УДК 538.566 2

К ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В. А. Давыдов

Построена теория возмущений для расчета переходного излучения в анизотропных средах. Полученные общие формулы применены для вычисления спектральных, угловых и поляризационных характеристик переходного излучения на размытой границе анизотропных сред, а также в холестерическом жидком кристалле.

Среди большого количества работ, посвященных теории переходного излучения [1], число статей об излучении в анизотропных средах относительно невелико. Это связано с большими трудностями, возникающими при решении неоднородных уравнений Максвелла в средах, тензор диэлектрической проницаемости которых является функцией координат. Количество точно решаемых задач при этом весьма ограничено, и поэтому возникает необходимость использования приближенных методов.

В работе [2] предложена теория возмущений для вычисления углового и спектрального распределения энергии излучения источников в неоднородных и нестационарных средах. Ее обобщение на случай сред с меняющейся анизотропией несложно. Пусть тензор диэлектрической проницаемости среды имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}, t) = \varepsilon_0 \delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{r}, t), \tag{1}$$

где δ_{ij} — единичный тензор. Энергия электрического поля $\boldsymbol{E}$ равна

$$H = \frac{1}{8\pi} \int dV \varepsilon_{ij} E_i E_j = H_0 + H_1, \tag{2}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{8\pi} \int dV \varepsilon_0 E_i E_i, \quad H_1 = \frac{1}{8\pi} \int dV \Delta\varepsilon_{ij} E_i E_j.$$

Если $H_1 \ll H_0$, появляется возможность построения теории возмущений на основе гамильтониана H_1. Следуя [2], нетрудно получить выражение для спектрального и углового распределения энергии излучения какого-либо источника электрического поля в среде, тензор диэлектрической проницаемости которой меняется в пространстве и во времени по закону (1):

$$W_{\boldsymbol{k},\lambda}\, d^3k = \frac{\omega^2 (2\pi)^4}{4\varepsilon_0(\omega)} \left| \int \Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_1, \omega - \omega_1) \times \right.$$
$$\left. \times\, e_i^\lambda E_j^q (\boldsymbol{k}_1, \omega_1)\, d\boldsymbol{k}_1\, d\omega_1 \right|^2 d^3k, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{e}^\lambda$ — вектор поляризации излученной волны, $\boldsymbol{k}$ — ее волновой вектор, $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon_0}$ — частота, $\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k}_1, \omega_1)$ и $\boldsymbol{E}^q(\boldsymbol{k}_1, \omega_1)$ — соответственно фурье-компоненты переменной части тензора диэлектрической проницаемости (1) и поля источника $\boldsymbol{E}^q$.

Применим теперь полученные формулы для расчета переходного излучения в анизотропных средах. Пусть частица с зарядом q движется со скоростью V в среде с тензором диэлектрической проницаемости вида (для простоты мы считаем ε_{ij} зависящим только от одной координаты x)

$$\varepsilon_{ij}(x)=\varepsilon_0\delta_{ij}+\Delta\varepsilon_{ij}(x). \tag{4}$$

При этом фурье-образ переменной части тензора $\Delta\varepsilon_{ij}$ равен

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k}_1,\ \omega_1)=\delta(\omega_1)\,\delta(k_{1z})\,\delta(k_{1y})\,\Delta\varepsilon_{ij}(k_{1x}), \tag{5}$$

где

$$\Delta\varepsilon_{ij}(k_{1x})=\frac{1}{2\pi}\int\exp(-ik_{1x}x)\,\Delta\varepsilon_{ij}(x)\,dx.$$

Фурье-компонента электрического поля равномерно движущегося заряда равна

$$\boldsymbol{E}^q(\boldsymbol{k}_1,\ \omega_1)=\frac{i4\pi q}{(2\pi)^3}\,\frac{\delta(\omega_1-\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{V})}{(k_1^2-\varepsilon_0\omega_1^2/c^2)}\left(\frac{\omega_1\boldsymbol{V}}{c^2}-\frac{\boldsymbol{k}_1}{\varepsilon_0}\right). \tag{6}$$

Подставляя (5), (6) в (3), получим выражение для углового и спектрального распределения энергии переходного излучения:

$$W_{\boldsymbol{k},\lambda}\,d^3k=\frac{q^2\omega^2}{\varepsilon_0V_x^2}\,\frac{\left|\Delta\varepsilon_{ij}\left((\boldsymbol{k}\boldsymbol{V}-\omega)\,V_x^{-1}\right)e_i^\lambda\left(\omega\boldsymbol{V}c^{-2}-\boldsymbol{\varkappa}\varepsilon_0^{-1}\right)_j\right|^2d^3k}{(\varkappa^2-\varepsilon_0\omega^2c^{-2})^2}, \tag{7}$$

где

$$\boldsymbol{\varkappa}=\left((\omega-k_yV_y-k_zV_z)\,V_x^{-1},\ k_y,\ k_z\right).$$

Как следует из (7), расчет углового и спектрального распределения энергии переходного излучения (в том числе и при наклонном падении заряда) сводится к вычислению компоненты Фурье переменной части тензора диэлектрической проницаемости. Фурье-компоненту $\Delta\varepsilon_{ij}(x)$ можно без труда найти для случая одной или нескольких границ раздела анизотропных сред, для случая периодического изменения анизотропии и т. д.

Рассмотрим в качестве примера переходное излучение на размытой границе изотропной среды и одноосного кристалла. Точное решение задачи о переходном излучении на резкой границе (при направлении оптической оси перпендикулярно границе) получено в [3]. Пусть тензор диэлектрической проницаемости среды имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(x)=\varepsilon_0\delta_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}e^{\alpha x}(1+e^{\alpha x})^{-1}, \tag{8}$$

где $\delta\varepsilon_{ij}$ — постоянная величина. При $x\to-\infty$ среда изотропна и имеет диэлектрическую проницаемость ε_0. При $x\to+\infty$ среда становится анизотропной, и ее тензор диэлектрической проницаемости равен $\varepsilon_0\delta_{ij}+\delta\varepsilon_{ij}$. Переход от изотропной среды к анизотропной происходит плавно на характерном расстоянии $L=1/\alpha$, так что формула (8) описывает размытую границу этих двух сред.

Найдем фурье-образ переменной части диэлектрической проницаемости:

$$\Delta\varepsilon_{ij}(k_{1x})=\frac{\delta\varepsilon_{ij}}{2\pi}\int dx\,\frac{\exp\left[(\alpha-ik_{1x})\,x\right]}{1+\exp(\alpha x)}. \tag{9}$$

Замена переменных $e^{\alpha x}=u$ приводит к табличному интегралу [4], так что окончательно получаем

$$\Delta\varepsilon_{ij}(k_{1x})=-i\,\frac{\delta\varepsilon_{ij}}{2\alpha}\left[\operatorname{sh}\left(\frac{\pi k_{1x}}{\alpha}\right)\right]^{-1}. \tag{10}$$

Подстановка (10) в (7) приводит к общему выражению для спектрального и углового распределения энергии переходного излучения на размытой границе. Это выражение сильно упрощается, если частица влетает в кристалл нормально границе. В этом случае имеем ($\boldsymbol{V} = (V, 0, 0)$)

$$W_{\boldsymbol{k},\lambda}\, d\omega d\Omega = \\ = \frac{q^2 V^2 \varepsilon_0^{1/2} [\delta\varepsilon_{ij} e_i^\lambda (\omega V c^{-2} - \boldsymbol{\varkappa}\varepsilon_0^{-1})_j]^2 d\omega d\Omega}{4c^3 (1 - V^2 c^{-2} \varepsilon_0 \cos^2\theta)^2 \alpha^2 \operatorname{sh}^2 [\pi\omega (\alpha V)^{-1} (1 - V c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta)]}, \tag{11}$$

где $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon_0}$, θ — полярный угол сферической системы координат с осью x, $d\Omega$ — элемент телесного угла, $\boldsymbol{\varkappa} = (\omega/V, k_y, k_z)$.

Рассмотрим излучение малых частот, при которых аргумент гиперболического синуса в (11) много меньше единицы. Раскладывая гиперболический синус в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, получим

$$W_{\boldsymbol{k},\lambda} d\omega d\Omega = \\ = \frac{q^2 V^4 \varepsilon_0^{1/2} \{\delta\varepsilon_{ij} e_i^\lambda (\omega V c^{-2} - \boldsymbol{\varkappa}\varepsilon_0^{-1})_j\}^2 d\omega d\Omega}{4\pi^2\omega^2 c^3 (1 - V^2 c^{-2} \varepsilon_0 \cos^2\theta)^2 (1 - V c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta)^2} \left[1 - \frac{\pi^2}{3} \frac{L^2}{L_f^2}\right], \tag{12}$$

где $L_f = V\omega^{-1}(1 - Vc^{-1}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta)^{-1}$ — длина формирования излучения. Выражение, стоящее в (12) перед квадратными скобками, представляет собой энергию переходного излучения на резкой границе раздела. Из (12) следует критерий применимости приближения резкой границы, впервые полученный в [5] для изотропных сред: границу можно считать резкой, если $L \ll L_f$. В обратном случае, если $L \gg L_f$, энергия излучения экспоненциально мала. В случае, когда оптическая ось кристалла перпендикулярна границе раздела, тензор $\delta\varepsilon_{ij}$ имеет вид

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta\varepsilon\delta_{i1}\delta_{1j} = \delta\varepsilon \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Подставив (13) в общую формулу (11), найдем выражение для спектрального и углового распределения энергии излучения. Его рассмотрение показывает, что в случае, когда оптическая ось перпендикулярна границе раздела, излучаются только необыкновенные волны (т. е. волны, вектор поляризации которых лежит в плоскости, образованной оптической осью кристалла и направлением излучения), энергия которых равна

$$W_{\omega,\theta} d\omega d\Omega = \\ = \frac{q^2 (\delta\varepsilon)^2 (1 - V^2 c^{-2} \varepsilon_0)^2 \sin^2\theta \omega^2 d\omega d\Omega}{4\varepsilon_0^{3/2} c^3 \alpha^2 \operatorname{sh}^2 [\pi\omega(\alpha V)^{-1}(1 - Vc^{-1}\sqrt{\varepsilon_0}\cos\theta)](1 - V^2 c^{-2}\varepsilon_0 \cos^2\theta)^2}. \tag{14}$$

С помощью (11) можно получить выражение для энергии излучения при любой взаимной ориентации границы и оптической оси красталла, однако они весьма громоздки, и их нет смысла приводить. Отметим, что излучение ультрарелятивистской частицы в случае, когда кристаллическая ось параллельна резкой границе, рассмотрено в [6].

Перейдем теперь к вычислению излучения равномерно движущейся частицы в холестерическом жидком кристалле (ХЖК). Симметрия ХЖК оказывается периодической вдоль одного направления (выберем его в качестве оси x) в пространстве, так что конец единичного вектора, определяющего направление оптической оси в каждой точке ХЖК (так называемого директора), описывает винтовую линию с осью x. Переменная часть тензора диэлектрической проницаемости (4) имеет вид

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\cos k_0 x & -\sin k_0 x \\ 0 & -\sin k_0 x & 1+\cos k_0 x \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

где k_0 — число, определяющее шаг винтовой линии. Поскольку $\Delta\varepsilon/\varepsilon_0 \sim 10^{-2}$ [7], то для расчета переходного излучения вполне применима изложенная выше теория возмущений. Пусть заряженная частица движется вдоль оси x с дочеренковской скоростью $V < c\sqrt{\varepsilon_0}$. Вычисляя фурье-образ (15) и подставляя его в (7), получим с учетом (6) выражение для энергии излучения

$$W_{k,\lambda}\, d^3k = \frac{(\Delta\varepsilon)^2 q^2 \omega^2 V^2 \delta^2 (k_0 + k_x - \omega/V)}{4\varepsilon_0^3 (\omega^2 - k_x^2 V^2)^2} \times$$
$$\times \left| (- e_y^\lambda k_y - i e_y^\lambda k_z - i e_z^\lambda k_y + e_z^\lambda k_z) \right|^2 d^3k. \qquad (16)$$

Величина, стоящая в (16) под знаком модуля, определяет поляризацию излучения, которая оказывается в общем случае эллиптической. Отношение осей эллипса равно $\cos\theta$, где θ — полярный угол сферической системы координат с осью x, определяющий направление излучения. Вперед и назад излучаются волны круговой поляризации; излучение в направлении, перпендикулярном оси x, поляризовано линейно, так что вектор поляризации лежит в плоскости yz. Квадрат δ-функции в (16) делает выражение для энергии излучения расходящимся, поэтому речь должна идти об энергии излучения с единицы длины пути частицы. Заменив одну из δ-функций в (16) на $L/2\pi$, где L — длина пути, получим формулу для углового и спектрального распределения энергии излучения с единицы длины:

$$W_{\omega,\theta} L^{-1} d\omega d\theta =$$
$$= \frac{(\Delta\varepsilon)^2 q^2 V^2 \omega^2 \sin^3\theta (1 + \cos^2\theta)\, \delta (k_0 + \omega c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta - \omega V^{-1})\, d\omega d\theta}{4\varepsilon_0 c^5 (1 - V^2 c^{-2} \varepsilon_0 \cos^2\theta)^2}. \qquad (17)$$

Выражение (17) может быть получено более строго. Рассмотрим для этого излучение в пластинке из ХЖК толщиной L, грани которой перпендикулярны оси x и расположены симметрично относительно начала координат. Будем считать L настолько большим ($L \gg 2\pi/k_0$), что энергией переходного излучения от граней пластинки можно пренебречь по сравнению с энергией излучения в самом ХЖК. При этом член, стоящий под знаком модуля в (7), будет пропорционален не δ-функции, а

$$\frac{\sin [L (k_0 + \omega \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta / c - \omega/V)/2]}{\pi (k_0 + \omega \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta / c - \omega/V)}.$$

Энергия излучения при этом окажется пропорциональной выражению

$$\frac{\sin^2 [L (k_0 + \omega \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta / c - \omega/V)/2]}{\pi^2 (k_0 + \omega \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta / c - \omega/V)^2},$$

которое в пределе $L \to \infty$ обращается в $L\delta (k_0 - \omega\sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta/c - \omega/V)/2\pi$ [8]. Подставляя последнее выражение в (16) (вместо $\delta^2(k_0 + k_x - \omega/V)$), придем к (17).

Как следует из (17), излучение возможно лишь при условии

$$k_0 + \omega c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta - \omega V^{-1} = 0, \qquad (18)$$

поэтому угол и частота излучения связаны соотношением

$$\omega = k_0 V (1 - V c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0} \cos\theta)^{-1}, \tag{19}$$

которое имеет место в случае излучения в периодически неоднородной среде (так называемое резонансное излучение [9]). Спектр излучения при этом ограничен сверху и снизу:

$$k_0 V (1 + V c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0})^{-1} \leqslant \omega \leqslant k_0 V (1 - V c^{-1} \sqrt{\varepsilon_0})^{-1}. \tag{20}$$

Интегрируя (17) по углу θ, получим спектральное распределение энергии излучения

$$\frac{W_\omega}{L} d\omega = \frac{(\Delta\varepsilon)^2 q^2 V^2 \omega (1 - \cos^4\theta_0) d\omega}{4\varepsilon_0 c^4 (1 - V^2 c^{-2} \varepsilon_0 \cos^2\theta_0)^2}, \tag{21}$$

где

$$\cos\theta_0 = c (V \sqrt{\varepsilon_0})^{-1} (1 - k_0 V/\omega).$$

Излучение равномерно движущейся заряженной частицы в ХЖК рассматривалось в [10]. Однако выражение для энергии излучения, полученное в [10], расходится с результатами настоящей работы (формула (17)). Так, в выражении для энергии излучения в [10] отсутствует существенная черта, присущая переходному излучению — резкое увеличение энергии излучения при стремлении скорости частицы к черенковскому порогу. Из-за небольшого объема работы [10] в ней приведены фактически только постановка задачи и окончательный результат. Поэтому причины расхождения выражений для излученной энергии не вполне ясны. Как сообщил нам один из авторов [10], решение задачи об излучении в ХЖК, полученное в [10], применимо лишь при условиях $V \approx c/\sqrt{\varepsilon_0}$ и $\theta \approx \pi/2$. Однако даже при этих условиях результаты [10] и (17) не совпадают.

Автор благодарит Б. М. Болотовского, И. М. Тернова, Г. А. Чижова, а также В. А. Белякова, В. П. Орлова и участников семинара ВНИИФТРИ за ценные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Библиографический указатель работ по переходному излучению 1946—1976 гг.— Ереван: 1977.
2. Давыдов В. А.— ЖЭТФ, 1981, **80**, № 3, с. 859.
3. Болотовский Б. М., Плис А. И. Препринт ФИАН № 76.— М., 1973.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
5. Аматуни А. Ц., Корхмазян Н. А.— ЖЭТФ, 1960, **39**, № 4, с. 1011.
6. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— УФН, 1978, **126**, № 4, с. 553.
7. Беляков В. А., Дмитриенко В. Е, Орлов В. П.— УФН, 1979, **127**, № 2, с. 222.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.
9. Тер-Микаэлян М. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях.— Ереван: изд. АН АрмССР, 1969.
10. Belyakov V. A., Orlov V. P.— Phys. Lett, 1972, **A42**, p. 3.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 23 марта 1982 г.

TO THE THEORY OF THE TRANSITION RADIATION IN ANISOTROPIC MEDIA

V. A. Davydov

Disturbance theory has been built for the calculation of the transition radiation in anisotropic media. General formulas have been derived which are applicable for the calculation of spectral, angular and polarization characteristics of the transition radiation at the flattened boundary of anisotropic medium as well as in a cholesteric liquid crystal.