

УДК 535.31

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА НАД СТАТИСТИЧЕСКИ НЕРОВНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Ф. Г. Басс, А. А. Булгаков, С. И. Ханкина, В. М. Яковенко

Исследуется взаимодействие волн пространственного заряда в потоках, проходящих над статистически неровной поверхностью твердого тела. В гидродинамическом приближении получены дисперсионные соотношения и найдены спектры и декременты (инкременты) затухания (нарастания) собственных колебаний.

В электронных потоках, движущихся с постоянной скоростью, существуют, как известно, быстрые и медленные волны пространственного заряда (ВПЗ). При взаимодействии с материальной средой, неоднородной в отношении электрических свойств, осуществляется обмен энергией между этими волнами. Поскольку энергия медленных ВПЗ отрицательна, то в результате можно ожидать возникновения неустойчивостей и других интересных явлений. Подобного рода неустойчивости уже рассматривались в регулярно- и случайно-неоднородных средах [1-3].

В настоящем сообщении исследуется взаимодействие ВПЗ в потоках, проходящих над статистически неровной поверхностью твердого тела. В гидродинамическом приближении получены дисперсионные соотношения, найдены спектры и декременты (инкременты) затухания (нарастания) собственных колебаний. Полученные результаты нам представляются важными для диагностики свойств поверхности твердого тела.

Выберем систему координат таким образом, чтобы поверхность раздела пучок—твердое тело описывалась функцией $y = \zeta(x, z)$; $y > \zeta(x, z)$ — пучок (среда 1), $y < \zeta(x, z)$ — твердое тело (среда 2). Относительно поверхности раздела предполагаем, что она статистически неровная, причем

$$\bar{\zeta} = 0, \quad \overline{\zeta(\mathbf{r})\zeta(\mathbf{r}')} = \zeta_0^2 W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (1)$$

где черта означает усреднение по ансамблю реализаций неровной поверхности, ζ_0 — величина среднего отклонения поверхности от плоскости $y=0$, \mathbf{r} — вектор в этой плоскости, $\mathbf{r} = x\mathbf{x}^0 + z\mathbf{z}^0$, $W(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ — функция корреляции шероховатостей поверхности ($\int W(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \pi L_x L_z$; L_x, L_z — интервалы корреляции в направлении осей Ox, Oz соответственно).

Пусть пучок движется с постоянной скоростью v_0 , направленной вдоль оси Ox , система уравнений задачи включает в себя уравнения гидродинамики, описывающие пучок, и уравнения Максвелла в каждой из сред:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\operatorname{div}(n_0 \mathbf{v} + \mathbf{v}_0 n); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{e}{m} E, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi en, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0.$$

Здесь \mathbf{E} — электрическое поле, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$ — вектор электрической индукции, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость решетки, e, m — заряд, масса электронов пучка, n, v — отклонения их концентрации и скорости от равновесных значений n_0, v_0 , причем $n \ll n_0, v \ll v_0$. Зависимость всех переменных величин от времени предполагаем экспоненциальной $\sim e^{-i\omega t}$.

В качестве граничных условий воспользуемся непрерывностью тангенциальных составляющих электрического поля

$$[\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2, \mathbf{N}]_{y=\zeta(x, z)} = 0. \quad (4)$$

Нормальная составляющая электрической индукции при движении пучка вдоль границы претерпевает разрыв [4]. В данном случае это условие имеет вид

$$(-i\omega + v_0 (\partial/\partial x)) (\mathbf{N}, \epsilon_{01} \mathbf{E}_1 - \epsilon_{02} \mathbf{E}_2) = -4\pi en_0 (\mathbf{N} \mathbf{v}_1), \quad (5)$$

\mathbf{N} — единичный вектор нормали к поверхности $y = \zeta(x, z)$;

$$N_x = \frac{-\partial\zeta/\partial x}{\sqrt{1 + (\partial\zeta/\partial x)^2 + (\partial\zeta/\partial z)^2}}, \quad N_y = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial\zeta/\partial x)^2 + (\partial\zeta/\partial z)^2}},$$

$$N_z = \frac{-\partial\zeta/\partial z}{\sqrt{1 + (\partial\zeta/\partial x)^2 + (\partial\zeta/\partial z)^2}},$$

причем $\partial\zeta/\partial x, \partial\zeta/\partial z \ll 1$.

Воспользовавшись малостью неровностей, перенесем граничные условия с поверхности $y = \zeta(x, z)$ на гладкую поверхность $y = 0$. Для этого необходимо величины, входящие в (4) и (5), разложить в ряд по степеням ζ и удержать первые два члена разложения:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(0) + \partial\mathbf{E}/\partial y|_{y=0} \zeta + \dots, \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(0) + \partial\mathbf{v}/\partial y|_{y=0} \zeta + \dots$$

Для удобства вычислений введем потенциал φ : $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В этом случае граничные условия имеют вид*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \left(-i\omega + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} + \zeta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\epsilon_{01} \varphi_1 - \epsilon_{02} \varphi_2) + \Omega_0^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \\ & = 4\pi en_0 \left(-i\omega + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\zeta \frac{\partial v_{z1}}{\partial y} - \frac{\partial\zeta}{\partial r} v_{r1} \right). \end{aligned}$$

При $\zeta = 0$ они совпадают с граничными условиями на гладкой поверхности. Случайные величины $\varphi_1, \varphi_2, v_{r1}$ представим в виде суммы их средних и флуктуационных значений [5]:

$$\varphi_{1,2} = \bar{\varphi}_{1,2} + \tilde{\varphi}_{1,2}, \quad v_r = \bar{v}_r + \tilde{v}_r. \quad (8)$$

* Здесь уравнение (5) слева и справа умножено на оператор $(-i\omega + v_0 (\partial/\partial x))$, для того чтобы в дальнейшем от переменных v_r перейти к φ .

Выведем граничные условия для $\bar{\varphi}_{1,2}$ и $\tilde{\varphi}_{1,2}$. С этой целью подставим (8) в уравнения (7) и усредним последние. Усредненные выражения вычтем из неусредненных. В результате получим систему уравнений, из которой, перейдя к компонентам Фурье, определим флуктуационные величины $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ как функции $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$ с точностью до членов порядка ζ . (В компонентах Фурье величины $\bar{v}_{r1}, \tilde{v}_{r1}$ в результате соотношений (2) легко выражаются через $\bar{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_1$.) Подставляя $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$, $\tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2)$ в усредненные уравнения (7), получим дисперсионное соотношение для собственных колебаний рассматриваемой системы. Остановимся более подробно на промежуточных вычислениях. Величины, входящие в (7), разложим по координатам в интеграл Фурье; при этом учтем, что $\Delta\varphi_{1,2} = 0$. Тогда

$$\zeta(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} dq \zeta(q) e^{iqr}, \quad \bar{\varphi}_{1,2}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{\varphi}_{1,2}(k) e^{ikr \mp |k|y}, \quad (9)$$

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{\varphi}_{1,2}(x) e^{ixr \mp |x|y},$$

$$\bar{v}_r(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \bar{v}(k) e^{ikr \mp |k|y}, \quad \tilde{v}_r(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \tilde{v}(x) e^{ixr \mp |x|y}.$$

В этих формулах k, q, x — двумерные волновые векторы в плоскости xOz . Знаки в экспонентах в (9) выбраны из условия отсутствия нарастающих решений при $y = \infty$ и $y = -\infty$.

Выполнив преобразования, описанные выше, получим выражения $\tilde{\varphi}_1(x)$ и $\tilde{\varphi}_2(x)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(x) = & \int_{-\infty}^{\infty} dk \zeta(x-k) [|\kappa|(\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02})]^{-1} \{ \bar{\varphi}_1(k) [\varepsilon_1(x_x) kx + \\ & + \varepsilon_{02} |k| |\kappa|] + \varepsilon_{02} \bar{\varphi}_2(k) (|k| |\kappa| - kx) \}, \quad \tilde{\varphi}_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \zeta(x-k) \times \\ & \times [|\kappa|(\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02})]^{-1} \{ \bar{\varphi}_1(k) [kx - |k| |\kappa| \varepsilon_1(x_x)] - \\ & - \bar{\varphi}_2(k) [\varepsilon_{02} kx + |k| |\kappa| \varepsilon_1(x_x)] \} \end{aligned} \quad (10)$$

— потенциалы поля, рассеянного на шероховатостях. Здесь введены обозначения: $\varepsilon_1(x_x) = \varepsilon_{01} - \Omega_0^2 (\omega - x_x v_0)^{-2}$, $\Omega_0^2 = 4\pi e^2 n_0 m^{-1}$. Подставляя эти выражения для $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ в усредненные уравнения, получим систему уравнений относительно $\bar{\varphi}_1$ и $\bar{\varphi}_2$:

$$\bar{\varphi}_1(k)(1 - J_1) - \bar{\varphi}_2(k)(1 + J_2) = 0, \quad (11)$$

$$\bar{\varphi}_1(k) [\varepsilon_1(k_x) - J_3] + \bar{\varphi}_2(k) (\varepsilon_{02} - J_4) = 0,$$

где

$$J_1 = \zeta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{W(k-x)}{\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02}} [2\varepsilon_1(x_x) kx + |k| |\kappa| (\varepsilon_{02} - \varepsilon_1(x_x))],$$

$$J_2 = \zeta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{W(k-x)}{\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02}} [-2\varepsilon_{02}kx + |k| |x| (\varepsilon_{02} - \varepsilon_1(x_x))],$$

$$J_3 = \zeta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx W(k-x) [\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02}]^{-1} kx (|k| |x|)^{-1} \times \\ \times [\varepsilon_1(x_x)(\varepsilon_1(k_x) - \varepsilon_{02})kx + |k| |x| \varepsilon_{02} (\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_1(k_x))],$$

$$J_4 = \zeta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx W(k-x) [\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02}]^{-1} kx (|k| |x|)^{-1} \times \\ \times [(\varepsilon_{02} - \varepsilon_1(k_x))kx + |k| |x| (\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_1(k_x))].$$

При вычислении интегралов в (11) поверхность $y = \zeta(x, z)$ предполагается статистически однородной, т. е. ее шероховатости δ -коррелированы:

$$\overline{\zeta(q)\zeta(q')} = \zeta_0^2 W(q) \delta(q + q').$$

С точностью до членов ζ^2 получим из (11) дисперсионное соотношение собственных колебаний

$$\varepsilon_1(k_x) + \varepsilon_{02} = \zeta_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx W(k-x) [\varepsilon_1(x_x) + \varepsilon_{02}]^{-1} \times \\ \times [4\varepsilon_{02}kx (\varepsilon_1(k_x) + \varepsilon_1(x_x)) + (|k| |x| + (kx)^2 (|k| |x|)^{-1})(\varepsilon_{02} - \varepsilon_1(x_x))(\varepsilon_{02} - \varepsilon_1(k_x))]. \quad (12)$$

Это уравнение решаем методом последовательных приближений по малому параметру $k\zeta_0 \ll 1$.

При $\zeta_0 = 0$

$$\varepsilon_1(k_x) + \varepsilon_{02} = 0, \quad (13)$$

т. е.

$$\omega - k_x v_0 = -\Omega_0 (\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})^{-1/2}; \quad (13a)$$

$$\omega - k_x v_0 = \Omega_0 (\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})^{-1/2}. \quad (13б)$$

Выражение (13a) описывает спектр медленных волн пространственно-го заряда, выражение (13б) — быстрые ВПЗ.

Рассмотрим рассеяние на шероховатой поверхности медленных ВПЗ. В этом случае добавка к частоте $\delta\omega$, обусловленная неровностями, имеет вид

$$\delta\omega = \Omega_0 \zeta_0^2 (\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})^{-3} v_0^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dx W(k-x) \varepsilon_{02} \times \\ \times [\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01} + \Omega_0^2 (\omega - k_x v_0)^{-2}] (\omega - k_x v_0)^2 |k| |x| \times \\ \times [(k_x - \omega v_0^{-1}) + \Omega_0 v_0^{-1} (\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})^{-1/2}]^{-1} [k_x - \omega v_0^{-1} - \Omega_0 \times \\ \times v_0^{-1} (\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02})^{-1/2}]^{-1} \sin^4(\theta/2), \quad (14)$$

θ — угол между векторами x и k .

Интегрирование (14) по k_x можно провести при произвольном виде функции корреляции: интеграл по k_x равен интегралу в смысле глав-

ного значения и сумме полувычетов в полюсах. При этом используется обычное правило обхода полюса, соответствующее затуханию волны при $t \rightarrow -\infty$ ($\omega = \omega' + i\omega''$, $\omega'' > 0$). Интеграл в смысле главного значения определяет смещение частоты, вызванное шероховатостями границы, и в дальнейшем его значение не приводится. Полюса определяют мнимую часть $\delta\omega$, т. е. затухание или нарастание ВПЗ. Полюс $\kappa_x = \omega v_0^{-1} + \Omega_0 v_0^{-1} (\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^{-1/2}$ соответствует взаимодействию медленной ВПЗ с медленными гармониками рассеянного поля, полюс $\kappa_x = \omega v_0^{-1} - \Omega_0 v_0^{-1} (\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^{-1/2}$ связан с рассеянием на быстрых гармониках. Для интегрирования по κ_z необходимо задать конкретный вид функции корреляции. Если $W(\gamma) = L_x L_z (2\pi)^{-1} \exp(-(\gamma_x^2 L_x^2 + \gamma_z^2 L_z^2)/4)$, где $\gamma = \mathbf{k} - \boldsymbol{\kappa}$, то

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta\omega = & - \frac{2\Omega_0^2 \epsilon_{02}^2 L_x L_z |k| \zeta_0^2}{(\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^3 v_0} \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma_z \exp\left(-\frac{\gamma_z^2 L_z^2}{4}\right) \times \\ & \times \left\{ \gamma + k |\sin^4 \frac{\theta}{2} \right|_{\gamma_x=0} - \exp\left(-\frac{L_x^2 \gamma_x^2}{4}\right) |\gamma + k |\sin^4 \frac{\theta}{2} \right|_{\gamma_x=-\gamma_{x0}} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\gamma_{x0} = 2\Omega_0 v_0^{-1} (\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^{-1/2}.$$

В этом интеграле сделаем замену переменных $\gamma_z = k_z z'$ и рассмотрим предельные случаи $k_z L_z \ll 1$, $k_z L_z \gg 1$.

Если $k_z L_z \gg 1$, то при интегрировании по z' основной вклад дает область $z' \sim (k_z L_z)^{-1} \ll 1$. В этом случае $\gamma_z \ll k_z$ и

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta\omega = & - \frac{2\Omega_0^2 \epsilon_{02}^2 L_x \sqrt{\pi} |k| \zeta_0^2}{v_0 (\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^3} \left\{ \frac{|k|}{2k_z^4 L_z^4} - \right. \\ & \left. - \exp(-\gamma_{x0}^2 L_x^2/4) |k + \gamma_x \mathbf{x}^0| \sin^4(\theta/2) \right|_{\gamma_x=-\gamma_{x0}} \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Первое слагаемое, описывающее затухание на шероховатой поверхности, мало, так как оно порядка $(k_z L_z^4)^{-1}$. Второе слагаемое определяет усиление ВПЗ в результате взаимодействия с быстрыми гармониками рассеянного поля. Для того, чтобы волна усиливалась, необходимо выполнение условия $\gamma_{x0} L_x \ll 4\ln k_z L_z$. При этом инкремент нарастания имеет наибольшее значение для $\theta = \pi$, т. е. волновые векторы \mathbf{k} и $\mathbf{k} - \gamma_{x0} \mathbf{x}^0$ должны быть направлены в противоположные стороны. Возможно, что это связано с эффектом усиления при обратном рассеянии. Так как $\gamma_x = k_x - \kappa_x$, то $k_z = 0$ и $\kappa_x > 2k_x$.

Если волновые векторы \mathbf{k} и $\mathbf{k} - \gamma_{x0} \mathbf{x}^0$ параллельны и направлены в одну сторону, то усиление отсутствует.

Для интервала корреляции L_z , много меньшего длины волны в этом направлении, т. е. $k_z L_z \ll 1$, основной вклад при интегрировании по z' дает область $z' = (k_z L_z)^{-1} \gg 1$. Это означает, что в интеграле $\gamma_z \gg k_x$, k_z , γ_{x0} и

$$\begin{aligned} \text{Im } \delta\omega \simeq & - \frac{\Omega_0^2 \epsilon_{02}^2 \zeta_0^2 L_x \sqrt{\pi} (1 - k_z/|k|)}{(\epsilon_{01} + \epsilon_{02})^3 v_0} (|k| k_x - k_z^2 - 2k_x^2) \times \\ & \times [1 - \exp(-\gamma_{x0}^2 L_x^2/4) - 2k_x \gamma_{x0} \exp(-\gamma_{x0}^2 L_x^2/4)]. \end{aligned} \quad (17)$$

При $\gamma_{x0} L_x \ll 1$ второе слагаемое в фигурной скобке является наибольшим, и происходит усиление. В противном случае ($\gamma_{x0} L_x \gg 1$) усиление имеет место при $k_x \gg k_z$.

Полученные результаты могут быть сведены в таблицу. Аналогичные результаты получаются и для быстрых ВПЗ.

Следует отметить, что в одномерных задачах, где изменение частоты ВПЗ происходит, например, в результате малых флуктуаций диэлектрической проницаемости $\epsilon^{[3]}$, всегда имеет место затухание. Это объясняется тем, что волна

рассеивается, в основном, в подобные ей гармоники. В двумерном случае можно так подобрать соотношения между радиусами корреляции и соответствующими длинами волн, что вклад в $\text{Im } \delta\omega$ дают, в основном, гармоники, излучающие энергию.

Т а б л и ц а

	$\gamma_{x0}L_x \ll 1$	$\gamma_{x0}L_x \gg 1$
$\gamma_z L_z \ll 1$	усиление	усиление
$\gamma_z L_z \gg 1$	усиление	затухание

ЛИТЕРАТУРА

1. Яковенко В. М.—Sol. Stat. Comm., 1981, 39, № 7, p. 847.
2. Ханкина С. И., Яковенко В. М.—УФЖ, 1982, 27, вып. 1, с. 138.
3. Басс Ф. Г., Притула Г. М., Ханкина С. И., Яковенко В. М.—Изв. вузов — Радиофизика (в печати).
4. Михайловский А. Б., Пашицкий Э. А.—ЖЭТФ, 1965, 48, вып. 6, с. 1787.
5. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М.: Наука, 1972, с. 424.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
31 мая 1982 г.

SPACE-CHARGE WAVE SPREAD OVER A STATISTICALLY ROUGH SURFACE

F. G. Bass, A. A. Bulgakov, S. I. Khankina, V. M. Yakovenko

Interaction of space-charge waves in fluxes moving over the statistically rough surface has been studied. In the hydrodynamical approximation dispersion relations, spectra and decrements (increments) of eigen oscillations are obtained.