(1 - v^2)}{2b_0 - v^2(b_0 - 4b_2)} + O(\varepsilon^2), \tag{8}$$

где

$$b_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u_0'^2\, d\theta, \quad b_l = \int_{-\infty}^{\infty} u_0' a_l'\, d\theta, \quad a_1(\theta) = \hat{H}[u_0'],$$

$$a_2(\theta) = \hat{H}[u_0''] = 0{,}5\theta u_0', \quad a_3(\theta) = \hat{H}[\theta u_0''],$$

$$b_4 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \theta u_0'^2\, d\theta, \quad \theta = x - vt.$$

Выражению (8) также соответствует линеаризованное уравнение Бюргерса. Учет конечности малого возмущения солитона приводит к уравнению Бюргерса

$$u_t + \frac{2}{\sqrt{3}} A_\beta \left(u_y + \frac{2}{A}(u - 2A)\, u_y\right) - \frac{\beta^2}{A} u_{yy} = 0. \tag{9}$$

Уравнение (9) подробно изучено в [4] и позволяет описать этап эволюции солитона после появления особенности в рамках адиабатического приближения. Когда возмущения не малы, но локализованы на фронте, то (9) применимо для качественного описания заключительного этапа эволюции, когда амплитуды возникающих ударных волн становятся достаточно малыми (так как (9) справедливо для малой нелинейности).

Применяя рассмотренный метод к уравнению Заболотской—Хохлова [7]

$$\partial_x (u_t + u u_x - \mu u_{xx}) = -0{,}5\, c u_{yy}$$

(μ — коэффициент «вязкости», c — скорость звука), получим дисперсионное соотношение

$$\Omega^2 = \frac{cv}{2} p^2 - i \frac{8\mu v^{1/2}}{1 + 2v} (1 + \ln 2) \left(\frac{c}{2}\right)^{3/2} p^3$$

для поперечных возмущений, распространяющихся по фронту слабой ударной волны $u_0(x, t) = v[1 - \operatorname{th}(v/2\mu)(x - vt)]$. Выражение для Ω показывает, что слабая ударная волна $u_0(\theta)$ (с конечной шириной фронта $2\mu/v$) устойчива относительно поперечных возмущений и дает спектр ее затухающих колебаний. Учитывая конечность возмущения, получим, что эволюция вторичных ударных волн («shock-shocks») [4] описывается уравнением Бюргерса. Отметим, что полученная устойчивость $u_0(\theta)$ относительно поперечных возмущений согласуется с результатами работы [8].

Автор глубоко признателен В. И. Шрире за постановку задачи и полезное обсуждение и Г. И. Баренблатту за внимание к работе и полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— ДАН СССР, 1970, **192**, с. 753.
2. Островский Л. А., Шрира В. И.— ЖЭТФ, 1976, **71**, с. 1412.
3. Шрира В. И.— ЖЭТФ, 1980, **79**, с. 87.
4. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны.— М.: Мир, 1977, с. 279.
5. Захаров В. Е.— Письма в ЖЭТФ, 1975, **22**, с. 364.
6. Карпман В. И., Маслов В. М.— ЖЭТФ, 1978, **75**, с. 504.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.— М.: Наука, 1975, с 240.
8. Спектор М. Д.— Письма в ЖЭТФ, 1982, **35**, с. 181.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 10 августа 1982 г.

УДК 538.574.4

К ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

А. Н. Резник

Влияние случайных неоднородностей на тепловое излучение среды обычно исследуют, исходя из уравнения переноса [1]. Это уравнение является интегродифференциальным и в общем виде не решается. В настоящей работе проведен вывод уравнения переноса излучения из волнового уравнения с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью среды и заданными тепловыми источниками. Функция когерентности теплового поля при условии слабого рассеяния найдена в явном виде, при этом уравнение переноса представлено в форме, которая позволяет получить точное решение для интенсивности излучения и, вместе с тем, приближенно учесть многократное рассеяние. В работе установлена связь корреляции тепловых источников в волновой теории с источниками в теории переноса.

Будем исходить из волнового уравнения для скалярного поля $U(\boldsymbol{r})$, создаваемого сторонним током $j^{\text{ст}}(\boldsymbol{r})$: