ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 535.31

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ СТАТИСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНУЮ СРЕДУ

Ф. Г. Басс, Г. М. Притула, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Показано, что в случае больших флуктуаций диэлектрической проницаемости медленная волна пространственного заряда усиливается, а быстрая затухает. При малых флуктуациях диэлектрической проницаемости среды волны обоих типов затухают.

При прохождении потоков заряженных частиц через электрически неоднородную среду возникает своеобразная неустойчивость электромагнитных волн [1–3]. Она связана с преобразованием на границе энергии волн пространственного заряда, возникающих в пучке, в собственные колебания системы. Такого рода неустойчивости изучались в средах, у которых диэлектрическая проницаемость регулярно изменяется с координатой.

Между тем возникает ряд задач, в которых поток заряженных частиц проходит через среду с флуктуациями диэлектрической проницаемости, например, при прохождении потоков космических частиц через ионосферу и тропосферу, протекании электрического тока через случайно-неоднородный полупроводник и т. д.

Настоящее сообщение посвящено исследованию неустойчивостей, развивающихся при прохождении потока заряженных частиц через среду с одномерными флуктуациями диэлектрической проницаемости.

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость зависит лишь от координаты x. Вдоль этой же координаты направлена постоянная составляющая скорости пучка v_0. Будем также считать, что вдоль оси $0x$ приложено настолько сильное магнитное поле, что высокочастотная скорость электронов направлена также вдоль магнитного поля. Ограничимся линейной теорией.

Рассмотрим потенциальные колебания, которые обладают при такого рода неустойчивостях максимальным инкрементом.

Полная система уравнений задачи состоит из уравнений непрерывности и движения частиц, а также уравнения Пуассона, линеаризованных относительно стационарных значений плотности и скорости заряженных частиц. Зависимость всех величин от времени предполагается экспоненциальной $\sim e^{-i\omega t}$.

Исключая из системы уравнений высокочастотные составляющие скорости и плотности, сводим задачу к уравнению

$$d^2/dx^2(\varepsilon\mathscr{E}) + (\omega_0^2/v_0^2)\mathscr{E} = 0. \qquad (1)$$

Здесь ε — диэлектрическая проницаемость среды, в которой движется пучок, величина $\mathscr{E}$ связана с электрическим полем E соотношением $E=\exp(i\omega x/v_0)\mathscr{E}$, $\omega_0^2=4\pi e^2 n_0/m$ — ленгмюровская частота, n_0 — невозмущенная плотность пучка, m — масса заряженной частицы. Нас будет интересовать инкремент нарастания для среднего поля.

Задачу решаем методом, предложенным впервые в работе [4] и развитым в работах [5, 6].

Представим величины ε и $\mathscr{E}$ в виде

$$\varepsilon = \overline{\varepsilon} + \varepsilon', \quad \mathscr{E} = \overline{\mathscr{E}} + \mathscr{E}'. \tag{2}$$

Чертой обозначается среднее значение величины, а штрихом—ее флуктуация. Среднее значение $\overline{\varepsilon}$ предполагается независящим от координаты.

Усреднив уравнение (1) и вычитая из (1) усредненное уравнение, для $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$ получим систему уравнений:

$$d^2/dx^2(\overline{\varepsilon}\overline{\mathscr{E}} + \overline{\varepsilon'\mathscr{E}'}) + (\omega_0^2/v_0^2)\overline{\mathscr{E}} = 0; \tag{3}$$

$$d^2/dx^2(\varepsilon'\overline{\mathscr{E}}' + \overline{\varepsilon}\mathscr{E}' + \varepsilon'\overline{\mathscr{E}} - \overline{\varepsilon'\mathscr{E}'}) + (\omega_0^2/v_0^2)\mathscr{E}' = 0. \tag{4}$$

Эта система может быть решена при следующих допущениях: 1) $\omega_0^2 l_0^2/v_0^2 \ll 1$ (l_0 — характерный масштаб изменения диэлектрической проницаемости); 2) флуктуации диэлектрической проницаемости малы настолько, что слагаемым $\varepsilon'\mathscr{E}' - \overline{\varepsilon'\mathscr{E}'}$ в уравнении (4) можно пренебречь.

Рассмотрим первый случай. В силу сделанных допущений величиной $(\omega_0^2/v_0^2)\,\mathscr{E}'$ в уравнении (4) можно пренебречь. В результате интегрирования получаем:

$$\overline{\varepsilon'\mathscr{E}'} = (\varepsilon_{\text{эфф}} - \overline{\varepsilon})\,\overline{\mathscr{E}}, \quad \mathscr{E}' = (\varepsilon_{\text{эфф}}/\varepsilon - 1)\,\overline{\mathscr{E}}, \quad \mathscr{E} = (\varepsilon_{\text{эфф}}/\varepsilon)\,\overline{\mathscr{E}}; \tag{5}$$

где

$$1/\varepsilon_{\text{эфф}} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon)\,d\varepsilon/\varepsilon, \tag{6}$$

$F(\varepsilon)$ — функция распределения диэлектрической проницаемости. Очевидно, что $1/\varepsilon_{\text{эфф}} = \overline{1/\varepsilon}$.

Подставляя первое из выражений (5) в уравнение (3), окончательно получим уравнение для среднего поля:

$$d^2/dx^2\varepsilon_{\text{эфф}}\overline{\mathscr{E}} + (\omega_0^2/v_0^2)\,\overline{\mathscr{E}} = 0. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая связь между величиной $\overline{\mathscr{E}}$ и средним полем, получаем для потенциальных волн среднего поля дисперсионное уравнение:

$$\omega = kv_0 \pm \omega_0\sqrt{1/\varepsilon_{\text{эфф}}}. \tag{8}$$

Предполагается, что среднее поле имеет вид: $\overline{E} = E_0 e^{i(kx-\omega t)}$.

Остановимся на вычислении $1/\varepsilon_{\text{эфф}}$. Пользуясь известной формулой теории обобщенных функций, имеем

$$1/\varepsilon_{\text{эфф}} = \int F(\varepsilon)\,d\varepsilon/\varepsilon - i\pi F(0). \tag{9}$$

Формула (6) впервые была получена в работе [6] и приведена к виду (9) в работе [7].

Подставляя (9) в (8) и извлекая квадратный корень, получим

$$\omega = kv_0 \pm \omega_0\left\{\left[\frac{\sqrt{J^2+\pi^2F^2(0)}+J}{2}\right]^{1/2} - i\left[\frac{\sqrt{J^2+\pi^2F^2(0)}-J}{2}\right]^{1/2}\right\}. \tag{10}$$

Через J обозначен интеграл в смысле главного значения в формуле (9).

В фигурной скобке первое слагаемое описывает перенормировку ленгмюровской частоты из-за флуктуаций диэлектрической проницаемости, а второе — затухание во времени быстрой волны и усиление медленной волны, имеющей отрицательную энергию.

Особенно просто выглядит инкремент в предельных случаях:

$$\eta=\omega_0(\pi F(0)/2\sqrt{J}) \qquad \text{при} \quad J\gg\pi F(0),$$
$$\eta=\omega_0(\sqrt{\pi F(0)/2}) \qquad \text{при} \quad J\ll\pi F(0). \tag{11}$$

Отметим, что инкременты нарастания определяются наличием нуля диэлектрической проницаемости и не зависят от параметров неоднородности системы (радиуса корреляции). Это значит, что основным механизмом усиления волн здесь является не механизм локального переходного излучения на флуктуациях диэлектрической проницаемости, а черенковская неустойчивость. Такого рода механизм усиления тесно связан с наличием флуктуаций, что видно из формул (10), (11).

Зададим явный вид функции распределения диэлектрической проницаемости. Допустим, что диэлектрическая проницаемость распределена по Гауссу:

$$F(\varepsilon) = \left(1/\sqrt{2\pi\overline{\varepsilon'^2}}\right)\exp\left[-(\bar{\varepsilon}-\varepsilon')^2/2\overline{\varepsilon'^2}\right]. \tag{12}$$

Тогда $1/\varepsilon_{эфф}$ может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{1}{\varepsilon_{эфф}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\overline{\varepsilon'^2}}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{z-y}\,dy - i\pi e^{-z^2}\right\}, \tag{13}$$

где $z=\bar{\varepsilon}/\sqrt{2\overline{\varepsilon'^2}}$.

Выражение, стоящее в фигурных скобках в формуле (13), хорошо известно в теории плазмы. Интеграл как функция z табулирован и его асимптотики исследованы в [8].

Рассмотрим предельные случаи малых и больших флуктуаций (соответственно $z\gg1$ и $z\ll1$). При $z\gg1$

$$\frac{1}{\varepsilon_{эфф}} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}}\left(1+\frac{\overline{\varepsilon'^2}}{\bar{\varepsilon}^2}\right) - i\sqrt{\frac{\pi}{2\overline{\varepsilon'^2}}}\exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2\overline{\varepsilon'^2}}\right). \tag{14}$$

Действительная часть $\varepsilon_{эфф}^{-1}$ существенно превышает экспоненциально малую мнимую, и для инкремента можно воспользоваться первой из формул (11):

$$\eta = \frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{\pi\bar{\varepsilon}}{2\overline{\varepsilon'^2}}}\exp\left(-\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2\overline{\varepsilon'^2}}\right). \tag{15}$$

При $z\ll1$

$$\frac{1}{\varepsilon_{эфф}} = \sqrt{\frac{\pi}{\bar{\varepsilon}^2}} - i\frac{\pi}{\sqrt{2\overline{\varepsilon'^2}}}. \tag{16}$$

Мнимая часть $\varepsilon_{эфф}^{-1}$ в этом случае значительно больше действительной, и инкремент определяется второй из формул (11):

$$\eta=\omega_0\sqrt{\pi/2\sqrt{2}}\,(\overline{\varepsilon'^2})^{-1/4}. \tag{17}$$

Используя формулу (5), можно найти высшие моменты поля. Например,

$$\overline{E^{(n)}} = \varepsilon^{n}_{\text{эфф}} \overline{(1/\varepsilon^n)} \overline{E^n}, \tag{18}$$

где

$$\overline{\left(\frac{1}{\varepsilon^n}\right)} = \frac{1}{n!}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon} \frac{d^n F(\varepsilon)}{d\varepsilon^n} d\varepsilon - i\pi \frac{d^n F(0)}{d\varepsilon^n}\right). \tag{19}$$

Из соотношения (15) видно, что если флуктуации диэлектрической проницаемости малы, то инкремент нарастания волн пространственного заряда экспоненциально мал, вследствие чего рассматриваемый механизм усиления становится малоэффективным, и начинает действовать другой механизм, связанный со слагаемыми порядка $\omega_0 l_0/v_0$, которые ранее были опущены*. В этом случае превалирующим является механизм локального переходного излучения.

Решим задачу, считая флуктуации малыми, не делая никаких предположений о величине $\omega_0 l_0/v_0$. По-прежнему исходим из уравнений (3) и (4). Так как флуктуации малы, то слагаемое $\varepsilon'\mathscr{E}' - \overline{\varepsilon'\mathscr{E}'}$ в уравнении (4) можно опустить, после чего оно легко решается. Дальнейшие вычисления аналогичны тем, что были выполнены в работах [4–6]. Однако, в отличие от цитируемых работ, мы использовали преобразование Фурье от величин $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}'$. Такой прием быстрее приводит к цели.

Полученное из уравнения (4) дисперсионное соотношение имеет вид:

$$(\omega - kv_0)^2 - \frac{\omega_0}{\bar{\varepsilon}} = \bar{\mu}^2(\omega - kv_0)^2 \left\{ \int dp \, \frac{(k - \omega/v_0 - p)^2 K(p)}{(p - k + \omega/v_0)^2 - \omega_0^2/v_0^2\bar{\varepsilon}} + \right.$$
$$\left. + \pi i \frac{\omega_0}{v_0\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\left[K\left(k - \frac{\omega}{v_0} - \frac{\omega}{v_0\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\right) - K\left(k - \frac{\omega}{v_0} + \frac{\omega_0}{v_0\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\right)\right]\right\}, \tag{20}$$

где $\bar{\mu}^2 = \overline{\varepsilon'^2}/\bar{\varepsilon}^2$ — относительная флуктуация диэлектрической проницаемости, K — преобразование Фурье от коэффициента корреляции. Так как $\bar{\mu}^2 \ll 1$, то дисперсионное уравнение (20) можно решать итеррациями по этому параметру. Действительное слагаемое описывает смещение частоты волн пространственного заряда, обусловленное флуктуациями диэлектрической проницаемости. Это смещение мало и особого интереса не представляет. Затухание пучковых волн также мало в меру малости $\bar{\mu}^2$. Однако в принятой схеме предполагалось, что трансформация среднего поля в флуктуационное есть единственная причина его диссипации. Поэтому остановимся на исследовании затухания волн во времени более подробно. Обе волны затухают с декрементом

$$\eta = -\frac{\pi}{4} \frac{\bar{\mu}^2\omega_0^2}{v_0\bar{\varepsilon}}\left[K(0) - K\left(\frac{2\omega_0}{v_0\sqrt{\bar{\varepsilon}}}\right)\right]. \tag{21}$$

При расчете декремента предполагалось, что при $t = -\infty$ $\mathscr{E} = 0$. Это условие означает адиабатическое включение поля.

Приведем выражение для декремента в предельных случаях:

если $\omega_0 l_0/v_0\sqrt{\bar{\varepsilon}} \gg 1$, то

$$\eta = -\frac{\pi}{4} \frac{\bar{\mu}^2\omega_0^2}{v_0\bar{\varepsilon}} K(0), \quad K(0) \sim l_0; \tag{22}$$

---

* В принципе возможны функции распределения, у которых $F(0) = 0$, тогда указанный механизм диссипации вообще отсутствует.

при $\omega_0 l_0/v_0 \sqrt{\bar{\varepsilon}} \ll 1$

$$\eta = -\frac{\pi}{2}\frac{\overline{\mu^2}}{v_0^2\bar{\varepsilon}^2}\frac{d^2K(0)}{d\xi^2}. \tag{23}$$

Дифференцирование по ξ означает дифференцирование по аргументу функции корреляции:

$$d^2K(0)/d\xi^2 \sim l_0^3.$$

Во втором случае декремент меньше, чем в первом.

В результате рассеяния волн пространственного заряда на флуктуациях диэлектрической проницаемости происходит их затухание. Причем этот механизм осуществляется так, что быстрые волны трансформируются в быстрые, а медленные — в медленные.

В случае больших флуктуаций нарастание обусловлено преобразованием энергии медленных волн пространственного заряда в собственные колебания флуктуирующей среды ($\varepsilon=0$).

Авторы благодарят Я. Б. Файнберга за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковенко В. М.— Изв. вузов — Радиофизика, 1964, **7**, № 4, с. 657; УФЖ, 1966, **11**, № 6, с 679.
2. Булгаков А. А., Ханкина С. И, Яковенко В. М.— ФТТ, 1976, **18**, № 6, с. 1568.
3. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— УФН, 1978, **126**, с. 553.
4. Лифшиц И. М., Каганов М. И., Цукерник В. М.— Уч. зап. ХГУ. Труды физ.-мат. ф-та, 1950, **2**, с. 41.
5. Канер Э А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1959, **2**, № 5, с. 827.
6. Басс Ф. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1959, **2**, № 6, с. 1015.
7. Рыжов Ю А. Диссертация, 1980, Горький.
8. Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б.— УФН, 1951, **44**, № 3, с. 321.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
11 мая 1982 г.

INSTABILITY OF CHARGED PARTICLE FLUXES PASSING THROUGH STATISTICALLY INHOMOGENEOUS MEDIUM

F. G. Bass, G. M. Pritula, S. I. Khankina, V. M. Yakovenko

It is shown that in the case of large fluctuations of the dielectric permittivity a slow wave of the space charge is amplified and the fast one is damping. Wave media of both types are damping at small fluctuations of the dielectric permittivity.