

УДК 535.31

ФЛУКТУАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПОТОКЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

В. Г. Гавриленко, В. Д. Пикулин, А. А. Семериков

Методом геометрической оптики вычисляются флуктуации частоты, волнового вектора и амплитуды продольных волн электрического поля в плазме с пространственно-временными неоднородностями концентрации и макроскопической скорости. Анализируется энергообмен между волной и нестационарной средой.

В настоящее время установлено, что статистические характеристики волн зависят не только от корреляционных свойств переменных параметров хаотически неоднородной среды, но и от закона дисперсии и типа волны [1, 2].

В известных нам работах подробно исследуется поведение поперечных электромагнитных волн в различных турбулентных средах. При этом флуктуационные свойства продольных или так называемых плазменных волн практически не изучены.

В настоящей работе показано, что при распространении продольных волн электрического поля в плазме с хаотически изменяющимися в пространстве и времени параметрами возникает ряд специфических особенностей, в частности, в процессе энергообмена между волной и нестационарной средой.

Рассмотрим турбулентный гидродинамический поток плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля. Будем считать, что средняя скорость макроскопического движения электронов V_0 постоянна, направлена вдоль оси z декартовой системы координат и значительно превосходит среднеквадратичную скорость турбулентного перемешивания $V_0 \gg \sqrt{\overline{v^2}}$. Пусть в плоскости $z=0$ возбуждается продольная монохроматическая плоская волна электрического поля с частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} , параллельным оси z .

Частоту и волновое число будем считать достаточно большими, чтобы можно было пренебречь движением ионов под действием поля волны и воспользоваться для решения задачи методом геометрической оптики [3], необходимые условия применимости которого в нашем случае выглядят так:

$$kl \gg 1, \quad \omega l / V_0 \gg 1, \quad (1)$$

где l — минимальный размер неоднородностей плазмы. Второе неравенство в (1) обусловлено тем, что в данной модели нестационарность среды вызвана ее движением.

Будем исходить из геометрикооптических уравнений переноса параметров волны, приведенных в статье [4] для продольных волн в неоднородно движущейся плазме. В одномерном случае эти уравнения и их решения для некоторых регулярных законов изменения концентрации и скорости движения плазмы были впервые получены в [5].

Предположим, что относительные флуктуации концентрации электронов N_1/N_0 малы, и ограничимся при решении уравнений геометриче-

ской оптики методом возмущений [6]. Рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения случай, когда частота соударений мала ($\nu \ll \omega$) и флуктуации концентрации преобладают над флуктуациями скорости макроскопического движения, точнее, выполняется неравенство

$$\sqrt{\overline{\omega_{p1}^4}} \gg k^2 \overline{v^2}, \quad (2)$$

где $\omega_{p1}^2 = 4\pi N_1 e^2 m^{-1}$ — флуктуационная часть плазменной частоты, e и m — заряд и масса электрона.

Результаты вычисления статистических параметров продольных волн оказываются существенно зависящими от соотношения между тепловой v_T и макроскопической скоростью движения электронов плазмы. Для простоты рассмотрим два предельных случая.

1. $v_T^2 k/\omega \gg V_0$, $\omega \gg kv_T$ (плазменные волны). При этом, согласно [4], эрмитова часть продольного квазистационарного (см. [3]) тензора диэлектрической проницаемости равна: $\epsilon_{zz}^3 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{3}{2} \frac{\omega_p^2}{\omega^4} k^2 v_T^2$.

Уравнение эйконала для мгновенных значений частоты и волнового вектора продольной волны получается приравниванием ϵ_{zz}^3 к нулю. Из него, в частности, вытекает формула для групповой скорости $u = (3/2) v_T^2 k \omega^{-1}$ [7]. Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае выполняется условие квазистатистики $l \ll uT$, где $T = l/V_0$ — характерное время изменения параметров плазмы. Это позволяет записать уравнение переноса для поправок первого порядка к частоте и волновому вектору в упрощенном виде:

$$u (\partial \omega_1 / \partial z) = (1/2 \omega) (\partial \omega_{p1}^2 / \partial t); \quad (3a)$$

$$u (\partial k_1 / \partial z) = - (1/2 \omega) \nabla \omega_{p1}^2. \quad (3b)$$

Легко найти решение, например, уравнения (3a):

$$\omega_1(x, y, z, t) = (2\omega u)^{-1} \int_0^z (\partial / \partial t) \omega_{p1}^2(x, y, \xi, t) d\xi. \quad (4)$$

При условии $z \gg l$ дисперсия флуктуаций частоты равна

$$\overline{\omega_1^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^4}{\omega^2 u^2} \frac{z}{N_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega^2 \Phi_N(\mathbf{x}, \Omega) |_{x_z=0} d\Omega dx_x dx_y, \quad (5)$$

где $\Phi_N(\mathbf{x}, \Omega)$ — пространственно-временной спектр мощности флуктуаций концентрации электронов. В рассматриваемом случае, когда нестационарность плазмы вызвана ее движением, можно записать [8]

$$\Phi_N(\mathbf{x}, \Omega) = F_N(\mathbf{x}) \exp [-(\Omega - x_z V_0)^2 / 2x^2 \overline{v^2}] (2\pi x^2 \overline{v^2})^{-1/2}. \quad (6)$$

С учетом (6) в изотропном случае получаем

$$\overline{\omega_1^2} = \pi^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^2} \frac{\overline{v^2}}{u^2} \frac{z}{N_0^2} \int_0^{\infty} F_N(x) x^3 dx. \quad (7)$$

Аналогичным образом вычисляем средний квадрат флуктуаций единичного вектора волновой нормали (угла прихода):

$$\overline{l_1^2} = \frac{\overline{k_{1\perp}^2}}{k^2} = \pi^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{v_T^4}{u^4} \frac{z}{N_0^2} \int_0^\infty F_N(x) x^3 dx, \quad (8)$$

где $k_{1\perp} = \{k_{1x}, k_{1y}, 0\}$ — поперечная составляющая волнового вектора.

Как известно [1, 3], уравнение переноса для амплитуды волны E или уровня $\chi = \ln E/E_0$ (E_0 — амплитуда электрического поля при $z=0$) выводится из условия совместности системы уравнений первого приближения геометрической оптики. В слабостолкновительной плазме в отсутствие процессов ионизации можно исходить из условия существования адиабатического инварианта — отношения энергии волнового пакета к его частоте. В рассматриваемом квазистатическом случае основное влияние на изменение уровня оказывает сжатие и растяжение лучевых трубок, и уравнение переноса первого порядка приближенно записывается следующим образом:

$$(\partial\chi_1/\partial z) = -(1/2k) \operatorname{div} k_1. \quad (9)$$

Из решения (9) получаем средний квадрат флуктуаций уровня волны

$$\overline{\chi_1^2} = \frac{3\pi^2}{16} \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{v_T^4}{u^4} \frac{z^3}{N_0^2} \int_0^\infty F_N(x) x^5 dx. \quad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что при тех же значениях параметров плазмы флуктуации угла прихода и уровня продольной волны значительно превосходят соответствующие величины для поперечных волн ($v_T^4/u^4 \gg 1$).

Важным вопросом теории распространения волн в нестационарной среде является проблема энергообмена между волной и средой. Для решения этого вопроса удобно рассмотреть среднее значение плотности потока энергии s волны [2]. Нарастание потока энергии вдоль оси z будет означать передачу энергии в среднем от среды к волне и наоборот. Усредняя уравнение, описывающее изменение энергии волны с учетом существования адиабатического инварианта (см. [3, 4]), получим

$$\frac{\partial \overline{s_z}}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} i\omega \epsilon_{zz}^a + \frac{1}{8\pi\omega^2} \chi_1 \overline{\frac{\partial \omega_{p1}^2}{\partial t}}, \quad (11)$$

где ϵ_{zz}^a — продольная составляющая антиэрмитовой части квазистационарного тензора диэлектрической проницаемости, обусловленная соударениями электронов и затуханием Ландау [7]. В (11) и далее полагается $E_0=1$. Ограничиваясь рассмотрением малых относительных изменений плотности потока энергии, можно учитывать все причины этого изменения аддитивным образом, т. е. в выражении ϵ_{zz}^a пренебречь неоднородностью и нестационарностью плазмы, а во втором слагаемом правой части (11), описывающем параметрические эффекты, не принимать во внимание соударения и затухание Ландау. Интегрируя уравнение (11), получаем с учетом (6)

$$\begin{aligned} \overline{s_z} = & -\frac{\nu}{8\pi} \frac{\omega}{\omega_p} z - \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \omega \left(\frac{\omega_p}{k v_T} \right)^3 \exp\left(-\frac{\omega_p^2}{k^2 v_T^2} z\right) z - \\ & - \frac{3\pi}{32} \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{v_T^2}{u^2} \frac{V_0 z}{N_0^2} \int_0^\infty F_N(x) x^3 dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует, что в турбулентном потоке с достаточно интенсивным тепловым движением электронов параметрические эффекты, так

же как соударения и затухание Ландау, приводят к передаче энергии от волны к среде.

При этом полезно отметить, что средняя интенсивность (и средняя плотность энергии) плоской неколлимированной волны во флуктуирующей среде, даже при полном отсутствии энергообмена ($\bar{s} = \text{const}$), нарастает с расстоянием z из-за накопления флуктуаций направления групповой скорости волны по закону [9] $\bar{E}^2 = 1 + l_1^2/2$.

В нашем случае, поскольку $V_0 u/v_T^2 \ll 1$, этот эффект преобладает над параметрическим уменьшением потока энергии, описываемым последним слагаемым в правой части (12).

Анализируя выражения (7), (8), (10) и (12), можно сделать вывод, что в рассматриваемом квазистатическом случае флуктуации угла прихода и уровня определяются пространственной структурой турбулентного потока, флуктуации же частоты и энергообмен, естественно, вызваны нестационарностью среды. Причем, так как волна распространяется вдоль средней скорости потока, частота изменяется только за счет турбулентных пульсаций скорости. Энергообмен сохраняется и в приближении «замороженной» турбулентности [6, 8], когда

$$\Phi_N(\mathbf{x}, \Omega) = F_N(\mathbf{x}) \delta(\Omega - \kappa_z V_0).$$

Условие, при котором средний поток энергии можно вычислять в приближении «замороженности», в данном случае состоит в малости скоростей турбулентных пульсаций по сравнению со средней скоростью.

2. $V_0 \gg v_T^2 k/\omega_p$, $kc \gg \omega$, $V_0 \ll c$ (волны пространственного заряда).

В этом случае, пренебрегая тепловым движением электронов, из условия обращения ϵ_{zz}^a в нуль получается следующее уравнение эйконала:

$$\omega - \mathbf{kV} = \pm \omega_p, \quad \mathbf{V} = V_0 + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (13)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует быстрой волне пространственного заряда (фазовая скорость больше скорости потока), а нижний — медленной. Групповая скорость \mathbf{u} обеих этих волн совпадает со скоростью потока, и поэтому при любой скорости движения турбулентной среды условия квазистатичности не выполняются. Уравнения переноса поправок к частоте и волновому вектору имеют вид

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \omega_1}{\partial z} = \pm \frac{\partial \omega_{p1}}{\partial t} + k_0 \frac{\partial v_z}{\partial t}; \quad (14a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{1\perp}}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \mathbf{k}_{1\perp}}{\partial z} = \nabla_{\perp} (\mp \omega_{p1} - k_0 v_z), \quad (14b)$$

где ∇_{\perp} — поперечная к оси z составляющая градиента. Продольная часть поправки к волновому вектору определяется прямо из (13):

$$k_{1z} = V_0^{-1} (\omega_1 - k_0 v_z \pm \omega_{p1}). \quad (15)$$

Решение уравнений (14) получается путем интегрирования вдоль характеристики $t' = t - (z - \xi) V_0^{-1}$, например,

$$\omega_1(x, y, z, t) = \frac{1}{V_0} \int_0^z \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial t'} [\omega_{p1}(x, y, \xi, t')] + k_0 \frac{\partial v_z}{\partial t'} \right\} d\xi. \quad (16)$$

Учитывая (2) и (6), для дисперсии частоты находим

$$\overline{\omega_1^2} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\omega_p^2}{N_0} V_0 \int_0^z d\xi \int_0^\infty F_N(x) W \left(\frac{x\xi \sqrt{V_0^2}}{\sqrt{2} V_0} \right) (2\pi x^2 \overline{v^2})^{-1/2} x^4 dx, \quad (17)$$

где $W(z) = 2\pi^{-1} \int_0^\infty (\sin zx) x^{-1} \exp(-x^2/4) dx$ — интеграл вероятности.

Аналогичным образом можно получить

$$\overline{k_{1r}^2} = \overline{k_{1y}^2} = \overline{k_{1z}^2} = \overline{\omega_1^2}/V_0^2, \quad \overline{I_1^2} = 2\overline{\omega_1^2}/(\omega \mp \omega_p)^2. \quad (18)$$

При рассмотрении уравнения переноса для амплитуды ограничимся случаем несжимаемого потока ($\text{div } \mathbf{V} = 0$). Основываясь на существовании указанного выше адиабатического инварианта, можно получить, что флуктуации уровня волн пространственного заряда в первом приближении теории возмущений с расстоянием не накапливаются:

$$\chi_1 = \omega_{p1}/2\omega_p. \quad (19)$$

Это следствие того, что энергетические лучевые трубки не сжимаются ($\text{div } \mathbf{u} = 0$), и отношение плотности энергии волн к частоте не зависит ни от частоты, ни от волнового вектора.

Уравнение переноса вектора средней плотности потока энергии во втором приближении метода возмущений для волн пространственного заряда имеет вид

$$\frac{\partial \overline{s_z}}{\partial z} = -\frac{1}{8\pi} i\omega \epsilon_{zz}^a - \frac{1}{16\pi} \frac{\partial \overline{\epsilon_{zz}^a}}{\partial t}. \quad (20)$$

Здесь первое слагаемое в правой части, как и для плазменных волн, определяется регулярным поглощением и затуханием Ландау. Для быстрой и медленной волн антиэрмитова часть тензора отличается по величине и знаку.

Так, например, при $\omega \gg kV_0$ (быстрая волна)

$$\epsilon_{zz}^a = -i \frac{v}{\omega_p} - 2i \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega_p}{|k|v_T} \right)^3 \exp\left(-\frac{\omega_p^2}{k^2 v_T^2}\right), \quad (21)$$

т. е. совпадает по виду с (12), а при $\omega \ll kV_0$ (медленная волна)

$$\epsilon_{zz}^a = i \frac{v}{\omega_p} + 2i \sqrt{\pi} \left(\frac{V_0}{v_T} \right)^3 \exp\left(-\frac{V_0^2}{v_T^2}\right). \quad (22)$$

Последнее слагаемое в правой части (20) после некоторых преобразований может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial \overline{\epsilon_{zz}^a}}{\partial t} &= \pm \frac{1}{30} \frac{kV_0}{\omega_p} \left(1 + \frac{kV_0}{\omega}\right) \times \\ &\times \int_0^\infty F_v(x) W \left(xz \sqrt{\overline{v^2}} / \sqrt{2} V_0 \right) (2\pi x^2 \overline{v^2})^{-1/2} x^4 dx. \end{aligned} \quad (23)$$

При выводе (23) учтено, что тензор спектральной плотности мощности флуктуаций макроскопической скорости в несжимаемом турбулентном потоке может быть записан следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{x}, \Omega) &= (\delta_{ij} - x_i x_j \kappa^{-2}) F_v(\mathbf{x}) \times \\ &\times \exp[-(\Omega - x_z V_0)^2 (2x^2 \overline{v^2})^{-1}] (2\pi x^2 \overline{v^2})^{-1/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (23), (24) видно, что параметрический энергообмен между волной и средой определяется в данном случае, несмотря на сохранение неравенства (2), макроскопическим движением и не зависит от случайных изменений концентрации электронов.

Из формул (20)—(22) ясно, что для быстрой волны регулярная диссипация приводит к уменьшению энергии, а для медленной — к ее увеличению. Этот эффект известен и объясняется тем, что плотность энергии, переносимая медленной волной, отрицательна [10], а поток энергии направлен против оси z . Что же касается параметрического энергообмена, описываемого соотношением (23), то здесь наблюдается более сложная картина. Энергия медленной волны при всех допустимых значениях ω и k_0 (считаем для определенности $\omega > 0$) в среднем убывает с расстоянием. Для прямой ($k_0 = k_z > 0$) быстрой волны результат противоположный. У обратной волны ($k_0 < 0$) знак и величина параметрического энергообмена зависят от соотношения между ω и $|k_0|V_0$.

Поскольку в холодной движущейся плазме среднее значение проекции групповой скорости волн на ось z сохраняется, изменение плотности энергии и средней интенсивности зависит только от поведения средней плотности потока энергии:

$$\bar{\epsilon} \cdot \bar{E}^2 = 1 + 2\chi^2 = 1 \pm (\omega_p/\omega V_0) \bar{s}_z. \quad (25)$$

Таким образом, из (20), (23) и (25) следует, что параметрические эффекты приводят к увеличению интенсивности волны, всегда, за исключением тех случаев, когда k_z удовлетворяет неравенствам

$$-\omega_p/2V_0 < k_0 < 0. \quad (26)$$

Рассмотрим теперь более подробно, как изменяется с расстоянием величина флуктуационной добавки к среднему потоку, а также средний квадрат флуктуаций частоты и единичного вектора волновой нормали.

Из (17), (18) и (23) видно, что все эти величины выражаются через однотипные интегралы. Основываясь на известных свойствах интеграла вероятности, нетрудно установить, что при

$$z/l \ll V_0/\sqrt{\bar{v}^2} \quad (27)$$

указанные выше величины могут быть вычислены в приближении «замороженной» турбулентности и изменяются с расстоянием z по квадратичному закону:

$$J_1 = \int_0^\infty F(x) W(xz \sqrt{\bar{v}^2}/\sqrt{2}V_0) (2\pi x^2 \bar{v}^2)^{-1/2} x^4 dx \simeq \pi z V_0^{-1} \int_0^\infty F(x) x^4 dx,$$

$$J_2 = \int_0^z d\xi \int_0^\infty F(x) W(x\xi \sqrt{\bar{v}^2}/\sqrt{2}V_0) (2\pi x^2 \bar{v}^2)^{-1/2} x^4 dx \simeq \\ \simeq \pi z^2/2V_0 \int_0^\infty F(x) x^4 dx$$

Причем в выражения (17) и (18) макроскопическая скорость среды вообще не входит. Очевидно, что неравенство (27) является условием «замороженности» в случае группового синхронизма, когда средняя групповая скорость распространяющейся волны совпадает со средней скоростью волн параметров среды [5]. Соотношение (27) означает, что за время прохождения пакетом волн пространственного заряда расстояния z параметры турбулентного потока с точки зрения системы отсчета, движущейся со скоростью V_0 , не успевают существенно измениться.

При выполнении противоположного (27) неравенства все рассматриваемые величины содержат \bar{v}^2 и изменяются с расстоянием по линейному закону:

$$J_1 \simeq (2\pi \bar{v}^2)^{-1/2} \int_0^{\infty} F(x) x^3 dx, \quad J_2 \simeq z (2\pi \bar{v}^2)^{-1/2} \int_0^{\infty} F(x) x^3 dx.$$

Все полученные выше соотношения можно оценить по порядку величины, задавая конкретный вид пространственной части спектров концентрации и скорости. Например, для колмогоровской турбулентности [8]

$$\int_0^{\infty} F_N(x) x^3 dx \sim \frac{\overline{N_1^2}}{\sqrt[3]{L^2 l}}, \quad \int_0^{\infty} F_N(x) x^4 dx \sim \frac{\overline{N_1^2}}{l \sqrt[3]{L^2 l}},$$

$$\int_0^{\infty} F_N(x) x^5 dx \sim \frac{\overline{N_1^2}}{l^2 \sqrt[3]{L^2 l}}, \quad F_v(x) \sim \frac{\bar{v}^2}{\overline{N_1^2}} F_N(x).$$
(28)

В этих формулах L — внешний масштаб турбулентности. Для гауссова спектра флуктуаций параметров в выражении (28) достаточно заменить $\sqrt[3]{L^2 l}$ на l , имея в виду, что в этом случае l — это единственный характерный масштаб неоднородностей.

В заключение отметим, что найденные выше соотношения, при выводе которых не учитывалось движение ионов под действием поля волны, сохраняют свою силу и в случае нескомпенсированных электронных потоков.

Полученные результаты представляют интерес для диагностики плазмы и исследования флуктуационных явлений в электронных приборах.

Авторы выражают признательность Н. С. Степанову за интерес к работе и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kravtsov Yu. A., Ostrovsky L. A., Stepanov N. S.—Proc. IEEE, 1974, 62, № 11, p. 1492.
2. Гавриленко В. Г., Кром М. Н., Степанов Н. С.—Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 8, с. 1131.
3. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
4. Пикунин В. Д.—Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 12, с. 1417.
5. Степанов Н. С.—Изв. вузов — Радиофизика, 1963, 6, № 1, с. 112.
6. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II.— М.: Наука, 1978.
7. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
8. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
9. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С.—Изв. вузов — Радиофизика, 1973, 16, № 1, с. 69.
10. Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы.— М.: Мир, 1975.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию
19 марта 1982 г.

PARAMETER FLUCTUATIONS OF THE ELECTRIC FIELD LONGITUDINAL WAVES IN A FLUX OF THE TURBULENT PLASMA

V. G. Gavrilenko, V. D. Pikulin, A. A. Semerikov

By the method of the geometrical optics we calculate frequency fluctuations, wave vector and amplitudes of longitudinal waves of the electric field in a plasma with space-time inhomogeneities of the concentration and the macroscopic velocity. The energy exchange is analysed between the wave and the nonstationary medium.