ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 4 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 538.56 : 519.25

ЗАДАЧА ОБРАТНОГО РАССЕЯНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ СЛУЧАЙНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Б. М. Шевцов

Для трехмерных случайно-неоднородных сред на основе нелинейного уравнения для рассеянного назад поля изучаются статистические характеристики обратного рассеяния в диффузионном приближении. Получены выражения для моментов коэффициента отражения, и с их использованием проанализированы моменты интенсивности обратного рассеяния на конкретном примере спектра падающего поля.

В связи с вопросами зондирования неоднородных сред и локации большой интерес представляет задача обратного рассеяния (ОР) в трехмерных случайно-неоднородных средах. В рамках статистической теории с применением различных методов эта задача рассматривалась многими авторами (см., например, [1–3]). В [4, 5] ОР изучалось на основе нелинейного уравнения для рассеянного назад поля. Нелинейное уравнение, для которого ставится задача с начальными данными, позволяет получить систему уравнений для статистических характеристик ОР поля (моментов) в диффузионном приближении. Решение этой системы в первом приближении по интенсивности флуктуаций позволяет построить модифицированную теорию возмущений, существенно отличающуюся от борновского приближения.

Роль модифицированной теории возмущений изучалась на конкретном примере слоистых случайно-неоднородных сред [6], поскольку там удается получить также и точное решение системы уравнений для статистических характеристик ОР поля, полученной в диффузионном приближении. При сопоставлении двух решений выяснилось, что модифицированная теория возмущений кроме того, что она применима только в случае малого ОР, еще и не учитывает накапливающихся со временем эффектов, что приводит к неправильному затуханию моментов интенсивности ОР. В связи с этим, а также в связи с вопросами дальнего зондирования неоднородных сред и локации представляет интерес и в трехмерных средах получить решение системы уравнений для статистических характеристик поля ОР более точное, чем первое приближение, т. е. выйти за рамки модифицированной теории возмущений и исследовать ее область применимости.

Следуя работе [7], будем рассматривать рассеяние на слое случайно-неоднородной среды толщины L, стационарной, согласованной с окружающим пространством. ОР поле в плоскости раздела сред со стороны падающего поля представимо в виде

$$U_L(\rho, t) = \int d\varkappa\, d^2p\, d^2q\, R_L(p, q, \varkappa) f(p, \varkappa)\, U_0(q, \varkappa) \exp(ip\rho - i\varkappa ct), \quad (1)$$

где ρ — двумерный вектор в плоскости раздела сред, t — время, c — скорость сигнала, $f(p, \varkappa)$ — характеристика приемника (для идеального приемника $f=1$), $U_0(q, \varkappa)$ — трехмерный спектр падающего поля, а величина $R_L(p, q, \varkappa)$ — коэффициент отражения, который, согласно [7], подчиняется уравнению

$$(\partial/\partial L)\,R_L = i\Omega R_L + I_L, \quad R_L|_{L=0} = 0, \tag{2}$$

где $\Omega = \sigma_p + \sigma_q$, $\sigma_p = \sqrt{k^2 - p^2}$, $k = \varkappa + i\gamma$, γ — коэффициент поглощения, а величина I_L определяется равенством

$$I_L = \frac{ik^2}{2\sigma_p} \int d^2p_1 d^2q_1 \left[\delta(p - p_1) + \frac{\sigma_p}{\sigma_{p_1}} R_L(p, p_1, \varkappa)\right] \times$$
$$\times\, \varepsilon_L(p_1 - q_1)\,[\delta(q_1 - q) + R_L(q_1, q, \varkappa)]. \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon_L(p) = [1/(2\pi)^2] \int d^2\rho \tilde{\varepsilon}_L(\rho)\, e^{i - p\rho}$, а $\tilde{\varepsilon}_L(\rho) \equiv \tilde{\varepsilon}(L, \rho)$ — характеристика неоднородной среды (отклонение диэлектрической проницаемости от единицы), $\langle \varepsilon_L^2(\rho)\rangle \ll 1$.

В качестве модели среды выберем $\varepsilon_L(p)$ гауссовым полем с конечным радиусом корреляции и статистическими характеристиками

$$\langle \varepsilon_L(p)\rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_L(p)\, \varepsilon_{L'}(p')\rangle = A_{L-L'}(|p|)\, \delta(p + p').$$

Все моменты ОР поля, согласно (1), выражаются интегрально через моменты коэффициента отражения $\left\langle \prod\limits_{i,j=1}^{n,m} R_i R_j^* \right\rangle$, где $R_i = R_L(p_i, q_i, \varkappa_i)$, $R_j^* = R_L^*(p_j, q_j, \varkappa_j)$, а переменные с индексами «i» и «j» пробегают разные наборы точек. Для этого момента почленным дифференцированием с использованием (2) можно получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial L}\left\langle \prod_{i,j=1}^{n,m} R_i R_j^* \right\rangle = i\left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_k - \sum_{l=1}^{m} \Omega_l^*\right)\left\langle \prod_{i,j=1}^{n,m} R_i R_j^* \right\rangle +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\left\langle \frac{I_k}{R_k} \prod_{i,j=1}^{n,m} R_i R_j^* \right\rangle + \sum_{l=1}^{m}\left\langle \frac{I_l^*}{R_l^*} \prod_{i,j=1}^{n,m} R_i R_j^* \right\rangle. \tag{4}$$

Переменные с индексом «k» пробегают тот же набор точек, что и переменные с индексом «i», а переменные с индексом «l» имеют тот же набор точек, что и переменные с индексом «j».

Коэффициент при первом члене в правой части (4) есть частота осцилляций по L, и он мал, если $m = n$. Таким образом, можно выделить квадратичные комбинации коэффициента отражения ($m = n$) из общего числа моментов как медленно осциллирующие по L функции, а все другие моменты в дальнейшем будут исключаться из рассмотрения за счет дополнительного усреднения по быстрым осцилляциям. Далее всюду уравнение (4) рассматривается при $m = n$.

При расщеплении корреляций в двух последних членах уравнения (4) потребуется знание вариационной производной $\delta R_L(p, q, \varkappa)/\delta\varepsilon_\xi(p_0)$. Ее можно искать из решения уравнения, которое получается непосредственным варьированием уравнения (2). Решить в общем случае уравнение для вариационной производной не представляется возможным, однако это и не требуется ввиду того, что при расщеплении корреляций в уравнении (4) вариационная производная появляется в произведении с $A_{L-\xi}(p)$. Поскольку выражение для вариационной производной требуется знать на масштабах порядка продольного радиуса корреляции, а он мал, то достаточно решить уравнение для вариационной производной в нулевом приближении по интенсивности флуктуации. Это решение будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\delta R_L(p, q, \varkappa)}{\delta\varepsilon_\xi(p_0)} \simeq \frac{ik^2}{2\sigma_p} \int d^2p_1 d^2q_1 \Big\{\delta(p - p_1) \exp[i\sigma_p(L - \xi)] +$$

$$+\frac{\sigma_p}{\sigma_{p_1}} R_L(p, p_1, \varkappa) \exp[-i\sigma_{p_1}(L-\xi)] \Big\} \delta(p_1 - q_1 - p_0) \times$$
$$\times \{\delta(q_1 - q) \exp[i\sigma_q(L-\xi)] + R_L(q_1, q, \varkappa) \exp[-i\sigma_{q_1}(L-\xi)]\}. \tag{5}$$

При $L-\xi \to 0$, т. е. при переходе к дельта-коррелированному приближению, выражение (5) переходит в начальное условие для вариационной производной. Использование конечности радиуса корреляции существенно при рассмотрении ОР, поскольку дельта-коррелированное приближение не всегда применимо и может привести к некорректным выражениям. Это будет показано ниже. Отметим лишь, что выражение (5) приводит к уравнению диффузионного типа для производящего функционала [8], а поэтому можно утверждать, что уравнение (4) с использованием выражения (5) при расщеплении корреляций дает систему интегродифференциальных уравнений для моментов коэффициента отражения в диффузионном приближении с конечным радиусом корреляции. Эта система уравнений имеет следующий вид (опущены все неквадратичные комбинации коэффициента отражения):

$$\frac{\partial}{\partial L}\left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle = \left[i\left(\sum_{k=1}^{n}\Omega_k - \sum_{l=1}^{n}\Omega_l^*\right) - \tilde{D}\right]\left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} F_{kl}\,\delta(p_k - q_k - p_l + q_l)\left\langle \frac{1}{R_k R_l^*}\prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle + J. \tag{6}$$

Здесь введены обозначения

$$\tilde{D} = \sum_{k=1}^{n}\left(D^{\text{в}}_{p_k} + D^{\text{н}}_{p_k} + D^{\text{в}}_{q_k} + D^{\text{н}}_{q_k}\right) + \sum_{l=1}^{n}\left(D^{\text{в}}_{p_l} + D^{\text{н}}_{p_l} + D^{\text{в}}_{q_l} + D^{\text{н}}_{q_l}\right)^*,$$

где

$$D^{\text{в}}_{p_k} = \frac{k_k^4}{4\sigma_{p_k}}\int_0^L d\xi \int \frac{d^2\tau}{\sigma_\tau} A_\xi(p_k - \tau)\exp[i(\sigma_\tau - \sigma_{p_k})\xi]; \tag{7}$$

$$D^{\text{н}}_{p_k} = \frac{k_k^4}{4\sigma_{p_k}}\int_0^L d\xi \int \frac{d^2\tau}{\sigma_\tau} A_\xi(p_k - \tau)\exp[i(\sigma_\tau + \sigma_{p_k})\xi]. \tag{8}$$

Матричный коэффициент F_{kl} в системе уравнений (6) имеет вид

$$F_{kl} = \frac{k_k^2 k_l^{*2}}{4\sigma_{p_k}\sigma^*_{p_l}}\int_0^L d\xi\,\{A_\xi(p_k - q_k)\exp[-i(\sigma^*_{p_l} + \sigma^*_{q_l})\xi] +$$
$$+ A^*_\xi(p_l - q_l)\exp[i(\sigma_{p_k} + \sigma_{q_k})\xi]\}. \tag{9}$$

Там же величиной J обозначена совокупность интегральных членов. В интегральных членах (всего их 26) фигурируют моменты того же порядка, что и искомый, а также моменты следующего порядка $2n+2$.

Выражения (7) и (8) в приближении однократного рассеяния можно связать с сечениями рассеяния вперед и назад соответственно [1]. Нетрудно заметить, что формальное применение дельта-коррелированного приближения для поля неоднородностей среды в выражениях (7) и (8) сделает их равными, что, вообще говоря, неверно. В оптике атмосферы и в гидрооптике эти величины могут отличаться на несколько порядков. Из этого можно сделать вывод, что в общем случае дельта-коррелированное приближение не применимо в отношении ОР.

В первом приближении по интенсивности флуктуации положим $J=0$. Тогда в стационарном случае ($L \to \infty$) система уравнений (6) приводит к рекуррентной связи между моментами, которая при $n=1$ дает решение для $\langle RR^* \rangle$. Эта величина исследовалась в работах [4, 5]. Полезность первого приближения, которое совпадает с модифицированной теорией возмущений [4, 5], заключается прежде всего в том, что оно позволяет изучить масштабы переменных, на которых моменты коэффициента отражения меняются существенным образом, и на основании этого провести оценку интегральных членов системы уравнений (6). Затем, используя теорему о среднем, выполним суммирование (приближенно) в уравнениях (6) и в фигурирующих там интегральных членах J следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} F_{kl}\, \delta (p_k - q_k - p_l + q_l) \left\langle \frac{1}{R_k R_l^*} \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle \simeq$$

$$\simeq n^2 F \delta (p - q - p' + q') \left\langle \frac{1}{RR^*} \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle .$$

Здесь R, F и δ взяты от усредненных аргументов, которые находятся по формулам $p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_k$, $p' = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} p_l$ и т. д. В результате оценки интегральных членов и приближенного суммирования уравнения (6) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial L} \left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle &\simeq \left[i \left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_k - \sum_{l=1}^{n} \Omega_l^* \right) - n \left(D^{\text{в}}_{pp'} + D^{\text{н}}_{pp'} + \right.\right. \\ &\left.\left. + D^{\text{в}}_{qq'} + D^{\text{н}}_{qq'} \right) \right] \left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle + n^2 F \delta (p - q - p' + q') \times \\ &\times \left\langle \frac{1}{RR^*} \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle + \left[2 (n - n^2) D^{\text{н}}_J + 2n D^{\text{в}}_J \right] \left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle + \\ &+ n^2 D^{\text{н}2}_J \left[F \delta (p - q - p' + q') \right]^{-1} \left\langle RR^* \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle . \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь $D^{\text{в}}_{pp'} = D^{\text{в}}_p + D^{\text{в}*}_{p'}$, $D^{\text{в}}_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} D^{\text{в}}_{p_k}$, $D^{\text{в}*}_{p'} = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} D^{\text{в}*}_{p_l}$ и т. д., величины $D^{\text{в}}_J$ и $D^{\text{н}}_J$ получились в результате оценки интегральных членов, и для них справедливы соотношения $D^{\text{в, н}}_J \simeq D^{\text{в, н}}_{pp', qq'}$. При оценке интегральных членов часть из них сократилась, два последних слагаемых в (10) есть результат этого сокращения. Символ δ^{-1} следует понимать как интегральный оператор. Запись в такой форме подсказывает структуру решения. Упрощая уравнения (10) согласно соотношениям $D^{\text{в, н}}_J \simeq D^{\text{в, н}}_{pp', qq'}$ (при этом сокращаются величины, связанные с рассеянием вперед; такое обстоятельство можно трактовать как нулевое приближение по характеристикам рассеяния вперед), будем искать решение (10) в виде

$$\left\langle (RR^*)^m \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle = \left(\frac{F \delta (p - q - p' + q')}{D^{\text{н}}_J} \right)^m \times$$

$$\times \prod_{l=j=1}^{n} \frac{F_{lj}\delta(p_l - q_l - p_j + q_j)}{D_J^{\text{н}}} M_n^m,$$

где $m=-n, \ldots, \infty$. Очевидно, что выполняется нормировочное условие $\left\langle (RR^*)^{-n} \prod\limits_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle \simeq M_n^{-n} \simeq 1$ (момент нулевого порядка). Из уравнений (10) нетрудно получить уравнения для величин M_n^m при любых m, которые можно решать методом производящей функции или переходом к уравнению типа уравнения для плотности вероятности с комплексными коэффициентами [8]. Решение этих уравнений в явном виде удается получить в стационарном случае ($L \to \infty$), который соответствует рассеянию на полупространстве. В полученном решении, полагая $m=0$, будем иметь величину M_n^0, через которую выражается искомый момент коэффициента отражения $\left\langle \prod\limits_{i,j=1} R_i R_j^* \right\rangle$, и в конечном итоге он будет выглядеть следующим образом:

$$\left\langle \prod_{i,j=1}^{n} R_i R_j^* \right\rangle \simeq \prod_{l=j=1}^{n} \frac{F_{lj}\delta(p_l - q_l - p_j + q_j)}{D_J^{\text{н}}} \times \int_0^\infty dx \left(\frac{x}{x+2}\right)^n \beta e^{-\beta x}, \tag{11}$$

где

$$\beta = -i\left(\sum_{k=1}^{n} \Omega_k - \sum_{l=1}^{n} \Omega_l^*\right) \Big/ 2nD_J^{\text{н}}.$$

Проанализируем выражение (11) на конкретном примере спектра падающего поля и характеристики приемника вида

$$f(p, \varkappa)\, U_0(q, \varkappa) = \frac{\alpha a^2}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{p^2}{2p_0^2} - \frac{a^2}{2} q^2 - \frac{\alpha^2}{2} (\varkappa - \varkappa_0)^2\right]. \tag{12}$$

Параметры выражения (12) удовлетворяют условиям $\alpha\varkappa_0,\ a\varkappa_0 \gg 1$, $\psi = p_0/\varkappa_0 \ll 1$. С учетом этого в параметре β можно разложить корни σ_p в малоугловом приближении. Если выполнить многократное интегрирование (11) со спектром (12) согласно выражению (1), то для моментов интенсивности ОР получается выражение

$$\langle I^n(\rho, t)\rangle \simeq 2n\psi^{2n} \int_0^\infty dy \frac{y^{n-1}}{(y+2)^{n+1}} B^{-n} \exp\left[-\frac{2\gamma}{D} y - \frac{1}{\varphi_1^2 n} (y - nT)^2 - \frac{\rho^2}{a^2} nB^{-1}\right],$$

где

$$B = 1 + \frac{1}{(ap_0)^2} + \frac{(y/2)^2}{\varphi_2^2 n^2} + \psi^2 \frac{(y/2)^2}{\varphi_3^2 n^2}, \quad T = Dct,$$
$$\varphi_1 = \alpha D, \quad \varphi_2 = a^2 \varkappa_0 D, \quad \varphi_3 = aD, \quad D \equiv D_J^{\text{н}}. \tag{13}$$

При условии $ap_0 \gg 1$ $B \simeq 1 + \psi^2 (y/2)^2 \varphi_3^{-2} n^{-2}$.

Можно вычислить асимптотику выражения (13) при условиях $\varphi_1\sqrt{n} \ll 1$, $\varphi_1 \ll \sqrt{n}T$. Она имеет вид

$$\langle I^n(\rho, t)\rangle \simeq 2n\varphi_1 \sqrt{\pi n}\, \psi^{2n} \frac{(nT)^{n-1}}{(nT+2)^{n+1}} \hat{B}^{-n} \exp\left[-\frac{2\gamma}{D} nT - \frac{\rho^2}{a^2} n\hat{B}^{-1}\right].$$

Здесь

$$\hat{B} = 1 + \psi^2 \frac{(nT/2)^2}{\varphi_3^2 n^2} = 1 + \left(\frac{\psi ct}{2a}\right)^2. \qquad (14)$$

Аналогичная асимптотика при $n=1$, вычисленная в рамках первого приближения (модифицированной теории возмущений) [5], совпадает с (14) во временном интервале $\varphi_1 \ll T \ll 1$, но существенно отличается при $T \gg 1$. Это и говорит о неучете накапливающихся эффектов первым приближением. В случае слоистых сред это отмечалось в [6].

Выражение (14) при $n=1$ на интервале $\varphi_1 \ll T \ll 1$ ведет себя, как T^{-2}, а при $T \gg 1$, как T^{-4}. Последнее обстоятельство может оказаться полезным при оценках дальности зондирования неоднородных сред.

Вычисление относительной дисперсии интенсивности ОР на основании выражения (14) дает ее поведение на интервале $\varphi_1 \ll T \ll 1$, как $T^{1/2}$, а на интервале $T \gg 1$, как T, что говорит о росте флуктуаций интенсивности ОР со временем.

Отметим, что метод данной работы может быть обобщен на нестационарные среды, а также на другие статистические модели среды.

Автор выражает глубокую благодарность В. И. Кляцкину за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. 2.— М.: Наука, 1978.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах.— М.: Мир, 1981, 2.
3. Саичев А. И.— Изв. вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 11, с. 1305.
4. Шевцов Б. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 11, с. 1351.
5. Шевцов Б. М. Тезисы докладов на VIII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн.— Львов, 1981, т. 2, с. 163.
6. Шевцов Б. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1982, 25, № 9, с. 1032.
7. Бабкин Г. И., Кляцкин В. И., Любавин Л. Я.— ДАН СССР, 1980, 250, № 5, с. 1112.
8. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах.— М.: Наука, 1980.

Тихоокеанский океанологический институт
ДВНЦ АН СССР

Поступила в редакцию
7 апреля 1982 г.,
после доработки
14 сентября 1982 г.

A PROBLEM OF BACK SCATTERING IN THREE-DIMENSIONAL RANDOMLY INHOMOGENEOUS MEDIA

B. M. Shevtsov

Statistical characteristics of back scattering in the diffuse approximation is studied for three-dimensional randomly inhomogeneous media based on the nonlinear equation for the field scattered backwards. Expressions have been derived for the moments of the reflection coefficient. The intensity moments of back scattering are analysed by the concrete example of the incident field spectrum.