

УДК 534 232 : 532.574

НЕЛИНЕЙНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНИХ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ИСТОЧНИКОВ

С. Н. Гурбатов

На основе неоднородного уравнения Бюргера рассматривается взаимодействие акустических волн, возбуждаемых на границе среды, с волнами, возбуждаемыми синхронными внешними источниками. Показано, что предельный коэффициент усиления определяется совокупным действием параметрического усиления и нелинейного затухания. Исследована устойчивость гармонической волны накачки по отношению к шумовым возмущениям.

Известно, что при распространении волн в среде, свойства которой меняются во времени и в пространстве, происходит преобразование временных и энергетических характеристик сигнала. В частности, при соответствующем законе изменения параметров среды происходит увеличение энергии волны и параметрическое взаимодействие может быть использовано для усиления слабых сигналов [1]. Однако в средах без дисперсии, где при достаточно больших мощностях основным механизмом диссипации энергии является нелинейное поглощение, как, например, для акустических волн [2], нелинейные эффекты ограничивают эффективность усиления и предельный коэффициент усиления определяется совокупным действием эффектов параметрического усиления и нелинейного затухания.

Мы будем рассматривать параметрическое взаимодействие в средах без дисперсии, когда волна параметра — волна накачки — имеет ту же природу, что и сам сигнал. Волна накачки при этом может возбуждаться либо на границе (в акустике это звуковой удар или мощная гидроакустическая волна), или в самой среде распределенным синхронным внешним источником, как это имеет место при термооптическом лазерном возбуждении звука [3, 4]. Наряду с нелинейным искажением сигнала при этом необходимо учитывать и обратное влияние сигнала на волну накачки, которое приводит в общем случае к ее неустойчивости и к изменению ее характеристик на достаточно длинных трассах. В работе [5] была показана и исследована возможность параметрического усиления сигнала в поле квазисинхронных гармонических термооптических источников. Однако такие источники обладают селективным коэффициентом усиления на выделенной частоте. Для трансформации и усиления широкополосных сигналов необходимо использовать широкополосные источники.

В настоящей работе на основе неоднородного уравнения Бюргера рассмотрены особенности трансформации временных и энергетических характеристик нелинейных волн, взаимодействующих с передними или задними фронтами импульсов накачки, возбуждаемых внешними широкополосными распределенными источниками. Показано, что в данном случае неоднородное уравнение Бюргера заменой переменных сводится к однородному, а поле сигнала, взаимодействующего с волной накачки, подобно полю в свободном пространстве в некотором новом эффективном сечении среды.

1. При квазисинхронном возбуждении звука внешними распределенными источниками процесс возбуждения и нелинейного распространения может быть проведен в рамках неоднородного уравнения Бюргерса [3]:

$$u_t' + uu_x' = \nu u_{xx}' + f(x, t), \quad (1)$$

$$f(x, t) = -\partial F(x, t)/\partial x, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

Уравнение (1) для приведенной переменной $u(x, t)$ записано в бегущей системе координат x, t , которая связана с временем t' и расстоянием от входа в нелинейную среду соотношениями $t = x'/c, x = x' - ct'$, а $u_0(x) = u(x, t=0)$ в данном случае описывает поле на границе среды при $x' = 0$. Здесь $f(x, t)$ — внешний распределенный участок, возникновение которого в случае термооптического возбуждения звука обусловлено поглощением модулированного лазерного излучения. Кроме того, поскольку (1) часто используется как модельное уравнение теории турбулентности (см., например, [6, 7]) и, как показано в [8], описывает безвихревую пульсационную компоненту турбулентных потоков, то при случайной силе $f(x, t)$ уравнение (1) описывает стационарную одномерную акустическую турбулентность [9, 10], а при регулярированной силе $f(x, t)$ — трансформацию пульсационной компоненты турбулентности на регулярном течении. При $\nu = 0$ к уравнению (1) сводится также задача о возбуждении океанических волн конечной амплитуды бегущей волной давления $f(x, t) \sim \partial p(x, t)/\partial x$ [11]. И в данном случае задачи о взаимодействии начального поля $u_0(x)$ с вынужденным решением есть задачи о трансформации собственных волн на волне, возбуждаемой бегущей волной давления.

Как и однородное уравнение Бюргерса, уравнение (1) заменой Хопфа—Коула [12, 13] сводится к линейному уравнению диффузии [14, 15]:

$$u = \varphi_x', \quad \varphi = -2\nu \ln U; \quad (2)$$

$$U_t' = \nu U_{xx}'' + \frac{F(x, t)}{2\nu} U, \quad U(x, 0) = \exp \left[-\frac{\varphi(x, 0)}{2\nu} \right]. \quad (3)$$

При анализе неоднородного уравнения Бюргерса весьма полезной оказывается следующая аналогия. Если положить формально $\nu = 1/2ik_0$, то (3) переходит в параболическое квазиоптическое уравнение, описывающее распространение волн в неоднородной среде с показателем преломления $F(x, t)$ в малоугловом приближении. При этом φ и u в (2) играют роль фазы волны и угла волнового фронта. При $\nu \rightarrow 0$, что соответствует геометрооптическому приближению, для описания нелинейного поля $u(x, t)$ удобно использовать лучевое описание. Однако в отличие от волновой задачи, в силу мнимости волнового числа $k_0 = 1/2i\nu$ в (3), при многолучевом распространении в решении уравнения Бюргерса при $\nu \rightarrow 0$ необходимо учитывать только тот луч, фаза (действие) которого имеет минимальное значение [10]. При случайно-неоднородном показателе преломления $F(x, t)$ такой подход использовался в [10] для анализа стационарной турбулентности Бюргерса, возбуждаемой внешними случайными силами.

В общем же случае поле $u(x, t)$ выражается через решение неоднородного параболического уравнения (3), которое имеет точное решение лишь в специальных случаях, так, например, в практически важном случае гармонической внешней силы [16]. При $\nu \rightarrow 0$ весьма плодотворным методом исследования возбуждения и нелинейной трансформации волны является метод фазовой плоскости, т. е. анализ системы характеристических уравнений неоднородного уравнения Бюргерса (1) на

фазовой плоскости [17]. В частности, этот метод весьма просто позволяет находить профили стационарных установившихся решений.

Мы рассмотрим некоторые частные случаи внешней силы $f(x, t)$, когда уравнение Бюргерса имеет точное решение. Прежде всего отметим, что при $f(x, t) \equiv \beta(t)$, когда внешняя сила возбуждает однородную по x волну $u_B(x, t) = \int_0^t \beta(t') dt'$, взаимодействие $u_0(x)$ с этой волной приводит только к дополнительному фазовому сдвигу на величину $\Delta = \int_0^t u_B(t') dt'$, энергетический же обмен между полями отсутствует.

Как показано ниже, неоднородное уравнение Бюргерса имеет также точное решение при внешней силе:

$$f(x, t) = -\alpha(t)x.$$

Этот случай гораздо более интересен, так как линейной зависимостью с известной степенью точности можно аппроксимировать передний или задний фронт внешней силы при импульсном возбуждении: $f = f_0 + f'(x - x_0) + \dots$ Постоянная составляющая приводит лишь к дополнительному фазовому сдвигу и не влияет на энергетический обмен между волной, возбуждаемой на границе, и волной, возбуждаемой внешней силой. Кроме того, последовательностью треугольных импульсов можно аппроксимировать и гармоническую внешнюю силу [16]. Пусть $f(x, t) = -\alpha(t)x$ и, следовательно, уравнение (3) принимает вид

$$U_t' = \nu U_{xx}'' + \alpha(t) x^2 U / 4\nu. \quad (4)$$

Уравнение (4) аналогично квазиоптическому уравнению, описывающему распространение волнового пучка в линзоподобном волновом канале с параболическим профилем показателя преломления. Используя это соответствие, в данном случае естественно применить замену переменных, подобную используемой в [18, 19] и сводящую квазиоптическое уравнение в неоднородной среде к однородному параболическому уравнению. Представим решение (4) как

$$U(x, t) = E(y, \tau) \left\{ \frac{1}{(\sigma_p(t))^{1/2}} \exp \left[-\frac{x^2}{4\nu} \frac{\partial}{\partial t} \ln \sigma_p(t) \right] \right\}; \quad (5)$$

$$y = \frac{x}{\sigma_p(t)}, \quad \tau = \frac{\sigma_s(t)}{\sigma_p(t)} = \int_0^t \frac{dt'}{\sigma_p^2(t')}. \quad (6)$$

Здесь σ_p и σ_s — линейно-независимые решения уравнения

$$\sigma_{tt}'' + \alpha(t) \sigma = 0 \quad (7)$$

с начальными условиями $\sigma_p(0) = 1$, $\sigma_p'(0) = 0$; $\sigma_s(0) = 0$, $\sigma_s'(0) = 1$ ($\sigma_p(t) \sigma_s'(t) - \sigma_p'(t) \sigma_s(t) = 1$) и описывающие траектории лучей при бесконечно малой вязкости ($\nu \rightarrow 0$). Тогда поле удовлетворяет линейному уравнению диффузии:

$$E_\tau' = \nu E_{yy}'' , \quad E(y, 0) = \exp[-\varphi(y, 0)/2\nu]. \quad (8)$$

Пусть $v(y, \tau)$ есть решение однородного уравнения Бюргерса, связанное с $E(y, \tau)$ соотношением

$$v(y, \tau) = -2\nu (\ln E(y, \tau))_y', \quad v(y, 0) = u(y, 0) = u_0(y). \quad (9)$$

Тогда из (5)—(9) следует, что решение неоднородного уравнения (1) при $f = -\alpha x$ представимо в виде

$$u(x, t) = u_B(x, t) + \xi(x, t), \quad (10)$$

$$u_B(x, t) = xs(t), \quad s(t) = \sigma'_p / \sigma_p, \quad \xi(x, t) = v(x/\sigma_p, \sigma_s/\sigma_p) / \sigma_p.$$

Первое слагаемое в (10) есть волна, возбуждаемая внешним источником, и, как можно видеть из (7), коэффициент $s(t)$ — тангенс наклона $u_B(x, t)$ и удовлетворяет уравнению $s' + s^2 = -\alpha(t)$. Случай $\alpha(t) = \text{const}$ исследовался в [16], где было показано, что при $\alpha > 0$ $s(t)$ за конечное время обращается в бесконечность, т. е. при $\alpha > 0$ реализуется режим «взрывной неустойчивости». Как видно из (10), при этом $\sigma'_p < 0$ и из-за взаимодействия с волной $u_B(x, t)$ происходит сжатие пространственных масштабов сигнала $\xi(x, t)$. В случае же $\alpha < 0$ $\sigma'_p > 0$ и характерный масштаб $\xi(x, t)$ увеличивается. Поэтому для краткости в дальнейшем будем называть волну, возбуждаемую внешней силой с $\alpha > 0$, волной «сжатия», а с $\alpha < 0$ — волной «разрежения». Заметим, что характер изменения пространственного масштаба сигнала зависит лишь от знака градиента внешней силы и не зависит от знака самой силы. Второе слагаемое в (10) описывает трансформацию начального поля $u_0(x)$ в результате параметрического взаимодействия с волной $u_B(x, t)$ и в результате самовоздействия. В соответствии с (10) параметрическое взаимодействие приводит к изменению амплитуды сигнала, изменению его пространственного масштаба и изменению характерных времен самовоздействия.

2. Пусть начальное поле $u_0(x)$ имеет характерную амплитуду a_0 и пространственный масштаб l_0 . Для гармонического сигнала a_0, l_0 — амплитуда и период волны, для шумового — $a_0^2 = \langle u_0^2(x) \rangle$, l_0 — дисперсия и радиус корреляции начального поля. В зависимости от величины акустического числа Рейнольдса $R = a_0 l_0 / \nu$ можно выделить следующие характерные стадии эволюции волны $v(y, \tau)$ в отсутствие накачки.

При $R \ll 1$ влиянием нелинейности можно пренебречь и основным механизмом диссипации является линейное затухание, которое сказывается при $t > l_0^2 / \nu$. При $R \gg 1$ волна проходит три стадии. На временах $t < t_H \simeq l_0 / a_0$ происходит нелинейное искажение формы волны, но энергия волны сохраняется: $E(t) \simeq a_0^2$. При $t \gg t_H$ в волне формируется ансамбль пилообразных волн, и на ударных фронтах, ширина которых определяется вязкостью, происходит диссипация энергии. На этом этапе энергию волны можно оценить как $E(t) \simeq l^2(t) / t^2$, где $l(t)$ — характерный масштаб поля, определяемый расстоянием между разрывами, который постоянен и равен l_0 при периодических начальных условиях и возрастает при шумовых из-за слияния разрывов. Из-за поглощения энергии на разрывах и уменьшения текущего числа Рейнольдса на достаточно больших временах может наступить линейная стадия распространения, когда поглощение энергии волны обусловлено только линейной диссипацией.

Для энергии волны $\tilde{E}(t) = \langle \xi^2(x, t) \rangle$ характерного пространственного масштаба $\tilde{l}(t)$ и энергетического спектра $\tilde{S}(\omega, t)$ волны $\xi(x, t)$, взаимодействующей с волной, возбуждаемой внешним источником, из (10) имеем

$$\tilde{E}(t) = E \left(\frac{\sigma_s(t)}{\sigma_p(t)} \right) \frac{1}{\sigma_p^2(t)}, \quad \tilde{l}(t) = l \left(\frac{\sigma_s(t)}{\sigma_p(t)} \right) \sigma_p(t),$$

$$\tilde{S}(\omega, t) = S(\omega \sigma_p, \sigma_s / \sigma_p) / \sigma_p. \quad (11)$$

где $E(\tau)$, $l(\tau)$, $S(\omega, \tau)$ — энергия, пространственный масштаб и энергетический спектр поля $v(y, \tau)$ без накачки. Формулы (11) позволяют легко найти параметры волны, взаимодействующей с накачкой, если известны соответствующие характеристики поля в свободном пространстве. Так, например, если сигнал достаточно слабый, а высокочастотное затухание несущественно, то $S(\omega, \tau) = S_0(\omega)$ и, следовательно, из-за взаимодействия сигнала с накачкой его спектр подобно переносится в стороны высоких частот с одновременным уширением и увеличением его амплитуды при $\sigma_p' < 0$ или в сторону низких частот при $\sigma_p' > 0$.

Рассмотрим два предельных случая. Если амплитуда внешней силы не меняется и $\alpha(t) = \pm \omega_0^2 = \text{const}$ (знак плюс соответствует возбуждению волны сжатия, знак минус — волны разрежения), для σ_p , σ_s имеем из (7):

$$\sigma_p(t) = \begin{cases} \cos \omega_0 t \\ \text{ch } \omega_0 t \end{cases}, \quad \sigma_s(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0} \\ \frac{\text{sh } \omega_0 t}{\omega_0} \end{cases}, \quad \tau = \begin{cases} \frac{\text{tg } \omega_0 t}{\omega_0} & (\alpha > 0) \\ \frac{\text{th } \omega_0 t}{\omega_0} & (\alpha < 0) \end{cases}. \quad (12)$$

Если $\alpha(t) = \alpha_0 \delta(t)$ и при $t=0$ внешний источник формирует волну $u_B(x, 0) = -\alpha_0 x$ (для $\alpha_0 > 0$ — волну сжатия, для $\alpha_0 < 0$ — волну разрежения), то

$$\sigma_p(t) = 1 - \alpha_0 t, \quad \sigma_s(t) = t, \quad \tau = t/(1 - \alpha_0 t). \quad (13)$$

Как следует из этих примеров, при взаимодействии сигнала с волной, возбуждаемой внешними силами, можно выделить два характерных случая. При $\alpha > 0$ внешний источник возбуждает волну сжатия ($\sigma_p'/\sigma_p < 0$), градиент которой в момент времени t_p , определяемый из условия $\sigma_p(t_p) = 0$, обращается в бесконечность (для примера (13) $t_p = \alpha_0^{-1}$). Параметрическое взаимодействие приводит при этом к усилению сигнала и уменьшению его пространственных масштабов (11). В этом случае, как следует из (6), в сигнале, взаимодействующем с волной сжатия, возбуждаемой внешней силой, на конечном временном интервале $t \in (0, t_p)$ разыгрываются все стадии эволюции волны $v(y, \tau)$ на бесконечном интервале $\tau \in (0, \infty)$ (см. рис. 1). Следует подчеркнуть, что несмотря на то, что в данном случае происходит усиление сигнала, параметрическое взаимодействие не может изменить тип эволюции волны, а меняет лишь время прохождения этих стадий. А именно: если t_n и t_d есть характерные времена нелинейности и диссипации поля v без внешней силы, то при параметрическом взаимодействии они будут определяться из уравнения

$$\sigma_s(t_n^*)/\sigma_p(t_n^*) = t_n, \quad \sigma_s(t_d^*)/\sigma_p(t_d^*) = t_d, \quad (14)$$

причем $t_n^*, t_d^* < t_p$, $t_n^* < t_n$, $t_d^* < t_d$.

Таким образом, при взаимодействии волны $\xi(x, t)$ с волной сжатия наблюдается конкуренция двух эффектов: с одной стороны, это взаимодействие вызывает параметрическое усиление сигнала, а с другой стороны, — увеличивает эффективность нелинейного затухания. Особенности усиления сигнала внешней волной сжатия мы рассмотрим на двух типичных примерах — усилении гармонического сигнала и усилении широкополосного шума, причем для определенности ограничимся анализом взаимодействия с волной сжатия, возбуждаемой на границе среды (13). Используя известные выражения для энергии гармонического сигнала $E(t)$ [2], при $R \gg 1$ имеем из (11)

$$\tilde{E}(t) = \begin{cases} a_0^2(1 - t/t_p)^2, & t < t_H^* = t_H/(1 + t_H/t_p) \\ l_0^2/t^2, & t_H^* < t < t_d^* = t_H/(1 + t_H/t_p), \\ \frac{v^2/l_0^2}{(1 - t/t_p)^2} \exp\left[-\frac{2t}{t_H(1 - t/t_p)}\right], & t_d^* < t < t_p \end{cases}, \quad (15)$$

$$t_H = l_0/2\pi a_0, \quad t_H = (l_0/2\pi)^2/v.$$

Из (15) следует, что параметрическое усиление гармонического сигнала, которое происходит на первой стадии $t \in (0, t_H^*)$, ограничено при $t > t_H^*$ нелинейным затуханием (см. рис. 2) и, в частности, максимальное значение энергии усиливаемой волны равно

$$\tilde{E}_{\max} \simeq \tilde{E}(t_H^*) = a_0^2(1 + t_H/t_p)^2.$$

Таким образом, для «слабого» сигнала ($t_H \gg t_p$) максимальный коэффициент усиления равен $k_{\max} = \tilde{E}_{\max}/a_0^2 \simeq (t_H/t_p)^2 \gg 1$, а для «сильного» ($t_H \ll t_p$) $k_{\max} \simeq 1 + 2t_H/t_p$. При фиксированном t максимальное значение энергии сигнала равно l_0^2/t^2 , как и в отсутствие накачки, т. е. в недиспергирующей среде, несмотря на параметрическое усиление, существует предельное значение передаваемой мощности при фиксированном t .

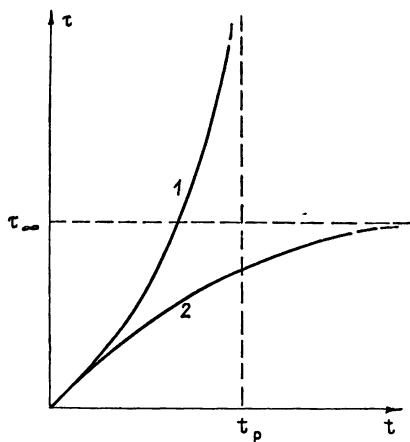


Рис. 1.

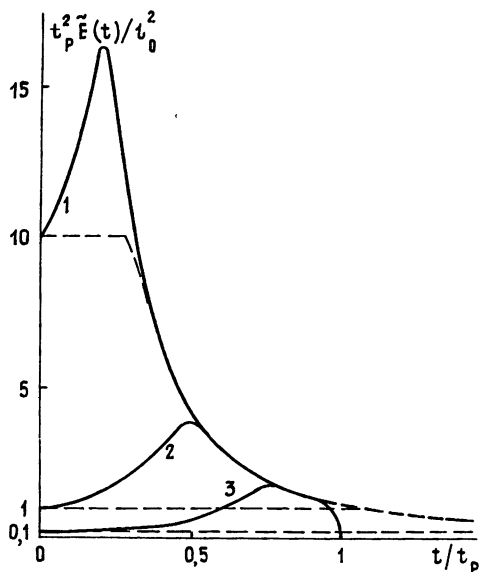


Рис. 2.

Рис. 1. Преобразование координат от неоднородного уравнения Бюргера к однородному: 1 — при взаимодействии с волной сжатия ($\alpha > 0$), 2 — при взаимодействии с волной разрежения ($\alpha < 0$).

Рис. 2. Энергия гармонического сигнала, взаимодействующего с волной сжатия. Кривая 1 — $E(0) t_p^2/l_0^2 = t_p^2/t_H^2 = 10$, 2 — $t_p^2/t_H^2 = 1$, 3 — $t_p^2/t_H^2 = 0,1$. Пунктир — энергия гармонического сигнала без накачки.

Связано это с тем, что одновременно с увеличением амплитуды волны происходит уменьшение его пространственного масштаба, что резко увеличивает как линейное, так и нелинейное затухание.

При шумовом сигнале эволюция поля зависит от значения энергетического спектра $u_0(x)$ на нулевой пространственной частоте $J =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u_0(x) u_0(x+\rho) \rangle d\rho = S_0(0)$, так как при $J=0$ и $J \neq 0$ темп слияния газрывов и закон изменения пространственного масштаба существенно различен. При $t \gg t_n$ энергия случайного поля равна $E(t) \simeq l^2(t)/\tau^2$, и в зависимости от значения J для $l(t)$ в отсутствие накачки имеем [6, 7, 20, 21]:

$$l(t) \simeq \begin{cases} l_0 (\tau/t_n)^{1/2}, & J = 0 \\ l_0 (\tau/t_n)^{2/3}, & J \neq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Соответственно для энергии волны, взаимодействующей с волной сжатия, из (11), (13), (16) в этих двух случаях имеем

$$\tilde{E}(t) \simeq \begin{cases} a_0^2(1 - t/t_p)^2, & t < t_n^* \\ a_0^2/[(1 - t/t_p) t/t_n], & t > t_n^* \end{cases}, \quad J = 0; \quad (17)$$

$$\tilde{E}(t) \simeq \begin{cases} a_0^2(1 - t/t_p)^2, & t < t_n^* \\ a_0^2/[(1 - t/t_p)^2 t/t_n]^{2/3}, & t > t_n^* \end{cases}, \quad J \neq 0. \quad (18)$$

Из сравнения (15) с (17), (18) следует, что картина усиления шумовой волны качественно отличается от усиления гармонического сигнала. Если для гармонического сигнала параметрическое усиление на начальной стадии $t < t_n^*$ сменяется монотонным уменьшением энергии при $t > t_n^*$ из-за нелинейного поглощения, то для шума, темп затухания энергии которого из-за слияния разрывов и увеличения масштаба $l(t)$ (16) более медленный, параметрическое взаимодействие с волной сжатия приводит к преобладанию усиления над нелинейным затуханием (см. рис. 3). Так, для «слабого» шума ($t_n \gg t_p$, но $R \gg 1$) энергия монотонно возрастает, а для «сильного» ($t_n \ll t_p$) затухание на начальной стадии при $t_n^* < t < t_M$, связанное с поглощением энергии волны на разрывах, сменяется при $t > t_M$ ее увеличением вследствие параметрического усиления. Здесь $t_M = t_p/M$ ($M=2, J=0; M=3, J \neq 0$) — момент времени, где энергия шума минимальна. Отметим, что так как при $J \neq 0$ нелинейный режим никогда не сменяется на режим линейного затухания, а при $J=0$ время выхода на линейный режим затухания чрезвычайно велико, $t_d \sim t_n \exp(R^2)$ [21], то максимальный коэффициент шума может быть при этом весьма значителен.

Если внешний источник возбуждает волну разрежения $\alpha < 0$ ($\sigma_p'/\sigma_p > 0$), то параметрическое взаимодействие приводит к дополнительному уменьшению энергии волны и увеличению его пространственного масштаба. При этом в преобразовании (6) существует предельная точка $\tau_\infty = \sigma_s(\infty)/\sigma_p(\infty)$ (для примера (13) $\tau_\infty = |\sigma_0^{-1}| = t_p$), и, как сле-

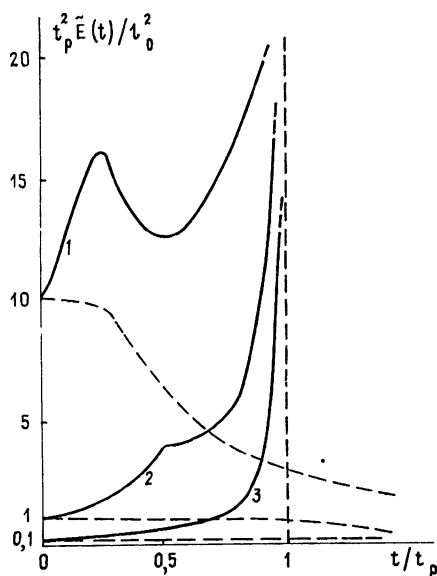


Рис. 3. Энергия шумового сигнала ($S_0(0)=0$), взаимодействующего с волной сжатия. Кривая 1 — $t_p^2/t_n^2 = 10$, 2 — $t_p^2/t_n^2 = 1$, 3 — $t_p^2/t_n^2 = 0,1$. Пунктир — энергия шума без накачки.

дует из (6), (10), при изменении времени t в бесконечном интервале $t \in (0, \infty)$ в волне, взаимодействующей с волной разрежения, успевает произойти только часть эволюции волны $v(y, \tau)$, соответствующая конечному интервалу $\tau = (0, \tau_\infty)$ (см. рис. 1). В частности, если $\tau_\infty \ll t_n$, то в такой волне не реализуется стадия нелинейного затухания. Для энергии и пространственного масштаба волны, взаимодействующей с волной разрежения, из (11), (13) при $t \gg t_p$ имеем:

$$\tilde{E}(t) = E(t_p)(t_p/t)^2, \quad \tilde{l}(t) = l(t_p)(t/t_p), \quad (19)$$

где $E(t_p)$ и $l(t_p)$ — энергия и характерный масштаб поля $v(y, \tau)$ в отсутствие распределенного источника в момент времени $\tau = t_p$. Как видно из (19) и непосредственно из (10), при $t \gg t_p$ эффекты нелинейного самовоздействия и линейного затухания уже не оказывают влияния на изменение структуры поля, профиль волны $\xi(x, t)$ подобен профилю волны $v(y, \tau)$ в отсутствие накачки в момент времени $\tau = t_p$ и испытывает монотонное увеличение пространственного масштаба и уменьшение амплитуды волны. Так, в частности, если t_p много меньше характерных времен нелинейности t_n и диссипации t_d , то профиль волны $\xi(x, t)$ в любой момент времени подобен начальному.

3. До сих пор мы рассматривали случай, когда внешний источник возбуждает неограниченную в пространстве волну «сжатия» или «разрежения», и, как следует из (10), сигнал при этом не оказывает обратного влияния на волну, возбуждаемую внешним источником. При конечном масштабе волн возбуждения обратное влияние становится существенным и при $t \rightarrow \infty$ может полностью изменить структуру волны накачки. Мы рассмотрим случай гармонической внешней силы $f(x, t) = \alpha(t) a_0 \sin k_0 x$, $l_0 = 2\pi/k_0$. В волне накачки, возбуждаемой внешней силой, можно выделить точки $x_i^s = l_0 n$, вблизи которых градиент положителен, $u_x \sim (x - x_n^s)$, и точки $x_n^c = l_0(n + 1/2)$, где градиент накачки отрицателен, $u_x \sim -(x - x_n^c)$. В соответствии со сказанным выше в окрестности точек x_n^c происходит усиление поля $\xi(x, t)$ и уменьшение его пространственных масштабов, а в окрестности точек x_n^s — уменьшение его амплитуды и рост пространственных масштабов поля $\xi(x, t)$. Эволюция начального возмущения под действием накачки существенно зависит от соотношения их пространственных масштабов ρ_0 и l_0 . При качественном описании ограничимся случаем мелкомасштабного сигнала $\rho_0 \ll l_0$. Тогда локально для описания трансформации сигнала можно использовать линейную аппроксимацию внешней силы на каждом из характерных участков. При этом, до образования разрывов, справедливо рассмотрение, проведенное выше. После образования разрывов в волне накачки и поглощения той части начального поля $\xi_0(x)$, которая при $t=0$ находилась в окрестности точек сжатия, на разрывах, поле $u(x, t)$ представляет суперпозицию «периодической» последовательности волн разрежения накачки и поля $\xi(x, t)$, которое искажено как за счет эффектов самовоздействия, так и взаимодействия с волной накачки. Обратное влияние $\xi(x, t)$ на волну накачки сказывается в том, что границы между непрерывными областями волны накачки (разрывы волны накачки) зависят от характеристик сигнала. В частности, при шумовом сигнале координаты разрывов случайны, что приводит к нарушению периодичности волны накачки [22, 23].

Можно выделить два предельных случая воздействия внешней силы: когда она имеет импульсный характер, $\alpha(t) = \delta(t)$, и подкачка энергии происходит только в начальный момент, и когда энергия подкачивается в волну непрерывно, $\alpha(t) = \text{const}$. Рассмотрим вначале первый

случай, когда взаимодействие сигнала с накачкой описывается однородным уравнением Бюргерса с начальным условием

$$u_0(x) = a_0 \sin k_0 x + \xi(x), \quad l_0 = 2\pi/k_0. \quad (20)$$

При анализе устойчивости волны накачки ограничимся случаем бесконечных чисел Рейнольдса ($\nu \rightarrow 0$), когда решение однородного уравнения Бюргерса (1) ($f(x, t) = 0$) с начальным условием (20) имеет вид [6, 7]

$$u(x, t) = (x - y(x, t))/t, \quad (21)$$

где $y(x, t)$ — координата абсолютного максимума функции

$$G(y; x, t) = -\frac{(x-y)^2}{2t} + \frac{a_0}{k_0} \cos k_0 y + \eta(y), \quad (22)$$

$$\eta(y) = -\int^y \xi(x) dx.$$

Будем считать, что поле $\xi(x)$ имеет шумовой характер, гауссово, характеризуется пространственным масштабом $l_{\text{ш}}$ и дисперсией $a_{\text{ш}}^2$:

$$a_{\text{ш}}^2 = \langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_0(k) dk, \quad a_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2 = \langle \eta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_0(k)}{k^2} dk,$$

$$S_0(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi(x) \xi(x+\rho) \rangle \exp(ik\rho) d\rho, \quad (23)$$

$$S_0(k) \sim k^n, \quad n \geq 2, \quad k \rightarrow 0.$$

Для качественного рассмотрения процесса взаимодействия учтем, что координата абсолютного максимума $y(x, t)$ совпадает с первой точкой касания параболы $(x-y)^2/2t + c = 0$ функции $(a_0/k_0) \cos k_0 y + \eta(y)$ при уменьшении c от $+\infty$. Будем рассматривать асимптотическое поведение поля $u(x, t)$ на достаточно больших временах, когда $t \gg t_{\text{ш}} \simeq (l_0/a_0)$, $t \gg t_{\text{ш}} \simeq (l_{\text{ш}}/a_{\text{ш}})$, т. е. когда как в накачке, так и в шуме уже образовались разрывы. Как видно из (22), картина взаимодействия определяется при этом отношением $a_{\text{ш}} l_{\text{ш}}$ — характерного импульса шума на масштабе $l_{\text{ш}}$ — к $a_0 l_0$ — импульсу гармонической волны накачки на ее периоде l_0 .

При $a_0 = 0$ поле u имеет шумовой характер и при $t \gg t_{\text{ш}}$ представляет последовательность случайных пилообразных импульсов. Одномерное распределение поля $u(x, t)$ при этом гауссово, с дисперсией [21]:

$$\langle u^2 \rangle = l^2/t^2 = a_{\text{ш}}^2 (t_{\text{ш}}/t) (\ln \gamma)^{-1/2}, \quad (24)$$

$$l^2 = l_{\text{ш}}^2 (t/t_{\text{ш}}) (\ln \gamma)^{-1/2}, \quad \gamma = t (a_{\text{ш}}/l_{\text{ш}}) = t/t_{\text{ш}}.$$

Здесь $l(t)$ (характерный масштаб акустического шумового поля) — характерное расстояние между разрывами, которое увеличивается из-за слияния разрывов. При $a_0 l_0 \ll a_{\text{ш}} l_{\text{ш}}$ и $t \gg t_{\text{ш}}$, $t_{\text{ш}}$ гармоническая накачка практически не влияет на положение координат абсолютных максимумов $y(x, t)$, и, следовательно, в этом случае асимптотическое поведение поля $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ полностью определяется характеристиками шума и не зависит от параметров гармонической накачки. Заметим, что последнее справедливо даже в случае, когда $a_0 \gg a_{\text{ш}}$, но $a_0 l_0 \ll a_{\text{ш}} l_{\text{ш}}$.

Если $a_0 l_0 \gg a_{\text{ш}} l_{\text{ш}}$, то картина взаимодействия накачки и шума зависит от соотношения между характерными пространственными масштабами шума $l_{\text{ш}}$ и накачки l_0 . При $l_0 \ll l_{\text{ш}}$ координаты абсолютного мак-

симума приблизительно совпадают с координатой касания параболы $(x - y)^2/2t + c$ кривой $\tilde{\eta}(y) = \eta(y) + A$, и, следовательно, в этом случае статистика $u(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$ такая же, как и при чисто шумовом сигнале на входе.

Таким образом, при $t \gg t_{ш}$, $t_{ш}$ гармоническая накачка оказывает влияние на асимптотическое поведение поля только при $a_0 l_0 \gg a_{ш} l_{ш}$ и $l_0 \gg l_{ш}$, т. е. когда характерный импульс накачки на периоде много больше соответствующего импульса шума, а пространственный период накачки много больше периода шума.

Если шум отсутствует ($a_{ш} = 0$), то при $t \gg t_{ш}$ координаты абсолютных максимумов совпадают с координатами центров областей разрежения $y(x, t) = x_n^p = l_0 n$ и поле $u(x, t)$ представляет периодическую последовательность пилообразных импульсов [2] с разрывами в точках $y_n^* = x_n^c = l_0(n + 1/2)$. Из-за шума положение разрывов смещается. При не слишком больших временах, когда положение разрыва определяется конкуренцией двух соседних локальных максимумов x_n^p , x_{n+1}^p , его координата равна

$$y_n^* \simeq \frac{x_n^p + x_{n+1}^p}{2} + t \frac{\eta(x_n^p) - \eta(x_{n+1}^p)}{l_0}, \quad (25)$$

т. е. смещение y_n^* пропорционально полному импульсу шума на периоде накачки l_0 . Оценку времен, на которых происходит нарушение периодичности волны накачки, можно провести из условия, что характерное смещение разрыва $\sim a_{ш} l_{ш} t / l_0$ много больше периода l_0 . Тогда из (25) имеем, что при $t > t_{ш}(l_0/l_{ш})^2$ начинается слияние разрывов, приводящее к увеличению характерного периода волны и к ее стохастизации.

При $a_0 l_0 \gg a_{ш} l_{ш}$ функцию G можно представить вблизи каждой из точек разрежения x_n^p в виде

$$G(y; x, t) = \eta(y) - (a_0 k_0 / 2)(y - x_n^p)^2 - (x - y)^2 / 2t. \quad (26)$$

Абсолютный максимум $G(y; x, t)$ при $t \gg t_{ш}(l_0/l_{ш})^2$ выбирается из одного из локальных максимумов, расположенных вблизи x_m^p , а его координату $y(x, t)$ при этом можно представить в виде

$$y(x, t) = y_m + y', \quad (27)$$

где y_m совпадает с координатой того центра x_m^p , на котором достигается абсолютный максимум функции G . В силу условия $a_0 l_0 \gg a_{ш} l_{ш}$ величина отклонения $y' \ll l_0$, причем при $t \gg t_{ш}(l_0/l_{ш})^2$ из (26) следует, что характерный разброс y_m много больше периода накачки l_0 . Вероятность того, что на y_m находится абсолютный максимум функции G , есть вероятность того, что величина локального максимума вблизи точки x_m^p больше, чем величина локальных максимумов вблизи остальных центров разрежения x_k^p , $k \neq m$. Пусть $F(h, k)$ и $W(h, k)$ — интегральная и дифференциальная функции распределения величины локального максимума h вблизи k -й точки разрежения. Тогда, используя независимость локальных максимумов ($l_{ш} \ll l_0$), для вероятности того, что на x_m функция G имеет абсолютный максимум, имеем

$$P(y = y_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} dh W(h, m) \prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{+\infty} F(h, k). \quad (28)$$

Так как при достаточно больших t абсолютный максимум выбирается из большого числа локальных максимумов, то его величина много больше

ше дисперсии η [21, 22], и в (28) бесконечное произведение можно представить в виде

$$\prod_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{+\infty} F(h, k) \simeq \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - \Delta F(h, k)) \simeq \exp \left[- \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta F(h, k) \right]. \quad (29)$$

Из (26) для $F(h, k)$ имеем $F(h, k) = \tilde{F}(h + (x - y_k)^2/2t)$, где вид $\tilde{F}(h)$ определяется соотношением характерных времен нелинейности накачки t_n и шума t_w . Если разрывы в шуме образуются раньше, чем в сигнале, то на каждом из периодов $\tilde{F}(h)$ можно представить в виде $\tilde{F}(h) = \exp[-N(h)]$ [21], где $N(h)$ — среднее число пересечений уровня h функцией $G(y; x, t)$ и

$$N(h) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{h}{a_w l_w} \frac{l_w a_0}{l_0 a_w} \right)^{-1/2} \exp \left[- \frac{h^2}{2(a_w l_w)^2} \right]. \quad (30)$$

В противоположном случае распределение абсолютного максимума на каждом из периодов совпадает с распределением η :

$$\Delta \tilde{F}(h) = \Delta F_\eta(h) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{a_w l_w} \exp \left[- \frac{h^2}{2(a_w l_w)^2} \right]. \quad (31)$$

Подставляя (30), (31) в (29) и переходя от суммирования к интегрированию, из (28) для вероятности того, что координата абсолютного максимума находится вблизи x_m , получим

$$P(y = y_m) = \frac{l_0}{\sqrt{2\pi} l^2} \exp \left[- \frac{(x - y_m)^2}{2l^2} \right], \quad l^2 = l_w^2 (t/t_w) (\ln \gamma)^{-1/2}; \quad (32)$$

$$\gamma = \frac{t}{t_w} \begin{cases} a_w l_w / a_0 l_0, & t_n \gg t_w \\ (l_w / l_0)^2, & t_n \ll t_w \end{cases}. \quad (33)$$

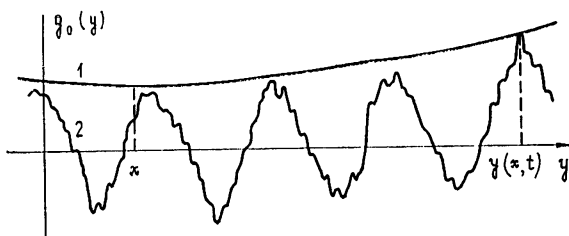


Рис. 4. Процедура отыскания абсолютного максимума $y(x, t)$. Кривая 1 — парабола $(x - y)^2/2t + c = 0$, 2 — $g_0(y) = (a_0/k_0) \cos k_0 y + \eta(y)$.

Таким образом, поле u совпадает с одной из возможных ветвей регулярной римановой волны. Для энергии волны на этой стадии из (32), (21) имеем

$$\langle u^2 \rangle = l^2/t^2 = a_w^2 (t_w/t) (\ln \gamma)^{-1/2}, \quad (34)$$

где параметр γ определяется формулой (33). Из сравнения с (24) видно, что из-за появления гармонической накачки изменяется лишь логарифмическая коррекция степенного закона спада энергии волны, т. е. гармонический сигнал оказывается неустойчивым к шумовым воздействиям.

При постоянном действии внешней силы ($\alpha \equiv 1$) волна при $t \rightarrow \infty$ выходит на стационарный режим. Если сигнал отсутствует ($\xi = 0$), то стационарное решение периодически с периодом l_0 и имеет разрывы

в точках $x_n^c = l_0(n+1/2)$. Из-за сигнала эти разрывы смещаются относительно x_n^c [5], а при шумовом характере входного возмущения эти смещения также будут случайными. Величина смещения разрыва определяется отношением импульсов на периоде l_0 для стационарной волны $P_{ст} \simeq (a_0 l_0^3)^{1/2}$ и для шума $P_{ш} = \int_0^{l_0} \xi_0(x) dx$. Если $\sigma_{ш}$ — дисперсия входного шума, $l_{ш}$ — его пространственный период, а $S_0(0)$ — значение спектральной плотности шума на нулевой пространственной частоте, то $P_{ш}$ можно оценить как

$$P_{ш} \sim \begin{cases} \sigma_{ш} l_0, & l_0 \ll l_{ш}, \quad l_0 \ll l_{ш} \\ \sigma_{ш} (l_0 l_{ш})^{1/2}, & l_0 \gg l_{ш}, \quad S_0(0) \neq 0. \\ \sigma_{ш} l_{ш}, & l_0 \gg l_{ш}, \quad S_0(0) = 0 \end{cases}$$

При $P_{ст} \gg P_{ш}$ смещение разрыва δ много меньше периода, и волну можно считать квазипериодической с периодом l_0 . Если же $P_{ст} \ll P_{ш}$, то расстояние между разрывами может быть и много больше периода накачки и стационарная волна может полностью потерять периодичность.

Автор выражает благодарность А. Н. Малахову, А. И. Саичеву за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Л. А., Степанов Н. С.— Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 1, с. 489.
2. Руденко О. В., Солюян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики.— М., Наука, 1975.
3. Руденко О. В.— Письма в ЖЭТФ, 1974, 20, № 7, с. 445.
4. Лямшев Л. М., Наугольных К. А.— Акуст. журн., 1981, 27, № 5, с. 641.
5. Гусев В. Э.— Диссертация.— М.: МГУ, 1982.
6. Burgers J. M. The Nonlinear Diffusion Equation. D. Reidel Publ. Co., 1974.
7. Kida Sh.— J. Fluid Mech., 1979, 93, № 2, p. 337.
8. Струминский В. В. В кн.: Механика турбулентных потоков.— М.: Наука, 1980, с. 28.
9. Моисеев С. С., Тур А. В., Яновский В. В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 7, с. 1032.
10. Якушкин И. Г.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, 24, № 1, с. 59.
11. Гусев В. Э., Карабутов А. А. Тезисы докладов VIII Всесоюзного симпозиума дифракции и распространения волн.— М., 1981, т. 2, с. 122.
12. Norf E.— Comm. Pure Appl. Mech., 1950, № 3, p. 201.
13. Cole J. D.— Quart. Appl. Math., 1951, 9, p. 225.
14. Chu C. W.— Quart. Appl. Math., 1965, 23, № 3, p. 275.
15. Rodin E. Y.— Quart. Appl. Math., 1970, 27, № 4, p. 541.
16. Карабутов А. А., Лапшин Е. Л., Руденко О. В.— ЖЭТФ, 1976, 71, № 1, с. 111.
17. Гусев В. Э., Карабутов А. А.— Акуст. журн., 1981, 27, № 2, с. 213; 1982, 28, № 1, с. 38.
18. Пермитин Г. В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 2, с. 254.
19. Власов С. Н., Гурбатов С. Н.— Изв. вузов — Радиофизика, 1976, 19, № 8, с. 1149.
20. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. В кн.: Нелинейная акустика.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
21. Гурбатов С. Н., Саичев А. И.— ЖЭТФ, 1981, 80, № 2, с. 689; ДАН СССР, 1981, 258, № 1, с. 73.
22. Якушкин И. Г.— ЖЭТФ, 1981, 81, № 3, с. 967.
23. Гурбатов С. Н.— Акуст. журн., 1980, 26, № 4, с. 551; 1981, 27, № 6, с. 859.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 мая 1982 г.

NONLINEAR WAVE INTERACTION IN NONDISPERSIVE MEDIA WITH EXTERNAL DISTRIBUTED SOURCES

S. N. Gurbatov

The interaction of acoustics waves excited on the boundary of medium with waves excited by distributed sources is considered on the basis of nonuniform Burgers equation. The maximum coefficient is shown to be determined by both parametric amplification and nonlinear attenuation. The instability of harmonic pump interacting with noise wave is investigated.