

УДК 538.574

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧЕ О ДИФРАКЦИИ ВОЛН В МНОГОМОДОВЫХ ВОЛНОВОДАХ С ПЛАВНО МЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ

*Ю. А. Кравцов, В. М. Кузькин, В. Г. Петников*

Рассмотрена задача о дифракции волн на сравнительно малых телах, помещенных в многомодовый волновод. Решение задачи строится на основе разложения первичной волны на квазиплоские волны модового или лучевого типа, которые при рассеянии на теле порождают квазисферические волны. Разложение последних по собственным функциям волновода дает решение задачи дифракции. Особенность предлагаемого подхода заключается в том, что коэффициенты возбуждения рассеянного поля выражаются через диаграмму рассеяния тела в однородной свободной среде. Эффективность предлагаемого метода продемонстрирована на примере плоского волновода с однородным заполнением и с идеально отражающими стенками. Найдены сечения рассеяния тела при преобразовании цилиндрической падающей волны одного типа в цилиндрическую рассеянную волну другого типа. Полученные результаты обобщены также на случай плоскостойкого волновода с поглощением.

Задача о дифракции волн на рассеивателях, помещенных в волноводящую систему, представляет интерес для многих приложений. Она возникает при рассмотрении рассеяния радиоволн в ионосферном и тропосферном волноводах, звука в океане, света в волоконных и планарных световодах и т. д.

Строгое решение этой задачи сопряжено с преодолением серьезных математических трудностей. В данной работе предлагается упрощенный подход к решению задачи, применимый в условиях, когда в многомодовый волновод помещаются сравнительно малые рассеиватели, размеры которых малы по сравнению с масштабом неоднородности среды. Для задач этого класса расчет модового состава рассеянного поля можно осуществить в три этапа.

На первом этапе первичное поле разлагается на квазиплоские волны, например представляется в виде набора лучевых полей или суперпозиции нормальных волн в ВКБ описании [1, 2].

На втором этапе рассчитываются рассеянные поля, порожденные каждой из квазиплоских компонент первичного поля. Эти поля отыскиваются во френгоферовой зоне по отношению к рассеивателю и выражаются через диаграмму рассеяния в безграничной однородной среде. Результирующее рассеянное поле представляется в виде суммы лучевых квазисферических волн, покидающих рассеиватель.

На третьем этапе рассеянное поле лучевого типа разлагается по системе собственных волн многомодового волновода, при этом коэффициенты возбуждения отдельных мод в плавно неоднородной среде целесообразно вычислять по методу стационарной фазы.

Существенной особенностью предлагаемого подхода является то, что рассеянное поле как в лучевом, так и в модовом представлении выражается через диаграмму рассеяния в однородной среде. Рассмотрим более подробно отдельные этапы построения решения.

# 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПЕРВИЧНОГО ПОЛЯ В ВИДЕ НАБОРА КВАЗИПЛОСКИХ ВОЛН

*а) Лучевое описание.* В рамках лучевой теории первичное поле уже с самого начала представляется в виде суперпозиции квазиплоских волн:

$$u_{\text{пвк}}(R) = \sum_{\mu} A_{\mu}(R) \exp(i\Phi_{\mu}(R)), \quad k = \omega/c_0, \quad (1)$$

где амплитуды  $A_{\mu}$  и фазы  $\Phi_{\mu}$  вычисляются по законам геометрической оптики [3]. Направление квазиплоских волн в точке  $R$  характеризуется локальным волновым вектором  $k_{\mu}(R) = \nabla\Phi_{\mu}(R)$ .

Здесь и ниже условимся обозначать все величины, относящиеся к лучам, греческими индексами ( $\mu, \nu$  и т. д.), тогда как для нумерации нормальных волн мы будем использовать латинские индексы.

*б) Модовое представление.* В простейшем случае плоскостолбового волновода (коэффициент преломления зависит только от  $z$ ) первичное поле, на некотором расстоянии от источника, можно выразить в виде суммы распространяющихся цилиндрических волн:

$$u_{\text{пвк}}(R) = \sum_m \frac{a_m}{\sqrt{h_m|r-r_1|}} \psi_m(z) \exp(ih_m|r-r_1|), \quad (2)$$

где  $R = (r, z)$  — радиус-вектор точки наблюдения;  $a_m$  и  $h_m$  — амплитуда и постоянная распространения  $m$ -й моды,  $r = (x, y)$  — горизонтальная координата,  $r_1$  — координата источника,  $\psi_m(z)$  — соответствующая собственная функция. Собственные функции мы будем предполагать ортонормированными, т. е.

$$\int_{-H}^0 \psi_m(z) \psi_n(z) dz = \delta_{mn}, \quad (3)$$

где  $z=0$  и  $z=-H$  — верхняя и нижняя границы волновода.

Представление собственных волн через квазиплоские волны предполагает использование для функций  $\psi_m(z)$  приближения ВКБ [2], например для волн, которые отражаются от мягкой верхней границы и жесткой нижней границы и не имеют точек поворота:

$$\psi_m(z) = (1/\sqrt{s_m(z)N_m}) \sin \varphi_m(z),$$

$$\gamma_m(z) = ks_m(z) = \sqrt{k^2 n^2(z) - h_m^2},$$

$$N_m = \int_{-H}^0 s_m^{-1}(z) \sin^2 \varphi_m(z) dz, \quad (4)$$

$$\varphi_m(z) = \int_z^0 \gamma_m(z') dz';$$

при этом  $h_m$  находится из условия квантования  $\varphi_m(-H) = \pi(m - 1/2)$ . Квазиклассические решения при наличии одной или двух точек поворота отличаются некоторыми деталями: несколько иначе записывается условие квантования, точки поворота  $\bar{z}_m$  и (или)  $\underline{z}_m$  служат пределами интегрирования при вычислении  $\varphi_m(z)$ , в выражении для  $\varphi_m$  может появиться каустический сдвиг фазы  $\delta_m$ , волновая функция  $\psi_m(z)$  при переходе через точку поворота принимается равной нулю или описывается затухающей экспонентой [2].

Произведение  $\psi_m(z)$  на фазовый множитель  $\exp(ih_m|r-r_1|)$  можно рассматривать как сумму двух квазиплоских волн:

$$\psi_m(z) \exp(ih_m|r-r_1|) = \frac{1}{2i\sqrt{s_m N_m}} (\exp(i\Phi_m^+(R)) - \exp(i\Phi_m^-(R))), \quad (5)$$

где  $\Phi_m^\pm = h_m|r-r_1| \pm \varphi_m$ .

Локальные волновые векторы этих волн в точке  $R=(r, z)$  равны ( $\tau = (r-r_1)/|r-r_1|$ )

$$\mathbf{k}_m^\pm = \nabla\Phi_m^\pm = (h_m\tau, \pm \gamma_m(z)), \quad \gamma_m(z) = d\varphi_m/dz. \quad (6)$$

Подобные же представления можно развить и для трехмерных волноводов.

Лучевое представление (1) и квазиклассическая асимптотика собственных функций  $\psi_m(z)$  теряют силу в окрестности каустик. Ниже будем игнорировать случаи образования каустик, но отметим, что в принципе их можно было бы ввести в рассмотрение, используя те или иные равномерные асимптотические формулы.

## 2. ЛУЧЕВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАССЕЯННОЙ ВОЛНЫ

Пусть на тело, расположенное в точке  $R_0$  в свободном пространстве, падает плоская волна  $u_{\text{пад}} = A_0 \exp(i\mathbf{k}_0 R)$ . В результате рассеяния возникнет направленная сферическая волна

$$w_0(R) = A_0 \exp(i\Phi_0) f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}|R-R_0|)/|R-R_0|, \quad (7)$$

где  $\Phi_0 = \mathbf{k}_0 R_0$ ,  $\mathbf{k} = \mathbf{k}(R-R_0)/|R-R_0|$  — волновой вектор в направлении на точку наблюдения  $R$ , а  $f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k})$  — амплитуда рассеяния тела из направления  $\mathbf{k}_0$  в направление  $\mathbf{k}$  (рис. 1). Выражение (7) применимо в дальней зоне дифракции, т. е. при выполнении условия

$$|R-R_0| \gg l^2/\lambda, \quad (8)$$

где  $l$  — характерный поперечник тела.

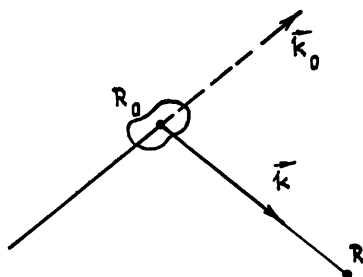


Рис. 1.

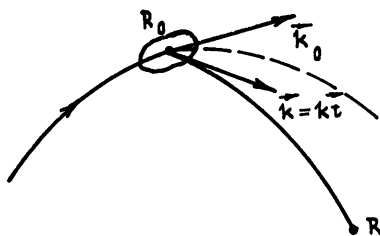


Рис. 2.

Если поместить теперь тело в плавно неоднородную среду (такую, что  $l|\nabla n| \ll n$ ) с тем же локальным значением коэффициента преломления  $n(R_0) = n_0$ , что и в однородной среде, то при падении первичной квазиплоской волны  $u_{\text{пад}} = A e^{i\Phi}$  (безразлично-лучевого или модового происхождения) появится направленная квазисферическая волна

$$w(R) = A(R_0) \exp(i\Phi(R_0)) f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}) g(R_0, R), \quad (9)$$

где  $g(R_0, R)$  — ненаправленная квазисферическая волна от точечного источника в плавно неоднородной среде:

$$g(R_0, R) = \sqrt{\frac{d\Omega}{ds} \frac{n(R_0)}{n(R)}} \exp\left(ik \int_{R_0}^R n(l) dl\right), \quad (10)$$

$d\Omega$  и  $ds$  — телесный угол и поперечное сечение трубки лучей, покидающих точку  $R_0$ ,  $\mathbf{k}_0 = \nabla\Phi(R_0)$ ,  $\mathbf{k}$  — локальный вектор поля рассеяния, отвечающий направлению выхода луча из точки  $R_0$  (рис. 2). Это выражение, как и (7), применимо при выполнении условия (8), если отсутствуют эффекты фокусировки рассеянного поля, описанные в [4].

Кроме (8) необходимо наложить еще условие малости вторично рассеянных полей, т. е. полей, которые снова рассеялись на теле после отражения от стенок волновода.

Если в точку наблюдения  $R$  приходит не один, а несколько лучей из точки  $R_0$ , то следует взять сумму соответствующих полей:

$$\psi(R) = A(R_0) \exp(i\Phi(R_0)) \sum_{\nu} f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}_{\nu}) g_{\nu}(R_0, R). \quad (11)$$

### 3. ПЕРЕХОД ОТ ЛУЧЕВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ К МОДОВОМУ

Разложение рассеянного поля (11) по собственным модам волнующей системы,

$$\psi(R) = \sum b_n(r) \psi_n(z), \quad (12)$$

предполагает определение коэффициентов  $b_n(r)$  по формуле

$$b_n(r) = \int_{-H}^0 \psi(R) \psi_n(z) dz. \quad (13)$$

При подстановке сюда лучевого поля (11) получаем

$$b_n(r) = A(R_0) \exp(i\Phi(R_0)) \sum_{\nu} \int_{-H}^0 \psi_n(z) f(\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}_{\nu}) g_{\nu}(R_0, R) dz. \quad (14)$$

Под знаком интеграла в (14) имеются две быстроосциллирующие функции  $\psi_n(z)$  и  $g_{\nu}(R, R_0)$ , так что интеграл целесообразно вычислять по методу стационарной фазы. Вычисление интеграла облегчается тем, что для данной моды  $n$  стационарные точки возникают далеко не для всех лучевых полей, так что фактически в (14) подлежат интегрированию только одно—два слагаемых.

Другой облегчающий момент заключается в том, что на некотором расстоянии от рассеивателя обычно можно ограничиться только низшими модами, так как моды высоких номеров сильно ослабляются из-за поглощения.

Осложняющим обстоятельством могут явиться каустики, отвечающие как рассеянным волнам, так и собственным функциям. Предлагаемый подход применим и в этом случае, но расчеты становятся более сложными.

### 4. ПРИМЕР. РАССЕЯНИЕ В МНОГОМОДОВОМ ПЛОСКОСЛОИСТОМ ВОЛНОВОДЕ С ИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩИМИ СТЕНКАМИ И ОДНОРОДНЫМ ЗАПОЛНЕНИЕМ

Предположим, как и в (4), что верхняя стенка волновода ( $z=0$ ) мягкая, а нижняя ( $z=-H$ ) — жесткая. Тогда нетрудно убедиться, что если  $w_0(R)$  — поле, рассеянное в вакууме, то поле, рассеянное внутри волновода, имеет вид

$$w(R) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} [w_0(R_{\nu}) - w_0(R'_{\nu})], \quad (15)$$

где  $R_v = R + 2Hi_z y$ ,  $R'_v = R' + 2Hi_z y$  и  $R' = (x, y, -z)$  — зеркальные изображения точки наблюдения  $R = (x, y, z)$  в стенках. Пользуясь (15), рассмотрим рассеяние на теле цилиндрической волны (2), где для рассматриваемого волновода

$$\psi_m(z)' = \sqrt{2/H} \sin \gamma_m z = (1/2i) \sqrt{2/H} (\exp(i\gamma_m z) - \exp(-i\gamma_m z)),$$

$\gamma_m = (\pi/H)(m - 1/2)$ , при этом локальные волновые векторы, отвечающие представлению (2) в виде квазиплоских волн, равны  $k_m^\pm = (h_m, \pm \gamma_m)$ .

Для такой первичной волны рассеянное поле  $\omega_0$  запишется как

$$\begin{aligned} \omega_0(R) = & \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{H}} \sum_m B_m [f(k_m^+ \rightarrow k) \exp(i\gamma_m z_0) - \\ & - f(k_m^- \rightarrow k) \exp(-i\gamma_m z_0)] \exp(ik|R - R_0|) / |R - R_0|, \end{aligned} \quad (16)$$

где в силу (2) ...

$$B_m = (a_m / \sqrt{h_m |r_0 - r_1|}) \exp(ih_m |r_0 - r_1|). \quad (17)$$

Подставив (16) в (15), мы получаем лучевое представление рассеянного поля вида (11). Вычисление по методу стационарной фазы коэффициентов  $b_n$  (13) не встречает каких-либо принципиальных затруднений. При выбранном значении  $n$  в интервал  $(-H < z < 0)$  попадает только одна стационарная точка  $z_{ст}$  для какого-либо из слагаемых  $\omega_0(R_v)$  и одна — для какого-либо из слагаемых  $\omega_0(R'_v)$ , при этом  $\pi$ -окрестность стационарной точки (т. е. окрестность, в которой фаза подынтегрального выражения отличается от стационарного значения не более чем на  $\pi$ ) равна  $\Delta z_n = \sqrt{\lambda r / \cos \beta_n}$  (здесь  $\cos \beta_n = h_n/k = \sqrt{k^2 - \gamma_n^2}/k$ ,  $\beta_n$  — угол между векторами  $k_n^\pm$  и горизонталью). При выполнении условия

$$|r - r_0| \gg (l^2/\lambda) \cos \beta_n \quad (18)$$

амплитуды рассеяния  $f(k_m^\pm \rightarrow k)$  практически постоянны в пределах  $\pi$ -окрестности ( $z_{ст} - \Delta z_n/2, z_{ст} + \Delta z_n/2$ ), и их можно вынести за знак интеграла со значением при  $k = k_{ст} = k_n^+$  или  $k_n^-$ .

Интересно отметить, что для высших мод, для которых  $\beta_n \rightarrow \pi/2$  и  $\cos \beta_n \rightarrow 0$ , условие (18) значительно мягче, чем для низших мод, для которых  $\beta_n \ll 1$  и  $\cos \beta_n \sim 1$ . Объясняется это тем, что для высших мод путь волны из точки рассеяния  $R_0 = (r_0, z_0)$  в точку наблюдения  $R = (r, z)$  удлиняется из-за многократных отражений от стенок, так что общая длина ломаной трассы  $L \sim |r - r_0| / \cos \beta_n$  удовлетворяет обычному условию дальней зоны  $L \gg l^2/\lambda$ .

При  $|r - r_0| \ll H^2 \cos \beta_n / \lambda$  ширина  $\pi$ -окрестности  $\Delta z_n$  значительно меньше ширины волновода  $H$ , поэтому пределы интегрирования в (13) можно распространить до бесконечности. Исключение составляют только случаи, когда точка  $z_{ст}$  приближается к границам волновода ближе, чем на  $\Delta z_n$ , так что  $\pi$ -окрестность выходит за пределы волновода. Однако можно убедиться, что одновременно в волновод частично заходит  $\pi$ -окрестность другой стационарной точки  $\tilde{z}_{ст}$  из бесконечной суммы (15), хотя сама стационарная точка  $\tilde{z}_{ст}$  лежит вне интервала  $(-H < z < 0)$ . Суммарный вклад от двух неполных  $\pi$ -окрестностей оказывается при этом в точности равным вкладу от стационарной точки  $z_{ст}$  при использовании бесконечных пределов. Этот вывод сохраняет

силу и при  $|r - r_0| > H^2 \cos^3 \beta_n / \lambda$ , когда внутри волновода одновременно находятся части нескольких  $\pi$ -окрестностей.

В итоге мы приходим к следующему результату:

$$b_n = \sqrt{\frac{2\pi i}{h_n |r - r_0|}} \exp(ih_n |r - r_0|) \sum_m B_m S_{mn}, \quad (19)$$

где компоненты матрицы рассеяния на теле  $S_{mn}$  даются выражением

$$S_{mn} = \left( \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{2}{H}} \right)^2 \{ f(\mathbf{k}_m^+ \rightarrow \mathbf{k}_n^-) \exp[i(\gamma_m + \gamma_n)z_0] - \\ - f(\mathbf{k}_m^- \rightarrow \mathbf{k}_n^-) \exp[i(\gamma_n - \gamma_m)z_0] - f(\mathbf{k}_m^+ \rightarrow \mathbf{k}_n^+) \times \\ \times \exp[i(\gamma_m - \gamma_n)z_0] + f(\mathbf{k}_m^- \rightarrow \mathbf{k}_n^+) \exp[-i(\gamma_m + \gamma_n)z_0] \}. \quad (20)$$

Это выражение симметрично относительно перемены индексов местами,  $S_{mn} = S_{nm}$ , как это и должно быть в силу теоремы взаимности для волновода\*.

Формула (19) вместе с множителем  $\psi_n(z)$  описывает  $n$ -ю моду цилиндрической волны, которая возникла при рассеянии  $m$ -й моды (2).

В случае всенаправленного (изотропного) рассеяния, которое реализуется для малых тел ( $l \leq \lambda$ ), имеем  $f(\mathbf{k}_1 \rightarrow \mathbf{k}_2) = \text{const} = f_0$ . Тогда элемент матрицы  $S_{mn}$  принимает компактный вид:

$$S_{mn} = f_0 (V\sqrt{2/H})^2 \sin \gamma_m z_0 \sin \gamma_n z_0 = f_0 \psi_m(z_0) \psi_n(z_0), \quad (21)$$

тогда как для  $b_n$  получаем выражение

$$b_n = \sum_m \frac{a_m \sqrt{2\pi i} f_0}{\sqrt{h_m h_n N_m N_n}} \psi_m(z_0) \psi_n(z_0). \quad (22)$$

Полезно подчеркнуть, что последнее выражение можно вывести и непосредственно, не прибегая к лучевому разложению вблизи рассеивателя, причем не только для рассматриваемого здесь частного случая, но и для волновода любого типа.

Выражение для матрицы рассеяния (20) можно обобщить и на случай неоднородного по  $z$  волновода, заменив  $\sqrt{2/H} \exp(i\gamma_m z)$  на соответствующую квазиклассическую функцию  $(1/\sqrt{N_m S_m}) \exp(i\varphi_m(z))$  (см. формулы (4), (5) и пояснения к ним). Тогда

$$S_{mn} = (1/[(2i)^2 \sqrt{S_m S_n N_m N_n}]) \{ f(\mathbf{k}_m^+ \rightarrow \mathbf{k}_n^-) \times \\ \times \exp[i(\varphi_m + \varphi_n)] - f(\mathbf{k}_m^- \rightarrow \mathbf{k}_n^-) \exp[i(\varphi_n - \varphi_m)] - \\ - f(\mathbf{k}_m^+ \rightarrow \mathbf{k}_n^+) \exp[i(\varphi_m - \varphi_n)] + f(\mathbf{k}_m^- \rightarrow \mathbf{k}_n^+) \exp[-i(\varphi_m + \varphi_n)] \}. \quad (23)$$

Другое обобщение касается учета ослабления волн. Формально поглощение можно учесть, считая постоянные распространения  $h_m$  комплексными величинами:  $h_m \rightarrow h_m + i\alpha_m$ , так что, например,

$$\exp(ih_m |r - r_1|) \rightarrow \exp(ih_m |r - r_1| - \alpha_m |r - r_1|).$$

\* При проверке свойств взаимности следует иметь в виду равенство  $f(\mathbf{k}_m^+ \rightarrow \mathbf{k}_n^+) = f(\mathbf{k}_n^- \rightarrow \mathbf{k}_m^-)$  (где  $\alpha, \beta = \pm$ ), которое вытекает из обычной теоремы взаимности.

## 5. СЕЧЕНИЕ РАССЕЙЯНИЯ

Среднее по сечению значение потока энергии, переносимой в волноводе волной  $m$ -го типа, равно

$$P_m = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 I_m(z) dz = h_m |c_m|^2 / k_0 H. \quad (24)$$

Для плоскостойких волноводов сечение рассеяния из  $m$ -й моды в  $n$ -ю целесообразно ввести как коэффициент пропорциональности между мощностью падающей ( $P_m$ ) и рассеянной ( $Q_n$ ) волн с учетом цилиндрической расходимости  $1/|r - r_0|$ :

$$Q_n = P_m \sigma_{mn} / |r - r_0|. \quad (25)$$

Таким образом, величина  $\sigma_{mn}$  определяет эффективность преобразования энергии поля при рассеянии.

Подстановка (22) — (24) в (25) дает

$$\sigma_{mn} = 2\pi |S_{mn}|^2 / h_m. \quad (26)$$

В частном случае изотропного рассеяния в соответствии с (21) имеем

$$\sigma_{mn} = 2\pi |f_0|^2 |\psi_m(z_0)|^2 |\psi_n(z_0)|^2 / h_m. \quad (27)$$

### ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
2. Распространение волн и подводная акустика./Под ред. Дж. Б. Келлера и Дж. С. Пападакиса.— М.: Мир, 1980.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
4. Кондратьев И. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 22, № 1, с. 118.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
АН СССР

Поступила в редакцию  
20 апреля 1982 г.,  
после доработки  
28 сентября 1982 г.

### APPROXIMATE APPROACH TO THE PROBLEM OF WAVE DIFFRACTION IN MULTIMODE WAVEGUIDES WITH SMOOTHLY VARYING PARAMETERS

*Yu. A. Kravtsov, V. M. Kuz'kin, V. G. Petnikov*

In this study we deal with wave diffraction on relatively small bodies placed in multimode waveguides. To solve the problem we decompose the primary wave into quasi-planar waves of modal or ray types, which are scattered on bodies and give rise to quasi-spherical waves. By expanding these latter in eigenfunctions of a waveguide we resolve the diffraction problem. It is noteworthy that within the suggested approach the amplitudes of normal waves of scattered field are expressed via pattern of body scattering in a homogeneous free medium.

The method has proved to be efficient in the case of a flat homogeneously filled waveguide with perfectly reflecting walls. We have determined a body scattering cross-section assuming that a cylindrical incident wave of one type switches to a cylindrical scattered wave of another type. The results obtained have been also extended to the case of a plane-stratified waveguide with absorbing walls.