

УДК 621.372.2.001.24

## РАСЧЕТ ПОЛОСКОВЫХ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТИ НА РЕБРЕ

*Г. Ф. Заргано, Г. П. Синявский, В. П. Ткаченко*

Рассмотрено применение метода частичных областей с учетом особенности на ребре. Проведен расчет параметров полосковых линий передачи с конечной толщиной проводников. Разработана программа, позволяющая рассчитывать в квазистатическом приближении на ЭВМ поля и характеристические сопротивления несимметричной экранированной прямоугольной, квадратной коаксиальной, желобковой, трехплоскостной симметричной линий. Проанализированы сходимость метода и точность полученных результатов.

Несмотря на то, что анализу регулярных полосковых линий посвящено значительное количество работ [1-6], актуальной задачей остается разработка алгоритмов расчета параметров полосковых линий с конечной толщиной проводников, характеризующихся универсальностью, простотой, быстрействием и высокой точностью.

Эффективным методом решения подобных задач является метод частичных областей (МЧО) [1]. Однако ему присущ такой недостаток, как медленная сходимость решения. Это связано с тем, что электромагнитные поля на границе «сшивания» не удовлетворяют условию на ребре. Аппроксимируя поле на линии раздела частичных областей функциями с нужной особенностью, можно значительно улучшить сходимость метода и повысить точность результатов [7].

В настоящей работе исследуется несимметричная прямоугольная экранированная полосковая линия с конечной толщиной центрального проводника и кусочно-однородным диэлектрическим заполнением (рис. 1а), которую можно рассматривать как базовую модель для расчета других типов линий: квадратной коаксиальной, желобковой, трехплоскостной симметричной, высокочастотной (рис. 1б, в, г, д). Задача решается в квазистатическом приближении, которое в большинстве случаев дает хорошие результаты [1, 2].

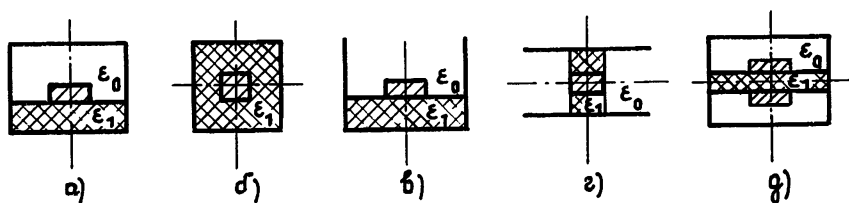


Рис. 1.

В целях упрощения задачи ограничиваемся рассмотрением полосковой линии, симметричной относительно плоскости  $BD$  (рис. 2). В результате задача сводится к решению двумерного уравнения Лапласа в области  $ABDO$  для скалярного потенциала поля  $V$  при следующих граничных условиях: внешний проводник имеет потенциал  $V$ , равный нулю, внутренний проводник —  $V_0$ ;  $(\partial V / \partial x)|_{x=l} = 0$ . Проводники обладают бесконечной проводимостью.

В соответствии с методом частных областей разбиваем область  $ABDO$  на три области. Границы частных областей определяются неравенствами: область 1 —  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq y \leq c$ ; область 2 —  $0 \leq x \leq a$ ,  $c \leq y \leq c+s$ ; область 3 —  $0 \leq x \leq l$ ,  $c+s \leq y \leq h$ . Запишем в каждой из частных областей решение уравнения Лапласа без учета граничных условий на смежных границах областей:

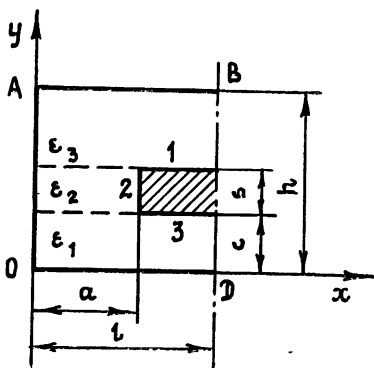


Рис. 2.

$$V^1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \alpha_n x Y_n(y),$$

$$Y_n(y) = \begin{cases} \operatorname{sh} \alpha_n y, & V^1(x, 0) = 0 \\ \operatorname{ch} \alpha_n y, & \partial V^1(x, 0)/\partial y = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

$$V^2(x, y) = V_0 a^{-1} x + \sum_{n=1}^{\infty} [B_n \operatorname{sh} \beta_n \times \\ \times (y - c) + C_n \operatorname{sh} \beta_n (y - c - s)] \sin \beta_n x, \\ V^3(x, y) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \alpha_n x \operatorname{sh} \alpha_n (y - h),$$

$$\text{где } \alpha_n = (2n - 1)\pi/2l, \quad \beta_n = n\pi/a.$$

Неизвестные коэффициенты  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$  можно определить через значения потенциала на общих границах областей:

$$V_1(x) \Big|_{y=c} = \begin{cases} V_0, & a \leq x \leq l \\ f(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases}, \quad V_2(x) \Big|_{y=c+s} = \begin{cases} V_0, & a \leq x \leq l \\ g(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases}, \quad (2)$$

где  $f(x)$ ,  $g(x)$  — неизвестные функции. Тогда

$$A_n = 2 (l Y_n(c))^{-1} \left[ V_0 \cos \alpha_n a \alpha_n^{-1} + \int_0^a f(x) \sin \alpha_n x dx \right],$$

$$B_n = 2 (a \operatorname{sh} \beta_n s)^{-1} \left[ V_0 (-1)^n \beta_n^{-1} + \int_0^a g(x) \sin \beta_n x dx \right],$$

(3)

$$C_n = -2 (a \operatorname{sh} \beta_n s)^{-1} \left[ V_0 (-1)^n \beta_n^{-1} + \int_0^a f(x) \sin \beta_n x dx \right],$$

$$D_n = 2 (l \operatorname{sh} \alpha_n (c + s - h))^{-1} \left[ V_0 \cos \alpha_n a \alpha_n^{-1} + \int_0^a g(x) \sin \alpha_n x dx \right].$$

Из условия непрерывности нормальных составляющих компонент векторов индукции электрического поля на смежных границах частных областей получаем систему интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, ядра которых имеют логарифмическую особенность. Решаем эту систему методом Галеркина, для этого представим функции  $f(x)$  и  $g(x)$  в следующем виде:

$$f(x) = V_0 a^{-1} x + \sum_{i=0}^N U_i \Psi_i(x), \quad g(x) = V_0 a^{-1} x + \sum_{i=0}^N L_i \varphi_i(x), \quad (4)$$

где  $U_i$ ,  $L_i$  — неизвестные коэффициенты,

$$\Psi_i(x) = [1 - (x/a)^2]^{\nu_i} C_{2i+1}^{\nu_i+1/2}(x/a),$$

$$\varphi_i(x) = [1 - (x/a)^2]^{\nu_i} C_{2i+1}^{\nu_i+1/2}(x/a),$$

$C_{2l+1}^{\tau_j+1/2}(x/a)$  — полиномы Гегенбауэра,  $j = 1, 2$ ,  $\tau_j$  — величина, определяемая порядком сингулярности вблизи ребра.

Для идеально проводящего прямоугольного выступа, граничащего с диэлектрическими областями разного вида, постоянные  $\tau_1$  и  $\tau_2$  определяются следующим образом:

$$\tau_{1,2} = (2/\pi) \operatorname{arctg} (1 + 2\varepsilon_2/\varepsilon_{1,3})^{1/2}. \quad (5)$$

При воздушном заполнении полосковой линии ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ ) эти постоянные равны  $\tau_{1,2} = 2/3$ .

Такое представление функций  $f(x)$  и  $g(x)$  позволяет учесть каждым членом разложения (4) особенность поведения поля вблизи прямоугольного ребра на границе раздела частичных областей с разными  $\varepsilon$ , сохраняя при этом на отрезке  $[0, a]$  полноту и ортогональность системы аппроксимирующих функций.

В соответствии с методом Галеркина получаем для  $U_i$  и  $L_i$  неоднородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^N (A_{ji}U_i + B_{ji}L_i) = K_j, \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^N (C_{ji}U_i + D_{ji}L_i) = M_j,$$

где

$$A_{ji} = \varepsilon_1 \sum_{n=1}^{\infty} Y'_n(c) (lY_n(c))^{-1} \Phi_j^{(1)}(\alpha_n a) \Phi_i^{(1)}(\alpha_n a) + \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{cth} \beta_n s a^{-1} \Phi_j^{(2)}(n\pi) \Phi_i^{(2)}(n\pi),$$

$$B_{ji} = -\varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (a \operatorname{sh} \beta_n s)^{-1} \Phi_j^{(2)}(n\pi) \Phi_i^{(4)}(n\pi),$$

$$C_{ji} = \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (a \operatorname{sh} \beta_n s)^{-1} \Phi_j^{(4)}(n\pi) \Phi_i^{(2)}(n\pi),$$

$$D_{ji} = \varepsilon_3 \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \operatorname{cth} \alpha_n (c + s - h) l^{-1} \Phi_j^{(3)}(\alpha_n a) \Phi_i^{(3)}(\alpha_n a) - \varepsilon_2 \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{cth} \beta_n s a^{-1} \Phi_j^{(4)}(n\pi) \Phi_i^{(4)}(n\pi),$$

$$K_j = -\varepsilon_1 V_0 \sum_{n=1}^{\infty} Y'_n(c) \sin \alpha_n a (a l \alpha_n^2 Y_n(c))^{-1} \Phi_j^{(1)}(\alpha_n a),$$

$$\Phi_j^{(1)}(\alpha_n a) = J_{\tau_1+3/2+2j}(\alpha_n a) [(\alpha_n)^{\tau_1+1/2}]^{-1},$$

$$M_j = -\varepsilon_3 V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cth} \alpha_n (c + s - h) \sin \alpha_n a (a l \alpha_n)^{-1} \Phi_j^{(3)}(\alpha_n a),$$

$$\Phi_j^{(2)}(n\pi) = J_{\tau_1+3/2+2j}(n\pi) [(\beta_n)^{\tau_1+1/2}]^{-1},$$

$$\Phi_j^{(3)}(\alpha_n a) = J_{\tau_2+3/2+2j}(\alpha_n a) [(\alpha_n)^{\tau_2+1/2}]^{-1},$$

$$\Phi_j^{(4)}(n\pi) = J_{\tau_2+3/2+2j}(n\pi) [(\beta_n)^{\tau_2+1/2}]^{-1},$$

Решение системы (6) позволяет получить распределение потенциала по сечению полосковой линии.

Характеристическое сопротивление полосковой линии определяется по формуле

$$Z = \sqrt{\mu/\epsilon} (V_0/C), \quad C = \oint E_n ds, \quad (7)$$

где интегрирование может производиться по поверхности внешнего или внутреннего проводника;  $E_n$  — нормальная составляющая электрического поля,  $s$  — поверхность единицы длины проводника.

На основе изложенного метода расчета была разработана программа на языке АЛГОЛ-ГДР для ЭВМ «БЭСМ-6», позволяющая рассчитывать распределение потенциала и характеристическое сопротивление вышеперечисленных типов линий.

Анализ сходимости алгоритма был проведен при расчете параметров симметричной прямоугольной экранированной и квадратной коаксиальной линий с однородным воздушным заполнением.

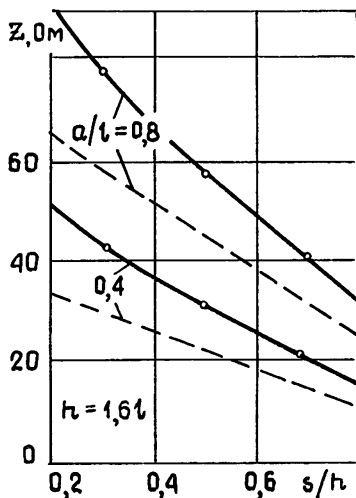


Рис. 3.

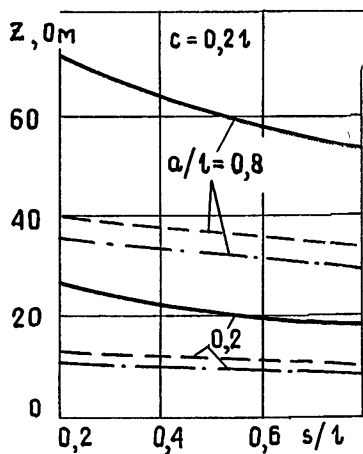


Рис. 4.

В соответствии с (7) общее характеристическое сопротивление линии вычислялось как

$$Z = \left[ \sum_{m=1}^3 \frac{1}{z_m} \right]^{-1}, \quad z_m = \sqrt{\frac{\mu_m}{\epsilon_m}} \frac{V_0}{\oint E_n^{(m)} ds_m}, \quad m = 1, 2, 3, \quad (8)$$

интегрирование в (8) осуществлялось по поверхности внешнего проводника.

Для симметричной прямоугольной линии с воздушным заполнением было проведено исследование «сшиваемости» потенциала на смежной границе частичных областей в зависимости от порядка приближения, т. е. от числа членов  $N$ , учитываемых в разложениях (4), и длины рядов  $M$  по собственным функциям частичных областей. Анализ показал хорошую «сшиваемость» потенциала. Максимальное несовпадение уже в первом приближении ( $N=0$ ) составило  $10^{-3}$ . Кроме того, наблюдалась быстрая сходимость решения по приближениям. Для практических расчетов можно ограничиться величинами  $N=3$ ,  $M=50$ .

Проверка результатов расчета характеристического сопротивления осуществлялась сравнением с результатами работы [2]. На рис. 3 сплошной линией обозначены результаты расчета характеристического

сопротивления по формуле (8) ( $\epsilon_1=1$ ), кружками — из работы [2]. Проведенное сравнение показало, что расхождение в большинстве случаев значительно меньше 1%. Пунктирной линией представлены некоторые результаты расчета характеристического сопротивления симметричной экранированной прямоугольной линии с диэлектрической подложкой ( $\epsilon_1=5$ ). Расчеты проводились при различных размерах внутреннего и внешнего проводников. Здесь и в дальнейшем при расчетах  $N=4$ ,  $M=100$ .

Квадратная коаксиальная линия представляет собой частный случай симметричной прямоугольной линии при  $h=2l$ ,  $s=2(l-a)$ . Для ее характеристического сопротивления известны решения, полученные с использованием конформного преобразования, которые можно рассматривать как точные [2, 5].

Таблица 1

N	M					
	50		100		200	
	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>	Z <sub>1</sub>	Z <sub>2</sub>
0	50,47	51,86	50,45	51,74	50,45	51,66
1	49,64	50,89	49,64	50,76	49,64	50,67
2	49,94	50,57	49,91	50,45	49,91	50,36
3	49,79	50,41	49,79	50,31	49,79	50,22
4	49,89	50,32	49,85	50,23	49,85	50,15
5	49,81	50,25	49,81	50,18	49,81	50,11

В табл. 1 представлены рассчитанные с помощью данного алгоритма значения характеристического сопротивления квадратной коаксиальной линии с воздушным заполнением ( $a=0,6l$ ) в зависимости от порядка приближения  $N$  и длины рядов  $M$ . Интегрирование в (8) при вычислении  $Z_1$  осуществлялось по поверхности внешнего проводника, а при вычислении  $Z_2$  — по поверхности внутреннего.

Точное значение  $Z$  для этого случая равно 49,82 [2]. Из таблицы видно, что для  $Z_1$  наблюдается быстрая осциллирующая сходимость решения по приближениям к точному значению, в отличие от  $Z_2$  имеющего монотонную сходимость и значительно худшее совпадение с точным значением. Зависимость  $Z_1$  от  $M$  уже для второго приближения ( $N=1$ ), начиная с  $M=50$ , практически отсутствует.

Таблица 2

a/l	Z, Ом точно [5]	Z, Ом данный алгоритм	\Delta Z , %	Z, Ом [1]	\Delta Z , %	Z, Ом [6]	\Delta Z , %
0,99	270,69	272,04	0,5	260,70	3,69	—	—
0,9	132,65	132,87	0,16	132,1	0,41	—	—
0,8	91,11	91,21	0,11	90,94	0,19	92,0	0,98
0,7	66,87	66,93	0,09	66,81	0,09	67,5	0,94
0,6	49,82	49,85	0,06	49,79	0,06	50,5	1,37
0,5	36,81	36,82	0,03	36,80	0,03	37,0	0,52

Сравнение полученных результатов (табл. 2) с точными [2, 5] для различных размеров проводников такой линии показывает хорошее совпадение. Этот результат сохраняется даже в случае очень малых размеров центрального проводника  $s=0,02l$ . В таблице приведены также результаты, полученные в [6] методом сеток и в [1] обычным МЧО. Из сравнения этих результатов с точными видно, что метод сеток дает значительно худшее совпадение для любых геометрических размеров проводников, а в МЧО относительная ошибка результата существенно увеличивается с уменьшением размеров центрального проводника.

Расчетные формулы для трехплоскостной симметричной линии получаются из формул для симметричной экранированной прямоугольной линии, в которых необходимо устремить размеры  $c \rightarrow \infty$  и  $(h - s - c) \rightarrow \infty$ . Был проведен расчет характеристического сопротивления линии с воздушным заполнением при различных размерах линии. Проверка результатов расчетов осуществлялась сравнением с результатами, полученными с высокой точностью методом конформного преобразования [2]. Результаты сравнения приведены в табл. 3.

Формулы для расчета параметров желобковой линии получаются из формул для экранированной прямоугольной линии, в которых необходимо перейти к пределу при  $h \rightarrow \infty$ . Некоторые результаты расчетов  $Z$  желобковой линии приведены на рис. 4. Сплошной кривой обозначены результаты для линии с воздушным заполнением ( $\epsilon_1 = 1$ ), штриховой ( $\epsilon_1 = 7$ ) и штрихпунктирной ( $\epsilon_1 = 10$ ) — для линии с диэлектрической подложкой. Из графиков следует, что помещение в первой области диэлектрика уменьшает характеристическое сопротивление и делает его в меньшей степени зависимой от толщины центрального проводника.

Таблица 3

$a/l$	$s/l$	$Z, Ом$ [2]	$Z, Ом$	$ \Delta Z ,$ %
0,2	3,10414	10,00	10,00	0,00
	1,22068	20,00	20,01	0,05
	0,093	50,00	50,05	0,1
0,9	3,19406	40,00	40,03	0,07
	2,34654	50,00	50,04	0,08
	1,78166	60,00	60,05	0,08
0,65	0,63444	70,00	70,05	0,08
	0,41958	80,00	80,08	0,1
	0,25708	90,00	90,10	0,11

Таким образом, учет существующей особенности поведения поля вблизи ребер внутреннего проводника позволил значительно улучшить сходимость метода и повысить точность результатов расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аржанов С. Н., Маркова С. А., Раевский С. Б., Сморгонский В. Я.— Изв. вузов — Радиоэлектроника, 1979, 22, № 9, с. 23.
2. Ганстон М. А. Р. Справочник по волновым сопротивлениям фидерных линий СВЧ.— М.: Связь, 1976, с. 152.
3. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Полосковые линии передачи.— М.: Наука, 1980, с. 312.
4. Никольский В. В., Дружинин А. В.— Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 7, с. 1331.
5. Bowman F. Introduction to elliptic functions. Dover New York, 1961.
6. Metcalf W. S.— PИEE, 1965, 112, № 11, p. 2033.
7. Заргано Г. Ф., Лерер А. М., Михалевский В. С., Синявский Г. П.— Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 10, с. 2068.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступила в редакцию  
17 мая 1982 г.

#### CALCULATION OF BAND TRANSMISSION LINES BY THE METHOD OF PARTIAL REGIONS TAKING INTO ACCOUNT PECULIARITIES AT THE EDGE

G. F. Zargano, G. P. Sinyavskij, V. P. Tkachenko

Calculation have been made for the parameters of band transmission lines with a finite depth of conductors. The application of the method of partial regions is considered taking into account peculiarities at the edge. A program has been developed which permits to compute in the quasi-static approximation fields and the characteristic resistances of nonsymmetrical screened, rectangular, quadratic coaxial, groove, three-plane symmetrical lines. The convergence of the method and the accuracy of the results obtained have been analysed.