ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 3 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 537.87,621.371

ПОРОГОВЫЕ ОСОБЕННОСТИ В ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПЕРИОДИЧЕСКОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Ю. М. Айвазян, В. А. Созинов

Рассмотрены особенности в амплитудах и фазах дифрагированных волн, появляющиеся на пороге возникновения новых спектральных порядков, при дифракции плоской электромагнитной волны на двумерном периодическом полупространстве. Показано, что особенности имеют корневой характер, а при появлении новой собственной волны в воздухе или в периодической среде возникают аномальные изменения в амплитудах и фазах уже существующих дифракционных порядков в обеих средах.

Известно, что при дифракции плоских электромагнитных волн на отражающих дифракционных решетках волны различных спектральных порядков испытывают существенную перестройку вблизи порога возникновения волны нового спектрального порядка [1–3]. Такая перестройка приводит к аномальному поведению дифрагированных волн, которое обычно проявляется в резких изменениях их амплитуд в достаточно узких спектральных интервалах вблизи пороговых точек. Это явление было экспериментально обнаружено Р. Вудом и носит название аномалий Вуда. К настоящему времени стало ясно [1, 4], что аномалии Вуда объясняются композицией двух типов аналитических особенностей в амплитудах дифрагированных волн: а) корневыми ветвлениями в пороговых точках и б) полюсами в амплитудах рассеянных волн, которые приводят к так называемым резонансным особенностям. Корневые особенности появляются на пороге образования волны нового спектрального порядка и приводят к появлению бесконечных производных или характерных резких изломов в амплитудах и фазах волн уже существующих спектральных порядков в пороговых точках. Такое поведение амплитуд и фаз дифрагированных волн является типичным для корневых пороговых явлений [2, 5].

Корневой характер амплитуд и фаз дифрагированных волн в пороговых точках, вообще говоря, имеет место не только для отражающих металлических решеток, но и свойствен более сложным периодическим структурам. В настоящей работе мы рассматриваем дифракцию электромагнитной волны, падающей из свободного полупространства на двумерно-периодическую диэлектрическую среду. Предполагается, что диэлектрическое полупространство является двумерно-периодическим в плоскостях, параллельных границе раздела сред. Корневой характер особенностей, возникающих в амплитудах и фазах отраженных волн в свободном пространстве и волн в периодической среде, при появлении волны нового порядка в любой из сред может быть показан на основе таких общих понятий, как закон сохранения энергии, периодические и аналитические свойства решений, существование корневых пороговых параметров и системы ортонормированных собственных волн двумерно-периодической диэлектрической среды. Очевидно, что эти общие предположения позволяют рассматривать произвольную структуру периода прямой ячейки периодической среды. В то же время ясно, что строгое решение задачи дифракции в рассматриваемом нами случае связано с большими трудностями.

Для доказательства корневого характера пороговых особенностей рассмотрим диэлектрическое двумерно-периодическое полупространство ($z>0$), граница которого совпадает с плоскостью $z=0$. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость периодического полупространства ε является произвольной периодической функцией ρ: $\varepsilon(\rho)=\varepsilon(\rho+m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b})$, где $\rho=(x, y)$ — проекция радиуса-вектора на плоскость границы, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — базисные векторы элементарных трансляций периодической структуры, а m и n — целые числа.

Пусть из свободного полупространства ($z<0$) на двумерно-периодическую среду ($z>0$) падает плоская электромагнитная волна, магнитная компонента которой имеет вид

$$H^{\sigma-}=H_0^{\sigma-}\exp\left(i\varkappa\rho+i\sqrt{\omega^2c^{-2}-\varkappa^2}\,z-i\omega t\right), \tag{1}$$

где $\varkappa$ — проекция волнового вектора на плоскость границы раздела $z=0$, ω — частота падающей волны, c — скорость света в вакууме.

Магнитные компоненты волн в свободном полупространстве имеют следующий вид:

$$H_\tau^{\sigma\pm}=H_{0\tau}^{\sigma\pm}\exp\{i(\varkappa+\tau)\rho\mp i\zeta_\tau z-i\omega t\}, \tag{2}$$

где $\tau=p\boldsymbol{a}^*+q\boldsymbol{b}^*$, а $\boldsymbol{a}^*$ и $\boldsymbol{b}^*$ — базисные векторы обратной решетки, p и q — целые числа, определяющие порядок дифракционного спектра. В дальнейшем каждой паре чисел p и q сопоставляется один векторный индекс τ. Верхние знаки в (2) соответствуют дифрагированным волнам, уносящим энергию от границы раздела двух сред, а нижние—волнам, которые несут энергию к границе. Величина $\zeta_\tau=\sqrt{\omega^2c^{-2}-(\varkappa+\tau)^2}$ —постоянная распространения волны с индексом τ в направлении оси z. Индекс $\sigma=1{,}2$ характеризует поляризацию волн. При определении ζ_τ выбрана та ветвь корня, для которой ζ_τ являются положительными для распространяющихся (однородных) волн и чисто мнимыми $\zeta_\tau=i|\zeta_\tau|$ для неоднородных волн.

Очевидно, что распространяющимися волнами являются только такие волны, для которых $\omega^2c^{-2}-(\varkappa+\tau)^2>0$.

Для построения системы собственных волн бесконечной двумерно-периодической диэлектрической среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, y)$ будем исходить из уравнений Максвелла в декартовой системе координат (x, y, z). Вследствие однородности периодической среды в направлении оси z примем зависимость составляющих поля от координаты z в виде $\exp(\pm i\tilde{\zeta}_\tau^\sigma z)$, где $\tilde{\zeta}_\tau^\sigma$ — постоянная распространения волны с индексами τ и σ. В дальнейшем все величины со знаком $\sim$ будем относить к периодической среде.

Система однородных уравнений Максвелла приводит к операторному уравнению

$$M\tilde{H}_{\tau\perp}^\sigma=(\tilde{\zeta}_\tau^\sigma)^2\tilde{H}_{\tau\perp}^\sigma, \tag{3}$$

где $\tilde{H}_{\tau\perp}^\sigma=\begin{pmatrix}\tilde{H}_{\tau x}^\sigma\\ \tilde{H}_{\tau y}^\sigma\end{pmatrix}$ — поперечный вектор напряженности магнитного поля (проекция вектора $\tilde{H}_\tau^\sigma$ на плоскость x, y), M — дифференциальный оператор, определенный во всей плоскости x, y:

$$M=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial y}+\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon & \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial y}\dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\dfrac{\omega^2}{c^2}\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Вследствие периодичности рассматриваемой структуры дифрагированное поле должно удовлетворять условию квазипериодичности Флоке на границе элементарной ячейки [6], что позволяет искать решение уравнения (3) в области одной ячейки прямой структуры. Решение уравнения (3) методом Галеркина с использованием в качестве базисных функций гармоник Флоке приводит к следующему представлению вектора напряженности магнитного поля для собственной волны с индексами τ и σ:

$$\boldsymbol{H}^{\sigma\pm}_{\tau\perp}=\exp\left[i(\varkappa+\tau)\rho\pm i\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}z\right]\sum_{\tau'}\boldsymbol{a}^{\sigma}_{\tau\tau'}\exp\left(i\tau'\rho-i\omega t\right), \tag{5}$$

где $\boldsymbol{a}^{\sigma}_{\tau\tau'}$ — собственные векторы амплитудных коэффициентов.

Очевидно, при решении граничной задачи волны (5) в периодической среде должны сшиваться с волнами (2) в открытом полупространстве на плоскости $z=0$. Отметим, что при этом верхние знаки в (5) соответствуют волнам, уносящим энергию от границы раздела в периодическую среду, а нижние — волнам, которые несут энергию к границе. В зависимости от того, являются ли $\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$ действительными или мнимыми, моды (5) представляют собой однородные или неоднородные волны, причем $\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}=0$ на пороге образования однородной волны с индексами τ и σ. Можно показать, что вблизи порога образования однородной волны нового порядка в среде, независимо от вида периодичности среды, величины $\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$ имеют корневой вид. Действительно, рассмотрим тот лист многолистной дисперсионной поверхности, который соответствует образованию однородной волны нового спектрального порядка с индексами τ и σ. Из соображений симметрии ясно, что в пороговой точке $\partial f/\partial\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}=0$, где f — функция от ω, $\varkappa$, $\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$ и параметров периодической структуры, обращается в нуль на рассматриваемом листе дисперсионной поверхности. Поэтому в разложении функции f по $\delta\varkappa$ и $\delta\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$ вблизи пороговой точки член, пропорциональный $\delta\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$, отсутствует (так как $\partial f/\partial\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}=0$), а следующий член, пропорциональный $(\delta\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau})^2$, вообще говоря, не равен нулю. Это обстоятельство и приводит к корневому виду порогового параметра.

Моды (5) с различными τ и σ являются ортогональными при интегрировании по ρ в пределах элементарной ячейки прямой структуры F. При этом

$$\overline{\int_F\left[(\tilde{\boldsymbol{E}}^{\sigma\pm}_{\tau})^{*},\ (\tilde{\boldsymbol{H}}^{\sigma'\pm}_{\tau'})\right]_z d\rho}=\pm\,\beta\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}\,\delta_{\tau\tau'}\delta_{\sigma\sigma'},$$

где $\tilde{\boldsymbol{E}}^{\sigma}_{\tau}$ — вектор напряженности электрического поля в моде с индексами τ и σ, * означает комплексное сопряжение, β — размерный множитель, одинаковый для всех мод, а черта над выражением означает усреднение по времени. Таким образом, усредненный по времени поток энергии, переносимый однородной волной с индексами τ и σ вдоль оси z в пределах одной элементарной ячейки прямой структуры, пропорционален $\tilde{\zeta}^{\sigma}_{\tau}$. Аналогичным образом могут быть нормированы и волны в свободном пространстве (2), причем соответствующий поток энергии будет пропорционален ζ_{τ}.

Чтобы показать, что характер особенностей, возникающих на пороге образования новых волн, будет корневым, воспользуемся следующим приемом [2]. Предположим, что на границу раздела двух сред падают волны типа (2) и (5) из свободного полупространства и периодической среды с произвольными коэффициентами α^{σ}_{τ} и $\tilde{\alpha}^{\sigma}_{\tau}$ соответственно, которые затем трансформируются границей в уходящие от границы волны. Для сокращения записи в дальнейшем индексы τ и σ объединены в один, например M или N. Магнитные компоненты полей в обеих средах будут иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{H} = \begin{cases} \sum\limits_{M}' \alpha_M \boldsymbol{H}_M^- + \sum\limits_{M}' \sum\limits_{N} \alpha_M K_{MN} \boldsymbol{H}_N^+ + \sum\limits_{M}' \sum\limits_{N} \tilde{\alpha}_M L_{MN} \boldsymbol{H}_N^+, & z < 0 \\ \sum\limits_{M}' \tilde{\alpha}_M \tilde{\boldsymbol{H}}_M^- + \sum\limits_{M}' \sum\limits_{N} \tilde{\alpha}_M P_{MN} \tilde{\boldsymbol{H}}_N^+ + \sum\limits_{M}' \sum\limits_{N} \alpha_M Q_{MN} \tilde{\boldsymbol{H}}_N^+, & z > 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Здесь матрицы K, Q, L, P — есть матрицы трансформации волн, падающих на границу двух сред, в уходящие от границы волны. Например, матрица трансформации K описывает трансформацию волн, падающих из свободного полупространства, в волны, уходящие от границы раздела в свободное полупространство и т. д. В выражении (6) и ниже Σ' означает, что суммирование проводится только по распространяющимся волнам (открытым каналам). В силу произвольности коэффициентов α_M и $\tilde{\alpha}_M$ в (6) из равенства усредненных по времени и элементарной ячейке прямой структуры z-компонент вектора Пойнтинга падающих на границу и рассеянных волн найдем, что при условии отсутствия поглощения в среде матрица рассеяния является унитарной, т. е.

$$\sum_N' S_{MN} S^*_{NM'} = \delta_{MM'}. \quad (7)$$

Квадратная матрица S составлена из матриц S_1, S_2, S_3, S_4:

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Матрицы S_1, S_2, S_3, S_4 связаны с матрицами трансформации K, Q, L, P следующим образом:

$$\begin{aligned} (S_1)_{MN} &= \sqrt{\zeta_N \zeta_M^{-1}}\, K_{MN}, \quad (S_2)_{MN} = \sqrt{\tilde{\zeta}_N \zeta_M^{-1}}\, Q_{MN}, \\ (S_3)_{MN} &= \sqrt{\zeta_N \tilde{\zeta}_M^{-1}}\, L_{MN}, \quad (S_4)_{MN} = \sqrt{\tilde{\zeta}_N \tilde{\zeta}_M}\, P_{MN}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что матрицы S_2 и S_3, так же как и матрицы Q и L, не обязательно являются квадратными, так как числа открытых каналов в свободном полупространстве и в периодической среде могут быть различными. Полная же матрица рассеяния S всегда является квадратной.

Соотношение унитарности (7) и выражения (9) позволяют обычным образом [2, 5], разлагая матрицу S по малой ветвящейся величине

ζ_{N_0} или $\tilde{\zeta}_{N_0}$ вблизи порога открытия соответствующего канала в одной из сред, установить, что элементы матрицы рассеяния S вблизи порога открытия нового канала имеют вид $S_{MN} = S^{(0)}_{MN} + \zeta_{N_0} S^{(1)}_{MN}$, где через ζ_{N_0} означен пороговый параметр вновь открывающего канала в воздухе или в периодической среде, а матрица $S^{(1)}$ выражается через матрицу рассеяния на пороге $S^{(0)}$ (при $\zeta_{N_0}=0$) и матрицу B следующим образом: $S^{(1)} = -(1/2)BS^{(0)}$, причем элементы матрицы B имеют вид

$$B_{MM'} = \frac{1}{\sqrt{\zeta_M \zeta_{M'}}} R^{(0)}_{MN_0} R^{(0)*}_{N_0M'}, \quad \text{где } R^{(0)} = \begin{pmatrix} K^{(0)} & Q^{(0)} \\ L^{(0)} & P^{(0)} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Отметим, что возможны случаи, когда одновременно открываются два или более каналов. Рассуждения в этом случае аналогичны за исключением того, что в выражении для матрицы B (10) необходимо провести суммирование по всем открывающимся каналам.

Соотношения

$$\begin{aligned} S &= S^{(0)} - 0{,}5i\,|\zeta_{N_0}|\,BS^{(0)} \quad \text{до порога,} \\ S &= S^{(0)} - 0{,}5\zeta_{N_0} BS^{(0)} \quad \text{после порога} \end{aligned} \tag{11}$$

показывают, что в амплитудах и фазах открытых каналов возникают корневые особенности вида $A + \zeta_{N_0} C$, где функции A и C зависят от частоты и угла падения дифрагирующей волны и от параметров диэлектрической периодической структуры.

Отметим, еще раз, что приведенное доказательство носит общий характер и опирается на достаточно общие предположения. В частности, оно справедливо и при размытой или периодически неровной границе (в случае отсутствия поверхностных волн).

В качестве примера, наглядно демонстрирующего появление пороговых корневых аномалий, можно привести решение, полученное в работе [7] и относящееся к случаю одномерно-периодической среды. На графиках работы [7], полученных путем численных расчетов для случая синусоидально модулированного полупространства, имеются характерные резкие изломы и бесконечные производные, возникающие в амплитудах дифрагированных волн при появлении волны нового спектрального порядка в обеих средах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hessel A., Oliner A. A.— Appl. Opt., 1965, **4**, № 10, p. 1275.
2. Болотовский Б. М., Лебедев А. И.— ЖЭТФ, 1967, **53**, № 10, с. 1349.
3. Fox J. R — Optica Acta, 1980, **27**, № 3, p. 289.
4. Andrewartha J. R., Fox J. R., Wilson I. J.— Optica Acta, 1979, **26**, № 1, p. 69; 1979, **26**, № 2, p. 197.
5. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.— М.: Наука, 1961.
6. Амитей Н, Галиндо В, Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток.— М : Мир, 1974.
7. Tamir T.— Can. J. Phys, 1966, **44**, p 2461.

Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений

Поступила в редакцию 30 июня 1982 г.

THRESHOLD SINGULARITIES IN DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVES BY A PERIODIC HALF-SPACE

Yu. M. Ajvazian, V. A. Sozinov

Singularities in the amplitudes and phases of diffracted waves at the threshold of appearance of a new spectral order in diffraction of electromagnetic waves by a two-dimensional periodic half-space are considered. It is shown that the singularities are square root branch points and anomalous variations of the diffracted wave amplitudes and phases do occur when the diffracted waves are near threshold of appearance of a new eigenwave in both free or periodic half-space.