УДК 537.86

ВОЛНЫ В МАСШТАБНО-ИНВАРИАНТНЫХ СИСТЕМАХ

А. П. Кузнецов, С. П. Кузнецов, Л. А. Мельников, А. Б. Осин, А. Г. Рожнев

Получено общее волновое уравнение в интегральной форме для свободных волн в масштабно-инвариантных системах (МИС). Показано, что для МИС не существует понятия дисперсионного уравнения. Найден вид собственных функций МИС и установлена их взаимосвязь с ядром интегрального уравнения. Установлена зависимость между продольной структурой собственной функции МИС и дисперсионной характеристикой системы, порождающей соответствующую МИС.

Основное свойство симметрии однородных и периодических волноведущих систем — трансляционная инвариантность: система совмещается сама с собой при сдвиге на период (рис. 1а — периодические системы), при любом сдвиге (рис. 1б — однородная система), при сдвиге с поворотом (рис. 1в — спираль).

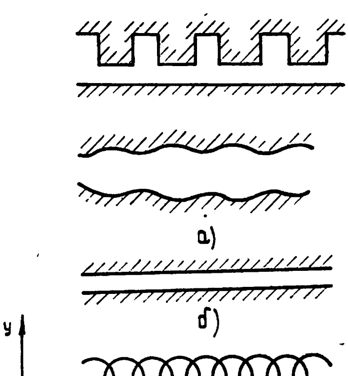

Рис. 1.

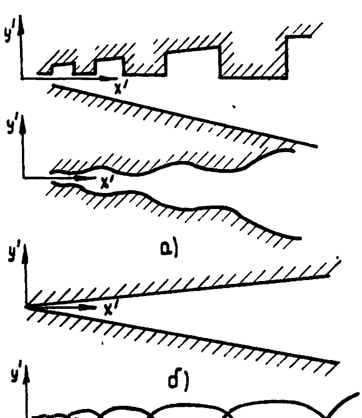

Рис. 2.

Известны также системы, которые совмещаются сами с собой при изменении всех размеров (масштабов) в некоторое число a раз [1–4]. Такие системы будем называть масштабно-инвариантными (МИС). Число a может принимать как дискретные значения (МИС с дискретной группой симметрии или дискретные МИС — рис. 2а), так и произвольные (МИС с непрерывной группой симметрии или непрерывные МИС — рис. 2б, в). Для дискретных МИС наименее отличающееся от единицы возможное значение числа a будем называть масштабным фактором и обозначать α, тогда $a=\alpha^n$, где n — целое. Обычно системы типа изображенных на рис. 2а называют логопериодическими, а типа рис. 2б, в — частотно-независимыми, отмечая тем самым свойства электромагнитных полей в них (независимость величин, характеризующих поля, от частоты или периодическая зависимость от ее логарифма).

Отметим, что при замене координат $x'=e^x\cos y$, $y'=e^x\sin y$ системы, изображенные на рис. 1, преобразуются в системы, изображенные на рис. 2. Поэтому системы на рис. 1 назовем порождающими для соответствующих МИС на рис. 2.

Широкое применение дискретные и непрерывные МИС нашли в антенной технике [1,2]. Логопериодические и частотно-независимые антенны позволили получить сверхширокую полосу частот (10 : 1 и более). Пример логопериодической антенны показан на рис. 3а. В зависимости от частоты сигнала работает группа дипольных излучателей, длина которых близка к половине длины волны $\lambda/2$. На другой частоте работают другие группы излучателей.

Есть предложения использовать логопериодические и частотно-независимые системы для создания сверхширокополосных электронных приборов СВЧ. Например, в [3] рассчитывается усилитель, схематично показанный на рис. 3б, с полосой усиливаемых частот порядка 5 : 1. Основная идея таких приборов близка к идее логопериодических антенн: на каждой частоте эффективно работает свой отрезок прибора. Имеется экспериментальное подтверждение работоспособности таких приборов [5].

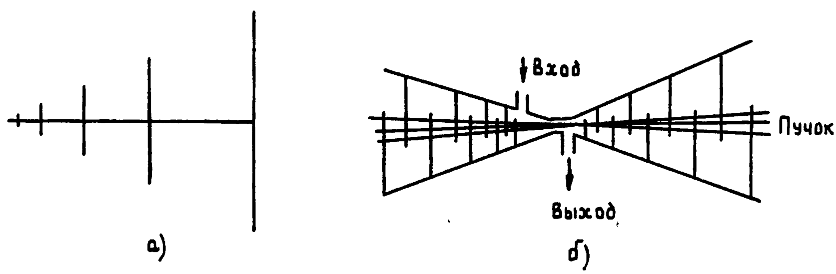

Рис. 3.

Анализ опубликованных работ выявил необходимость создания физической картины волновых явлений в МИС, аналогичной по сути той картине, которая существует для однородных и периодических систем (понятия дисперсионного уравнения, пространственных гармоник, групповой и фазовой скорости, синхронизма). Некоторым аспектам этой проблемы и посвящается настоящая статья.

1. Существует ли дисперсионная характеристика у масштабно-инвариантных систем? Обычно решение волнового уравнения в однородной среде ищут в виде $\psi \sim \exp(i\omega t - ikx)$, причем ω и k оказываются связанными уравнением, называемым дисперсионным. Понятие дисперсионного уравнения (дисперсионной характеристики) является ключевым в теории волн в однородных и периодических системах. Остановимся подробнее на связи этого понятия с симметрией систем.

Пусть функция $\psi=\psi(x, t)$ описывает распространение волны в однородной одномерной среде, т. е. $\psi(x, t)$ — решение соответствующего волнового уравнения. В силу пространственной однородности задачи, $\psi(x+\xi, t)$, где $\xi=\mathrm{const}$ — также решение. Следовательно, $\hat{L}_\xi$ — оператор пространственного сдвига, определяемый соотношением $\hat{L}_\xi\psi(x, t)\equiv\psi(x+\xi, t)$,— оператор симметрии. Аналогично, воспользовавшись однородностью системы во времени, введем еще один оператор симметрии — оператор временного сдвига: $\hat{T}_\tau\psi(x, t)\equiv\psi(x, t+\tau)$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что операторы $\hat{L}_\xi$ и $\hat{T}_\tau$ коммутируют:

$$\hat{L}_\xi \hat{T}_\tau \psi(x, t) = \hat{L}_\xi \psi(x, t+\tau) = \psi(x+\xi, t+\tau) = \\ = \hat{T}_\tau \psi(x+\xi, t) = \hat{T}_\tau \hat{L}_\xi \psi(x, t). \quad (1)$$

Поэтому можно выбрать такую систему функций ψ, каждая из которых является собственной для обоих операторов одновременно [6]:

$$\hat{L}_\xi \psi_{\mu\lambda} = \mu_\xi \psi_{\mu\lambda}, \quad \hat{T}_\tau \psi_{\mu\lambda} = \lambda_\tau \psi_{\mu\lambda}. \quad (2)$$

Для каждой конкретной системы собственные числа операторов $\hat{L}_\xi$ и $\hat{T}_\tau$ оказываются связанными алгебраическим уравнением

$$D(\mu_\xi, \lambda_\tau) = 0, \quad (3)$$

которое получается, если выразить волновое уравнение через операторы симметрии $\hat{L}_\xi$ и $\hat{T}_\tau$ и воспользоваться соотношением (2). Нетрудно показать, что функция $\exp(i\omega t - ikx)$ является собственной одновременно для операторов $\hat{L}_\xi$ и $\hat{T}_\tau$, причем $\mu_\xi = \exp(-ik\xi)$, $\lambda_\tau = \exp(i\omega\tau)$. Следовательно, уравнение (3) представляет собой дисперсионное уравнение, связывающее ω и k.

Таким образом, существование дисперсионной характеристики следует из коммутируемости операторов симметрии.

Сказанное остается в силе и для периодических систем, с той поправкой, что параметр ξ оператора сдвига $\hat{L}_\xi$ может принимать лишь дискретные значения, кратные периоду системы d.

Обратимся к симметрии масштабно-инвариантных систем. Такая система совмещается сама с собой при изменении всех ее размеров в a раз (при замене $\boldsymbol{r} \to a\boldsymbol{r}$), при этом уравнения электродинамики

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{H} = \partial \boldsymbol{D}/\partial t, \quad \mathrm{rot}\, \boldsymbol{E} = \partial \boldsymbol{B}/\partial t$$

переходят сами в себя, лишь если дополнительно $t \to at$. Введем оператор симметрии $\hat{S}_a$ — оператор масштабного преобразования (масштабного сдвига), определяемый для одномерных систем соотношением

$$\hat{S}_a \psi(x, t) = \psi(ax, at). \quad (4)$$

Оператор масштабного сдвига $\hat{S}_a$ в МИС занимает место оператора трансляционного сдвига $\hat{L}_\xi$ в однородных и периодических системах. Симметрия относительно временных сдвигов сохраняется.

Операторы симметрии МИС $\hat{S}_a$ и $\hat{T}_\tau$ не коммутируют:

$$\hat{S}_a \hat{T}_\tau \psi(x, t) = \hat{S}_a \psi(x, t+\tau) = \psi(ax, at + a\tau), \\ \hat{T}_\tau \hat{S}_a \psi(x, t) = \hat{T}_\tau \psi(ax, at) = \psi(ax, at+\tau), \quad (5) \\ \hat{S}_a \hat{T}_\tau \neq \hat{T}_\tau \hat{S}_a.$$

Значит, нельзя выбрать систему функций, одновременно являющихся собственными для обоих операторов, а дисперсионное уравнение (связь между собственными числами операторов $\hat{S}_a$ и $\hat{T}_\tau$) не существует. Следовательно, теория колебаний и волн в МИС не может быть получена тривиальным обобщением теории колебаний и волн в однородных и периодических системах, опирающейся на понятие дисперсионного уравнения. Необходимо найти способ описания волн в однородных и периодических системах, который

а) является столь же общим, как метод дисперсионного уравнения;

б) допускает обобщение на МИС.

Такой метод существует и основан на использовании волновых уравнений в интегральной форме.

2. Волновые уравнения в интегральной форме. Рассмотрим сначала трансляционно-инвариантную систему, для которой известно дисперсионное уравнение $\omega=\omega(k)$. Запишем выражение

$$[\omega-\omega(k)]\,\psi_{\omega k}=0, \tag{6}$$

означающее, что для любой волны вида $\psi_{\omega k}\exp(i\omega t-ikx)$ амплитуда $\psi_{\omega k}$ может быть отлична от нуля только тогда, когда ω и k связаны дисперсионным уравнением $\omega=\omega(k)$. Выполняя в (6) обратное преобразование Фурье сначала по ω, затем по k, получим волновое уравнение

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+i\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x-\xi)\,\psi(\xi,t)\,d\xi=0. \tag{7}$$

Здесь

$$\psi(x,t)=\iint_{-\infty}^{\infty}\psi_{\omega k}e^{i\omega t-ikx}\,d\omega dk,\quad \Omega(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\omega(k)\,e^{ikx}\,dk.$$

В системах без потерь и неустойчивостей ядро $\Omega(x-\xi)$ должно быть эрмитовым: $\Omega(x-\xi)=\Omega^*(\xi-x)$. Тот факт, что ядро зависит лишь от разности $x-\xi$, связан, очевидно, с наличием трансляционной симметрии.

Аналогом уравнения (7) для систем, не обладающих трансляционной симметрией, является уравнение

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+i\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x,\xi)\,\psi(\xi,t)\,d\xi=0, \tag{8}$$

причем, вид ядра $\Omega(x,\xi)=\Omega^*(\xi,x)$ уже не определяется видом, да и самим существованием дисперсионного уравнения.

Уравнению (8) удовлетворяют функции вида $\psi_\omega(x)\exp(i\omega t)$, где $\psi_\omega(x)$ называется собственной функцией с собственной частотой ω. Можно показать, что для $\psi_\omega(x)$ справедливо следующее соотношение ортогональности:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_\omega(x)\,\psi^*_{\omega'}(x)\,dx=\delta(\omega-\omega'). \tag{9}$$

3. Волновое уравнение масштабно-инвариантных систем. Выясним, какие требования накладывает на уравнение (8) условие масштабной инвариантности. С целью конкретизации изложения ограничимся анализом МИС с непрерывной группой симметрии. Для удобства дальнейшей работы введем логарифмические координаты $\varkappa=\ln x$, $\eta=\ln\xi$; операция масштабного преобразования в a раз соответствует в новых координатах сдвигу на $\ln a$. Подействуем оператором $\hat{S}_a$ на уравнение (8). Для инвариантности уравнений необходимо потребовать, чтобы

$$a\Omega(\varkappa+\ln a,\eta+\ln a)=\Omega(\varkappa,\eta). \tag{10}$$

Условие (10) должно выполняться при любых значениях a. Положив $a=\exp[-(\varkappa+\eta)/2]$, получим

$$\Omega(\varkappa, \eta) = \exp\left(-\frac{\varkappa+\eta}{2}\right)\Omega\left(\frac{\varkappa-\eta}{2}, \quad \frac{-\varkappa+\eta}{2}\right)$$

или

$$\Omega(\varkappa, \eta) = \exp\left[-(\varkappa+\eta)/2\right] g(\varkappa-\eta),$$

где $g(\varkappa) = g^*(-\varkappa)$.

Следовательно, волновое уравнение (8) для масштабно-инвариантной системы преобразуется к виду

$$\frac{\partial\psi(\varkappa, t)}{\partial t} + i\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\varkappa+\eta}{2}\right) g(\varkappa-\eta)\psi(\eta, t)\,d\eta = 0. \tag{11}$$

4. Собственные функции масштабно-инвариантной системы. Действуя на решения (8) вида $\psi_0(\varkappa)\exp(i\omega t)$ оператором масштабного сдвига $\hat{S}_\eta$ $(\eta = \ln a)$, получим другое решение $\psi_0(\varkappa+\eta)\exp(i\omega_0 e^\eta t) \equiv \equiv \psi_\eta(\varkappa)\exp(i\omega_\eta t)$. Таким образом, масштабный сдвиг собственной функции $\psi_0(\varkappa)$ с собственной частотой ω_0 дает другую собственную функцию $\psi_\eta(\varkappa)$ с собственной частотой ω_η, причем

$$\psi_\eta(\varkappa) = \psi_0(\varkappa+\eta), \quad \omega_\eta = \omega_0 e^\eta. \tag{12}$$

В этом коренное отличие от однородных и периодических систем: там сдвиг собственной функции $\exp(i\omega t - ikx)$ на ξ давал с точностью до множителя ту же самую собственную функцию.

В непрерывной МИС величину η можно взять любой, следовательно, собственные частоты пробегают непрерывный спектр. В дискретных МИС масштабный сдвиг кратен $\ln\alpha$: $\eta = n\ln\alpha$, где α — масштабный фактор, n — целое. Спектр такой системы дискретен, в чем также проявляется отличие от периодических систем, спектр которых непрерывен.

Рассмотрим подробнее собственные функции непрерывных МИС. Из соотношений (9) и (12) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\varkappa)\psi_0^*(\varkappa+\eta)\,d\varkappa = \delta(\eta). \tag{13}$$

Выполняя в (13) преобразование Фурье по η, имеем

$$\psi(k)\psi^*(k) = 1, \tag{14}$$

где $\psi(k) = \int_{-\infty}^{\infty}\psi_0(\varkappa)e^{ik\varkappa}\,d\varkappa$. Из (14) следует, что

$$\psi(k) = \exp[i\varphi(k)\tau], \tag{15}$$

где $\varphi(k)$ — произвольная действительная функция, τ — некоторый формально введенный параметр.

После обратного преобразования Фурье из (15) получим наиболее общий вид собственных функций МИС*:

$$\psi_0(\varkappa) = \int_{-\infty}^{\infty}\exp[i\varphi(k)\tau - ik\varkappa]\,dk, \quad \psi_\eta = \hat{S}_a\psi_0. \tag{16}$$

Разным τ отвечают разные МИС из некоторого семейства с общей $\varphi(k)$, а изменение τ означает переход от одной МИС семейства к другой.

Для системы с $\tau = 0$ собственными являются δ-функции. Пример соответствующей МИС приведен на рис. 4а: внутренность угла запол-

* Выражение (16) напоминает формулу, описывающую распространение возмущений в среде с дисперсией, где $\omega = \varphi(k)$, если величине τ приписывать смысл «времени».

нена средой, идеально проводящей в y-направлении (показано штриховкой). Каждая собственная функция «сидит» внутри бесконечно малой окрестности точки на оси x.

С увеличением τ область локализации собственных функций растет. При очень больших τ собственные функции расплываются на большой длине x, что соответствует системам, близким к однородным (рис. 4б). Интеграл в (16) в этом случае можно оценить методом стационарной фазы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[i\varphi(k)\tau - ik\varkappa\right] dk \sim \exp\left[i\varphi(\beta)\tau - i\beta\varkappa\right],$$

где β — решение уравнения

$$(\partial/\partial\beta)\left[\varphi(\beta)\tau - \beta\varkappa\right] = 0 \text{ или } \varphi'(\beta)\tau = \ln x. \tag{17}$$

Метод стационарной фазы поволяет ввести локальное волновое число k:

$$k = -(\partial/\partial x)\left[\varphi(\beta)\tau - \beta\varkappa\right] = \beta/x. \tag{18}$$

В небольшой окрестности точки $x=1$ слабонеоднородную систему можно аппроксимировать однородной с законом дисперсии $\omega=f(k)$. Тогда локальное (справедливое в малой окрестности точки x) дисперсионное уравнение имеет вид

$$\omega x = f(kx). \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (17), получим уравнение для функции $\varphi(\beta)$, определяющей собственную функцию МИС:

$$\varphi'(\beta) = (1/\tau)\ln\left[f(\beta)/\omega\right]. \tag{20}$$

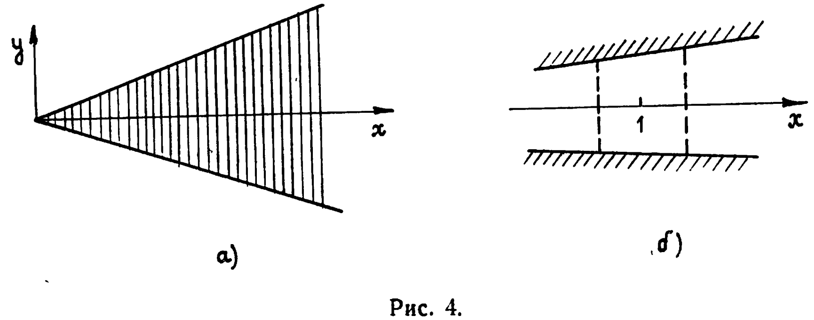

Рис. 4.

До сих пор мы рассматривали лишь одномерные МИС. Для МИС большей размерности собственные функции будут различаться как по продольной, так и по поперечной структуре. Поперечная структура определяется соответствующими граничными условиями, а для продольной $\psi(\varkappa)$ остается в силе уравнение (16) и волновое уравнение (11). Как следует из соотношений (16) и (20), $\psi(\varkappa)$ определяется законом дисперсии порождающей системы. Более того, $\psi(\varkappa)$ несет информацию, подобную той, которую в случае однородной системы дает дисперсионное уравнение. Действительно, для того чтобы решить, например, задачу о распространении свободных волн в однородном волноводе, достаточно знать мембранные функции и дисперсионное уравнение. Для МИС то же самое можно сделать, зная поперечную и продольную структуру $\psi(\varkappa)$, так как по $\psi(\varkappa)$ однозначно восстанавливается вид интегрального волнового уравнения (11). Непосредственной проверкой убеждаемся, что ядро вида

$$\Omega(\varkappa, \eta) = \omega_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^y \psi_0(\varkappa + y) \psi_0^*(\eta + y)\, dy \tag{21}$$

удовлетворяет всем необходимым требованиям, а заменой $y=y'-(\varkappa+\eta)/2$ приводится к виду (11).

В заключение перечислим основные результаты работы.

1) Показано, что дисперсионное уравнение для МИС не существует, так как операторы симметрии не коммутируют.

2) Получено общее уравнение, описывающее распространение свободных волн в МИС.

3) Выяснен вид собственных функций МИС и связь ядра интегрального волнового уравнения с соответствующими собственными функциями.

4) Установлено, что существует взаимосвязь между продольной структурой собственной функции и дисперсией порождающей системы. Для систем, близких к однородным, получен явный вид этой связи.

Следующим логическим шагом в развитии теории должен стать анализ возбуждения волн и решение задачи о взаимодействии волн в МИС.

Выражаем благодарность Д. И. Трубецкову, обратившему наше внимание на задачу о распространении волн в МИС.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сверхширокополосные антенны (сборник статей).— М.: Мир, 1964.
2. Rumsey V. H.— IRE Nat'l Conv. Rec., 1957, pt. 1, p. 114.
3. Thal H. L., Mayer C. B.— IEEE Trans., 1968, ED—15, № 10, p. 699.
4. Яцук К. П., Молявко В. И., Митрофанов В. М.— Радиотехника и электроника, 1969, 14, № 8, с. 1377.
5. Савельев В. Ф., Кущенко Г. И.— Радиотехника и электроника, 1970, 25, № 12, с. 2567.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория.— М.: Наука, 1974.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию 7 апреля 1982 г., после доработки 15 сентября 1982 г.

WAVES IN SCALE-INVARIANT SYSTEMS

A. P. Kuznetsov, S. P. Kuznetsov, L. A. Mel'nikov, A. B. Osin, A. G. Rozhnev

The general wave equation has been obtained in the integral form for free waves in scale-invariant systems (SIS). It is shown that there is no a concept of the dispersion equation for SIS. The form of eigenfunctions of SIS has been found and their interrelation with the nucleus of the integral equation is stated. A dependence is found out between the longitudinal structure of the SIS eigenfunction and the dispersive characteristic of the system giving birth to the corresponding SIS.