ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 2 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 621.371.24

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ СПЕКТРА НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В СЛОИСТО-НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

А. В. Кукушкин, В. Д. Фрейлихер, И. М. Фукс

Предложена теория возмущений для открытых систем, спектр собственных значений которых является комплексным, а собственные функции неограниченно возрастают на бесконечности. Для случая слоисто-неоднородной тропосферы проведено исследование спектра постоянных распространения волн и поправки к высотным функциям при слабой рефракции, когда высотная зависимость показателя преломления мало отличается от случая нормальной рефракции.

При распространении УКВ радиоволн над поверхностью Земли наличие слоистых неоднородностей показателя преломления приводит к существенному изменению структуры поля в области геометрической тени. Полное решение задачи о распространении волн в слоисто-неоднородной тропосфере, в которой диэлектрическая проницаемость зависит только от высоты h над поверхностью Земли, было получено Фоком [1]. При этом показано, что при значениях параметра $m=(ka/2)^{1/3}\gg 1$, где k — волновое число, a — радиус Земли, можно упростить задачу, переходя от сферически-слоистой к плоскослоистой среде. Такое упрощение обеспечивается применением параболического приближения и введением модифицированной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon_{\text{м}}(h)=\varepsilon(h)+2h/a.$$

Даже в упрощенной постановке задачи аналитическое решение удается получить лишь для нескольких эталонных задач с ограниченным набором профилей диэлектрической проницаемости $\varepsilon(h)$. В общем случае анализ условий распространения сводится к численному решению на ЭВМ дисперсионного уравнения для комплексных постоянных распространения и интегрированию дифференциального уравнения для высотных функций $\chi_n(h)$ [1], гл. 16, 17. В ряде задач зависимость $\varepsilon(h)$ мало отличается от эталонной, как, например, в случае слабой рефракции. Поэтому представляет интерес аналитическое исследование спектра постоянных распространения и изменения высотных функций при малых отличиях профиля от эталонного.

Таким образом, возникает необходимость в построении теории возмущений для открытых систем, спектр собственных значений (постоянных распространения) которых является комплексным, а собственные функции (высотные множители) неограниченно возрастают, $\chi_n(h)\to\infty$ при $h\to\infty$. Аналогичная задача возникает в квантовой механике при исследовании распада квазистационарных состояний. Теория возмущений для этого случая была развита в работах Зельдовича [2, 3], однако при этом существенно использовалась ограниченность потенциала (аналог $\varepsilon_{\text{м}}(h)$) при $h\to\infty$. В задаче о распространении волн в неоднородной тропосфере это условие не выполняется ($\varepsilon_{\text{м}}(h)\to 2h/a$ при $h\to\infty$).

В настоящей работе предлагается обобщение теории возмущений [2, 3] на случай потенциалов, не ограниченных на бесконечности, и с помощью этой теории исследуется изменение высотных функций и спектра постоянных распространения при слабой рефракции, когда зависимость $\varepsilon_{\text{м}}(h)$ мало отличается от случая нормальной рефракции.

1. Как показано Фоком [1], множитель ослабления поля точечного источника V в сферически-слоистой среде в области полутени и тени можно представить в виде суперпозиции нормальных волн:

$$V(x,\ y,\ y_0) = 2\sqrt{\pi x}\, e^{i\pi/4} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \exp(ixt_n) \frac{\chi(y,\ t_n)\chi(y_0,\ t_n)\chi^*(0,\ t_n)}{(\partial/\partial t_n)\chi(0,\ t_n)}, \tag{1.1}$$

где введены безразмерные координаты $x=mD/a$ и $y=kh/m$, $k=k_0\sqrt{\varepsilon(h\to\infty)}$, k_0 — волновое число в вакууме, D — расстояние вдоль земной поверхности между источником и приемником, расположенными на высотах h_0 и h соответственно. Высотные функции $\chi(y,\ t_n)$ удовлетворяют уравнению

$$(d^2/dy^2)\chi(y,\ t_n) + [U(y) - t_n]\chi(y,\ t_n) = 0 \tag{1.2}$$

и граничным условиям

$$\chi(y = 0,\ t_n) = 0; \tag{1.3}$$

$$(d/dy)(\arg\chi(y,\ t_n))|_{y\to\infty} > 0, \tag{1.4}$$

из которых определяется дискретный спектр безразмерных комплексных постоянных распространения t_n. Приведенный показатель преломления $U(y)=m^2(\varepsilon-1)+y$ (рис. 1) представим в виде $U(y)=U_0(y)+\delta U(y)$, где $U_0(y)$ — невозмущенный показатель преломления, для которого известно решение граничной задачи (1.2)—(1.4), а $\delta U(y)$ будем рассматривать как возмущение.

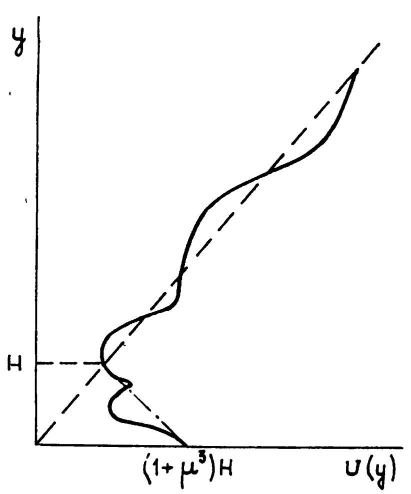

Рис. 1.

Следуя [3], введем логарифмическую производную

$$z_n(y) = \frac{d\chi(y,\ t_n)}{dy}\chi^{-1}(y,\ t_n), \tag{1.5}$$

через которую высотная функция выражается следующим образом:

$$\chi(y,\ t_n) = \\ = \lim_{\sigma\to 0}\chi(\sigma,\ t_n)\exp\left(\int_\sigma^y dy'\, z_n(y')\right). \tag{1.6}$$

Для $z_n(y)$ можно получить уравнение

$$z_n'(y) + z_n^2(y) + U_0(y) + \delta U(y) - t_n = 0. \tag{1.7}$$

Будем искать $z_n(y)$ и t_n в виде

$$z_n(y) = z_n^0(y) + \delta z_n(y),\quad t_n = t_n^0 + \delta t_n, \tag{1.8}$$

где $z_n^0(y)$ и t_n^0 соответствуют высотной функции невозмущенного уравнения, $\delta z_n \sim \delta t_n \sim \delta U$. Подставляя (1.8) в (1.7), получим уравнение для поправки к высотной функции

$$\delta z_n'(y) = -2z_n^0(y)\,\delta z_n(y) + \delta t_n - \delta U(y),$$

решение которого имеет вид

$$\delta z_n(y) = \chi_0^{-2}(y,\ t_n^0)\int_0^y dy'\chi_0^2(y',\ t_n^0)\,[\delta t_n - \delta U(y')]. \tag{1.9}$$

Если отличием исследуемого профиля $\delta U(y)$ от эталонного можно пренебречь на достаточно больших высотах, то решение уравнения (1.2) при $y\to\infty$ имеет тот же вид, что и эталонной задачи $\chi_0(y,\ t_n)$:

$$\begin{gathered}\delta z_n(y) \underset{y\to\infty}{\approx} \delta\,[\chi_0^{-1}(y,\ t_n^0+\delta t_n)(d/dy)\chi_0(y,\ t_n^0+\delta t_n)] = \\ = \frac{\delta t_n}{\chi_0^2(y,\ t_n^0)}\left[\chi_0(y,\ t_n^0)\frac{\partial^2\chi_0(y,\ t_n^0)}{\partial y\partial t_n} - \frac{\partial\chi_0(y,\ t_n^0)}{\partial y}\,\frac{\partial\chi_0(y,\ t_n^0)}{\partial t_n}\right].\end{gathered} \tag{1.10}$$

Подставляя (1.10) в (1.9), получим формулу для поправки к постоянной распространения

$$\begin{gathered}\delta t_n = N^{-1}\lim_{y\to\infty}\int_0^y dy'\,\delta U(y')\,\chi_n^2(y'), \\ \chi_n(y) \equiv \chi_0(y,\ t_n^0).\end{gathered} \tag{1.11}$$

Это выражение отличается от обычной формулы теории возмущений тем, что под интегралом вместо квадрата модуля высотной функции $|\chi_n(y)|^2$ стоит $\chi_n^2(y)$, а вместо нормы (которая в данном случае не существует) — конечная величина N, равная

$$\begin{gathered}N = \lim_{y\to\infty}\left[\int_0^y dy'\chi_n^2(y') - \chi_n(y)\times\right. \\ \left.\times\frac{\partial^2\chi_n(y)}{\partial y\partial t_n} + \frac{\partial\chi_n(y)}{\partial y}\,\frac{\partial\chi_n(y)}{\partial t_n}\right] = \left(\frac{\partial\chi_n}{\partial y}\,\frac{\partial\chi_n}{\partial t_n}\right)_{y=0}.\end{gathered} \tag{1.12}$$

В тропосфере зависимость приведенного показателя преломления $U(y)$ становится линейной на достаточно больших высотах. В этом случае выражение (1.12) имеет вид

$$N = \lim_{H\to\infty}\int_0^H dy\,[\chi_n^2(y) - w_1^2(t_n^0 - y)] - [w_1'(t_n^0)]^2,$$

где $w_1(t_n^0 - y)$ — функция Эйри [1], которая является решением эталонной задачи (1.2)—(1.4) с $U_0(y)=y$ и имеет асимптотику уходящей волны при $y\to\infty$.

В случае нормальной рефракции $U_0(y) = y$, $\chi_n(y) = w_1(t_n^0 - y)$ при $0 \leqslant y < \infty$, причем в формуле (1.1) под a следует понимать эквивалентный радиус Земли [1]. Постоянные распространения t_n^0 при этом определяются решением трансцендентного уравнения $w_1(t_n^0) = 0$ и для больших номеров n имеют асимптотики $t_n^0 = \tau_n e^{i\pi/3}$, $\tau_n = [(3/2)(n - 1/4)\pi]^{2/3}$.

В этом случае выражение (1.12) сводится к виду

$$N = \lim_{y\to\infty}\left\{\int_0^y dy' w_1^2(t_n^0 - y') + (t_n^0 - y)w_1^2(t_n^0 - y) - \right. \tag{1.13}$$
$$\left. - [w_1'(t_n^0 - y)]^2\right\}.$$

Вычисляя входящий в (1.13) интеграл

$$\int dx w_1^2(-x) = x w_1^2(-x) + [w_1'(-x)]^2 \tag{1.14}$$

и учитывая граничное условие (1.3), получим $N = -[w_1'(t_n^0)]^2$ и

$$\delta t_n = -[w_1'(t_n^0)]^{-2}\int_0^\infty dy\,\delta U(y) w_1^2(t_n^0 - y). \tag{1.15}$$

Формула (1.15) позволяет в явном виде находить поправки δt_n к комплексным постоянным распространения нормальных волн t_n^0 при произвольных искажениях $\delta U(y)$ линейного профиля показателя преломления (при условии, что эти поправки оказываются достаточно малыми, т. е. $|\delta t_n| \ll |t_n^0 - t_{n-1}^0|$).

Заметим, что при достаточно большой величине возмущения $\delta U(y)$ может возникнуть и новая ветвь спектра, исследование которой не входит в нашу задачу.

2. Рассмотрим случай линейного искажения

$$\delta U(y) = \begin{cases}(1+\mu^3)(H-y), & y \leqslant H\\ 0, & y > H\end{cases}, \tag{2.1}$$

где $1+\mu^3$ — градиент приведенного показателя преломления в интервале высот $0 < y < H$ (рис. 1). Точное дисперсионное уравнение для спектра t_n в этом случае было выведено Фоком ([1], стр. 308). Решение его не удается получить аналитически при произвольном соотношении параметров H и μ и требует привлечения численных методов, а исследование предельных случаев приводит к громоздким вычислениям.

Применение теории возмущений в форме (1.15) позволяет исследовать спектр t_n существенно более простым способом.

а) Пусть высота искажения мала и выполняются неравенства $H \ll \tau_n$, $\tau_n \gg 1$. Тогда фаза аргумента функции Эйри заключена в пределах сектора $(\pi/3, 2\pi/3)$ и асимптотика $w_1(t_n^0 - y)$ имеет вид

$$w_1(t_n^0 - y) \sim (t_n^0 - y)^{-1/4} \times \tag{2.2}$$
$$\times \{\exp[(2/3)(t_n^0 - y)^{3/2}] + i\exp[(-2/3)(t_n^0 - y)^{3/2}]\}.$$

Подставим (2.1), (2.2) в (1.15) и разложим показатели экспоненты в (2.2) в ряды по степеням y/t_n^0. Удерживая линейные члены, что справедливо при выполнении неравенства $H^2 \ll \sqrt{\tau_n}$, получим

$$\delta t_n = i(1+\mu^3)(t_n^0)^{-1/2}[w_1'(t_n^0)]^{-2} \times \tag{2.3}$$
$$\times \{H^2 + (4t_n^0)^{-1}[2 - \exp(-2\sqrt{t_n^0}H) + \exp(2\sqrt{t_n^0}H)]\}.$$

При выполнении более сильного неравенства $H^2\tau_n \ll 1$ из (2.3) можно получить

$$\delta t_n = -(1+\mu^3)(H^4/12 + H^5 t_n^0/90). \tag{2.4}$$

Из этого выражения видно, что с увеличением высоты H или глубины инверсии $(1+\mu^3)H$ реальная и мнимая части t_n уменьшаются, что соответствует увеличению фазовой скорости волны и уменьшению ее затухания.

Для применимости теории возмущений необходима малость изменения постоянной распространения

$$|\delta t_n| \ll |t_n^0 - t_{n-1}^0| \approx \pi/\sqrt{\tau_n}, \tag{2.5}$$

что в совокупности с неравенством $H^2\tau_n \ll 1$ дает пределы применимости выражения (2.4)

$$H \ll \min\,[\tau_n^{-1/2},\ (12/(1+\mu^3))^{1/4}\,\tau_n^{-1/8}]$$

и для формулы (2.3)

$$H \ll \frac{1}{\sqrt{\tau_n}} \ln\left(\frac{16\tau_n^{3/2}}{1+\mu^3}\right).$$

б) Рассмотрим другой предельный случай, когда высота искажения велика: $H \gg \tau_n$. Представим интеграл в (1.15) в виде интегралов по дуге радиуса H в секторе углов $(0, \pi/3)$ и по лучу $\arg y = \pi/3$:

$$\int_0^H dy\,(H-y)\,w_1^2(t_n^0 - y) = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_0^{He^{i\pi/3}} dy\,(H-y)\,w_1^2(t_n^0 - y),$$

$$I_2 = iH\int_0^{\pi/3} d\varphi\,(1-e^{i\varphi})\,w_1^2(t_n^0 - He^{i\varphi}).$$

В интеграле I_1 сделаем замену переменных $y = \tau e^{i\pi/3}$ и используем свойство функции Эйри $w_1(xe^{i\pi/3}) = 2e^{i\pi/6}v(-x)$:

$$I_1 = 4e^{i2\pi/3}\int_0^H d\tau\,(H - \tau e^{i\pi/3})\,v^2(\tau-\tau_n). \tag{2.6}$$

Верхний предел интегрирования в (2.6) можно распространить до бесконечности, так как при $\tau>\tau_n$ функция $v(\tau-\tau_n)$ экспоненциально убывает. Тогда, учитывая (1.14), получим

$$I_1 \approx 4e^{i2\pi/3}H\int_0^\infty d\tau\,v^2(\tau-\tau_n) = -4e^{i2\pi/3}\sqrt{\tau_n}\,H. \tag{2.7}$$

Для оценки интеграла I_2 воспользуемся асимптотикой функций $w_1(t_n^0 - y)$ для больших отрицательных аргументов:

$$I_2 \approx -H^2\int_0^{\pi/3} d\varphi\,(1-e^{i\varphi})\,(He^{i\varphi} - t_n^0)^{-1/2}\,e^{i\Psi(\varphi)}, \tag{2.8}$$

где $\Psi(\varphi) = (4/3)H^{3/2}e^{i3\varphi/2} - 2\sqrt{H}e^{i\varphi/2}t_n^0$. Основной вклад в интеграл (2.8) дает область малых φ, в которой в разложении подынтегральной функции можно использовать члены, линейные по φ:

$$I_2 \simeq \frac{1}{4H^{3/2}} \exp\left(i\,\frac{4}{3}\,H^{3/2} - 2i\sqrt{H}\,t_n^0 + \frac{i\pi}{2}\right). \tag{2.9}$$

Подставляя (2.9) и (2.7) в (1.15), получаем

$$\delta t_n = (1+\mu^3) H \left[1 - \frac{i}{16\tau_n H^{5/2}} \exp\left(i\,\frac{4}{3}\,H^{3/2} - 2i\sqrt{H}\,t_n^0\right)\right]. \tag{2.10}$$

в) Так как мнимая часть комплексной постоянной распространения $\operatorname{Im} t_n \sim n^{2/3}$, из (2.10) и (2.4) следует, что поправка δt_n экспоненциально растет с номером n и, следовательно, начиная с некоторых n неравенство (2.5) перестает выполняться.

Можно, однако, показать, что этот результат является следствием «нефизичности» линейно-ломаного профиля. Для гладких функций $U(y)$, которыми в действительности и следует описывать реальный высотный ход диэлектрической проницаемости, зависимость δt_n от номера волны носит принципиально иной характер (см., например, формулу (3.8)).

Действительно, выполняя в (1.15) интегрирование по частям, можно написать

$$\delta t_n = -N^{-1} \int_0^\infty dy\,(d/dy)\,[\delta U(y)]\,F_n(y), \tag{2.11}$$

где $F_n(y) = \int_0^y dy' w_1^2(t_n^0 - y')$ при больших номерах $n(\sqrt{\tau_n y} \gg 1)$ ведет себя как $1/2t_n^0 \exp(2\sqrt{y}\,t_n^0)$ Если $\delta U(y)$ — непрерывная вместе со своими производными функция, достаточно быстро убывающая на бесконечности, интегрирование в (2.11) приводит к значениям δt_n, убывающим с ростом номера n.

В случае, когда $\delta U(y)$ при $y=H$ скачком обращается в нуль (разрыв первого рода), у подынтегрального выражения в (2.16) появляется в этой точке особенность типа дельта-функция, которая при больших t_n и дает основной вклад в интеграл:

$$\delta t_n \sim N^{-1} F_n(y=H) \sim \exp(2H\sqrt{t_n^0})\,(2t_n^{0\,3/2})^{-1}.$$

Этот результат легко обобщается на случай разрыва k-й производной:

$$\delta t_n \sim (2t_n^{3/2})^{-1}\,(2^k t_n^{k/2})^{-1} \exp(2H\sqrt{t_n}).$$

3. В атмосфере усредненные зависимости $\varepsilon(h)$ являются обычно достаточно гладкими функциями, убывающими с высотой. Рассмотрим возмущение $\delta U(y)$, описывающееся непрерывной функцией, которая допускает аналитическое продолжение в область комплексных y. Для вычисления поправки δt_n удобно в (1.15) перейти от функции $\delta U(y)$ к ее преобразованию Лапласа $F(s) = \int_0^\infty dy e^{-sy} \delta U(y)$:

$$\delta t_n = N^{-1} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} ds\,F(s) \int_0^\infty dy e^{sy} w_1^2(t_n^0 - y). \tag{3.1}$$

Пусть функция $\delta U(y)$ такова, что $F(s)$ не имеет особенностей в правой полуплоскости s и на мнимой оси. Тогда контур интегрирования по ds можно сдвинуть в левую полуплоскость, а контур в интеграле по dy — продеформировать на луч $\arg y = \pi/3$. Подставив асимптотику (2.2) в (3.1), получим

$$\int_0^\infty dy e^{sy} w_1^2(t_n^0 - y) = 4e^{i2\pi/3}\int_0^\infty dy \exp(sy\, e^{i\pi/3})\, v^2(y-\tau_n) +$$
$$+ \lim_{R\to\infty} R^{-3,2}\exp(sR + 4\sqrt{R}\tau_n/3). \tag{3.2}$$

В соответствии со сказанным выше $\operatorname{Re} s < 0$, поэтому второй член в (3.2) исчезает. Используя обратное преобразование Лапласа, можно получить

$$\delta t_n = 4e^{i2\pi/3} N^{-1}\int_0^\infty dy \delta U(ye^{i\pi/3})\, v^2(y-\tau_n). \tag{3.3}$$

Заметим, что выражением (3.3) удобно пользоваться, если сектор сходимости функции $\delta U(y)$ на комплексной плоскости больше $\pi/3$.

Рассмотрим применение формулы (3.3) на примере возмущения $\delta U = U_0 e^{-y/H}$. Положим $\tau_n \gg 1$, $H \ll 1$.

Подставляя в (3.3) асимптотику $v(y-\tau_n)$, получим

$$\delta t_n \simeq 2U_0\frac{e^{i\pi/3}}{N}\int_0^\infty dy \exp\left(-\frac{ye^{i\pi/3}}{H}\right)\left[1+\sin\left(\frac{4}{3}(\tau_n - y)^{3/2}\right)\right]. \tag{3.4}$$

При выполнении неравенства $H^2 \ll \sqrt{\tau_n}$ интеграл (3.4) легко вычисляется и

$$\delta t_n = 2U_0\frac{e^{i2\pi/3}}{\sqrt{\tau_n}N}H\left[1 - \frac{1}{1 - 4\tau_n H^2 e^{-i2\pi/3}}\right]. \tag{3.5}$$

Если $H^2\tau_n \ll 1$, выражение (3.5) преобразуется к более простому виду:

$$\delta t_n = -U_0(2H^3 + 8\tau_n H^5 e^{i\pi/3}),$$

в другом предельном случае, $H^2\tau_n \gg 1$,

$$\delta t_n \simeq 2\frac{e^{i2\pi/3}}{N}\int_0^\infty dy\,\delta U(ye^{i\pi/3}) = \frac{U_0 H}{2\tau_n}e^{-i\pi/3}.$$

4. Поправка к высотным функциям $\chi_0(y, t_n^0)$ при известных δt_n определяется интегралом (1.9), который позволяет получать простые формулы для $\delta z_n(y)$ в различных предельных случаях.

Рассмотрим, например, случай, когда антенны достаточно низко расположены над поверхностью Земли, т. е. $y \sim y_0$, $y^2\tau_n \ll 1$, а возмущение δU определяется функцией (2.1). Интегрирование выражения (1.9) легко выполнить, разлагая $\chi_0(y, t_n^0)$ в ряды по степеням y. В результате получим зависимость новой функции $\chi_0(y, t_n)$ от высоты:

$$\chi(y, t_n) = \chi_0(y, t_n^0)\exp[\delta t_n y^2/6 - (1+\mu^3)y^3/36],$$

из которой видно, что новая высотная функция в большей степени локализована вблизи поверхности, чем невозмущенная $\chi_0(y, t_n^0)$.

5. Следует отметить, что аппроксимация реального профиля показателя преломления атмосферы линейно-ломаным использовалась многими авторами. Наиболее полные результаты исследований дисперсионного уравнения для этого профиля изложены в работах [1, 4]. В частности, в работе [4] подробно исследован вопрос о возникновении новой ветви спектра постоянных распространения при достаточно больших искажениях исходного профиля, соответствующего нормальной рефракции (см. формулы (548), (559) главы 1).

Аналогичные выражения для постоянных распространения при отрицательных градиентах $U(y)$ в приповерхностном слое получены в [1] (формулы (7.21), (7.22), стр. 309). При малых искажениях эталонного профиля в работе [4] получена формула (541) (глава 1), которая при переходе к обозначениям, принятым в настоящей работе, совпадает с выражением (2.4). Выражением (2.4) и, соответственно, формулой (541) из [4] даже при очень малых искажениях эталонного профиля можно пользоваться лишь для нескольких модов низших порядков. В то же время при расчете полей в области полутени методом нормальных волн в ряде (1.1) необходимо суммировать много членов. Это ставит вопрос об определении постоянных распространения модов высших порядков.

В работе получены выражения для поправок к постоянным распространения модов высших порядков: формулы (2.3), (2.10), (3.5), (3.7). Из асимптотик дисперсионного уравнения для билинейного профиля, приведенного в работе [1] (стр. 308), авторами были получены формулы для δt_n, полностью аналогичные (2.3), (2.10). Определение поправок δt_n таким способом связано с громоздкими вычислениями, которые в тексте не приводятся.

Как отмечено выше, экспоненциальный рост поправок к постоянным распространения (2.3), (2.10) связан с отражением от изломов профиля $U(y)$ и для реальной тропосферы не имеет физического содержания. При сглаживании линейно-ломаного профиля на участке излома поправки δt_n определяются первыми членами в (2.3), (2.10), которые при достаточно малой высоте искажения (2.3) пропорциональны площади под возмущением, нормированной на постоянную распространения t_n^0 невозмущенной задачи. В случае, когда высота искажения велика, происходит сдвиг спектра постоянных распространения на величину $\delta U(y=0)=(1+\mu^3)H$. Аналогичные формулы для δt_n получены для гладких профилей $U(y)$, из которых видно, что знак изменения фазовой скорости и затухания нормальной волны определяется интегралом от высотной функции в пределах возмущения. В частности, при экспоненциальном возмущении из формул (3.5)—(3.7) следует, что увеличение значения показателя преломления вблизи поверхности приводит к уменьшению затухания нормальной волны.

В заключение отметим, что развитая выше теория возмущений может иметь приложения как в задачах распространения волн в природных условиях (волноводы в ионосфере, распространение звука в океане, сейсмология), так и в задачах квантовой механики (холодная эмиссия электронов из металла, энергетический спектр атомов во внешнем электрическом поле).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.— М.: Сов. радио, 1970.
2. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1960, **39**, с. 776.
3. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике.— М.: Наука, 1971.
4. Распространение ультразвуковых радиоволн. Под редакцией Шиллерова Б. А.— М.: Сов. радио, 1954.

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
31 марта 1982 г.

A PERTURBATION ANALYSIS OF THE NORMAL WAVE SPECTRUM IN STRATIFIED MEDIA

A. V. Kukushkin, V. D. Freilikher, I. M. Fuks

Suggested is a perturbation analysis of open wave guiding structures whose eigenvalue spectrum is complex and eigenfunctions can grow indefinitely large at infinity. The spectrum of propagation constants is discussed for waves in stratified troposphere. For the case of low atmospheric refraction, i. e. when the height «profile» of the refractive index is close to the standard, correction terms been obtained for the height gain function of the field.