

УДК 538.56

**О БИФУРКАЦИЯХ В ТРЕХМЕРНОЙ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ АВТОНОМНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ**

*В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Летчфорд, М. А. Сафонова*

Численно и на физической модели показано выполнение закона Фейгенбаума в трехмерной системе с двумя параметрами. Проанализированы статистические свойства странного аттрактора и определяются конкретные условия описания трехмерной системы с помощью одномерного отображения.

**1. Введение.** Последнее время прочно утвердился научный и практический интерес к моделям автоколебательных систем со странным аттрактором (СА), простейшие из которых описываются нелинейными дифференциальными уравнениями третьего порядка [1, 2]. Большинство подобных систем допускают общее описание с помощью уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x} + F_1(x, z, \alpha_n) \dot{x} + F_2(x, z, \alpha_n) x + F_3(x, z, \alpha_n) &= 0, \\ \dot{z} &= F_4(x, z, \alpha_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $F_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) — некоторые, вообще говоря, нелинейные функции,  $\alpha_n$  — совокупность постоянных величин, задающих  $n$ -мерное пространство параметров системы. Уравнения (1) представляют собой обобщение уравнения Льенара [3] на случай инерционной взаимосвязи отклика  $z$  на воздействие переменной  $x$ , совершающей колебания. В виде (1) записываются уравнения модели Лоренца [1, 2, 18], модели Пиковского—Рабиновича [4], модели автоколебательной реакции Жаботинского [5] и других систем с СА.

В настоящей работе численно и на физической установке исследуются бифуркационные явления в модели генератора с инерционной нелинейностью, уравнения которого подчиняются (1) [6, 7]:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (z - m)\dot{x} + (1 + gz)x - gxf(x) &= 0, \\ \dot{z} &= -gz + gf(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнения (2) описывают нелинейный осциллятор, у которого частота колебаний и диссипация инерционно связаны с переменной  $x$  посредством дифференциального оператора первого порядка. Вид нелинейной функции  $f(x)$  определяется свойствами инерционного преобразователя, в частности, стохастичность в (2) была обнаружена в случае, когда [7, 8]

$$f(x) = 1(x)x^2, \quad 1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \tag{3}$$

**2. О законе подобия Фейгенбаума применительно к исследуемой модели.** Перепишем уравнения (2) в удобном для численного анализа виде:

$$\dot{x} = mx + y - xz, \quad \dot{y} = -x, \quad \dot{z} = g[f(x) - z]. \quad (4)$$

Уравнения (4), вывод которых дан в [7, 8], характеризуются двумя параметрами:  $m$  — параметр возбуждения генератора, определяемый разностью отрицательных и положительных потерь,  $g$  — параметр инерционности системы, определяемый отношением периода базового колебания генератора и времени релаксации инерционной цепи. При численном анализе будем предполагать выполнение (3), влияние вида  $f(x)$  на динамику системы обсудим ниже.

В работе [7] показано, что в системе (4) СА возникает в результате цепочки бифуркаций удвоения периода с ростом  $m$ , однако закон Фейгенбаума [9] не был подтвержден. Бифуркации удвоения периода соответствует момент прохождения спектра линеаризованного отображения Пуанкаре через  $-1$  (мультипликатор цикла в точке бифуркации равен  $-1$ ) [5, 10, 19]. Используя программу [11], мы рассчитывали бифуркационные значения параметров  $m_i$  и  $g_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) системы (4), при которых мультипликатор проходит через  $-1$  для цикла соответствующего периода. Осуществлялось движение по параметру  $m$  при фиксированном  $g=0,3$  и по параметру  $g$  при фиксированном  $m=1,45$ .

В соответствии с соотношениями Фейгенбаума

$$\delta = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\alpha_l - \alpha_{l-1}}{\alpha_{l+1} - \alpha_l}, \quad \alpha_{кр} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{l+1} \delta - \alpha_l}{\delta - 1}, \quad (5)$$

где  $\alpha_i$  — бифуркационные значения параметра,  $\delta = 4,66920\dots$  — универсальная постоянная Фейгенбаума,  $\alpha_{кр}$  — критическое значение параметра, соответствующее возникновению хаоса. По рассчитанным значениям  $m_i$  и  $g_i$  определялись  $\delta$ ,  $m_{кр}$  и  $g_{кр}$ . Результаты счета сведены в табл. 1 и свидетельствуют о том, что бифуркационные значения параметров  $m_i$  и  $g_i$  подчиняются закону Фейгенбаума и демонстрируют быструю сходимость к  $\delta$  и  $\alpha_{кр}$ .

Таблица 1

$m = 1,45$ (расчет)		$g = 0,3$ (расчет)			$g = 0,3$ (эксперимент)		
$i$	$g_i$	$\delta_{g_i}$	$g_{кр_i}$	$m_i$	$\delta_{m_i}$	$m_{кр_i}$	$m_i$
1	0,120	—	—	0,770	—	—	0,77
2	0,16898	—	0,18233	1,020	—	1,088	1,02
3	0,18162	3,876	0,18506	1,0713	4,873	1,0853	1,07
4	0,18438	4,582	0,18513	1,08216	9,724	1,08511	~ 1,08
5	0,18497	4,66836	0,18513	1,08449	4,66896	1,08512	$m_{кр} = 1,09$

Приведенные на рис. 1 соответствующие значению мультипликатора  $\mu = -1$  для цикла периода  $T_0(l_1)$  и  $2T_0(l_2)$  бифуркационные линии  $l_1$  и  $l_2$  на плоскости параметров системы свидетельствуют о сложности ее полного параметрического портрета. Линия  $l_1$  допускает приближенную аналитическую аппроксимацию:

$$g(1 + 1,83g^2)[m - (m + 2)^{-1}] = C, \quad (6)$$

$$C = C_1 = 0,1429; \quad 0,05 < g < 0,5; \quad 0,6 < m < 2,2.$$

Выбирая  $C = C_2$  с помощью (6), можно аппроксимировать нижнюю ветвь  $l_2$ . Видимо, существует параметрическое семейство кривых  $\Phi(m, g, C_i) = 0$ , задающее бифуркационные линии  $l_i$  на плоскости  $mg$  с вполне определенной закономерностью сходимости  $C_i$  к  $C_{кр}$ .

3. Анализ характеристических ляпуновских показателей, фрактальной размерности и модельного отображения системы. Критерием гиперболичности движения динамической системы является наличие положительного среднего по аттрактору ляпуновского показателя при среднем сжатии фазового объема системы во времени. Следствием этого является положительность энтропии Колмогорова, характеризующей скорость разбегания близлежащих траекторий в фазовом пространстве [4, 7]. Процедура вычисления  $\langle \lambda^+ \rangle$  не связана с использованием закона подобия Фейгенбаума, поэтому представляется интересным сравнить критические значения  $m_{кр}$  и  $g_{кр}$ , вычисленные различными способами. Ляпуновские показатели рассчитывались с учетом того, что для трехмерных систем с СА выполняется

$$\langle \text{Sp } M \rangle = \left\langle \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \right\rangle = \langle \lambda^+ \rangle + \langle \lambda^- \rangle, \quad (7)$$

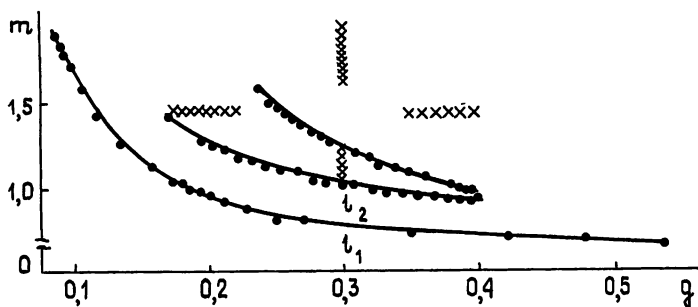


Рис. 1.

где  $\langle \text{Sp } M \rangle$  — среднее по аттрактору значение следа матрицы линеаризованного преобразования (4),  $\langle \lambda^+ \rangle$ ,  $\langle \lambda^- \rangle$  — средние положительный и отрицательный ляпуновские показатели, третий показатель — нулевой [12]. Положительный показатель  $\langle \lambda^+ \rangle$  вычисляется через энтропию Колмогорова с применением алгоритма усреднения Беннетина [13]. Для вычисления  $\langle \lambda^- \rangle$  из (7) и (4) получаем

$$|\langle \lambda^- \rangle| = |m - \langle z \rangle - g| + \langle \lambda^+ \rangle = |\langle \text{Sp } M \rangle| + \langle \lambda^+ \rangle, \quad (8)$$

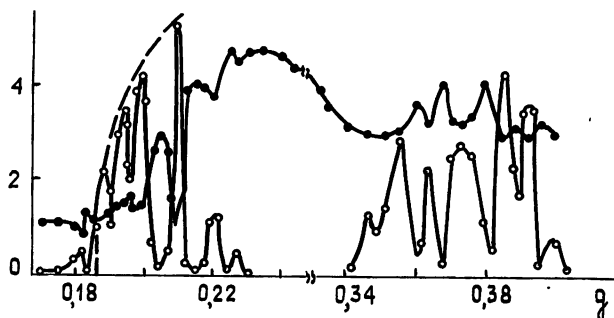


Рис. 2.

откуда для фрактальной размерности  $D$  [14] исследуемой системы имеем

$$D = 2 + d, \quad d = \frac{\langle \lambda^+ \rangle}{|\langle \lambda^- \rangle|} = \frac{\langle \lambda^+ \rangle}{|m - g - \langle z \rangle| + \langle \lambda^+ \rangle}, \quad (9)$$

где  $d$  — дробная часть размерности  $D$ ,  $\langle z \rangle$  — среднее по аттрактору значение переменной  $z$ , которое вычислялось в предположении стациона-

нарности и эргодичности процесса путем усреднения по времени вдоль одной реализации. Программа была проверена на системе Лоренца для  $r = 40$ ,  $\sigma = 16$ ,  $b = 4$ , и получены аналогичные [12, 13] результаты.

На рис. 1 крестиками отмечены точки, в которых  $\langle \lambda^+ \rangle \neq 0$  вдоль прямых  $m = 1,45$  и  $g = 0,3$ . При движении вдоль указанных прямых мы имеем последовательно две зоны стохастичности как по  $m$ , так и по  $g$ . Для иллюстрации на рис. 2 приведены зависимости  $\langle \lambda^+ \rangle$  (светлые кружки) и  $|\langle \lambda^- \rangle|$  (темные кружки) от параметра  $g$  при  $m = 1,45$ . Появлению стохастичности в первой зоне соответствует значение  $g = 0,175$ , что несколько меньше, чем  $g_{кр}$  по табл. 1. Аналогичные результаты были получены при движении по параметру  $m$  для  $g = 0,3$ . Появление отличного от нуля  $\langle \lambda^+ \rangle$  фиксировалось при  $m = 1,074$ , что также меньше, чем приведенное в табл. 1. Таким образом, критические значения параметров по результатам вычисления  $\langle \lambda^+ \rangle$  несколько занижены по сравнению с предсказываемыми на основе закона Фейгенбаума, что, как показали специальные расчеты, объясняется конечностью времени усреднения, которое составляло  $\approx 10^3$ . Могут быть и более тонкие причины указанного расхождения [14].

Результаты рис. 2 весьма характерны для квазигиперболических аттракторов: зависимость  $\langle \lambda^+ \rangle$  от параметра заметно «скачет» ввиду того, что проявляются узкие зоны притяжения многотактных циклов в связи с чем  $|\langle \lambda^- \rangle|$  изменяется как бы «в противофазе» с  $\langle \lambda^+ \rangle$ . Расчеты показали, что рост  $\langle \lambda^+ \rangle$  с превышением над порогом критичности подчиняется известной закономерности  $\langle \lambda^+ \rangle = C(g - g_{кр})^\gamma$ , которая для исследованного семейства имеет вид

$$\langle \lambda^+ \rangle = 0,395 (g - 0,185)^\gamma, \quad \gamma = \ln 2 / \ln 4,669 \approx 0,45. \quad (10)$$

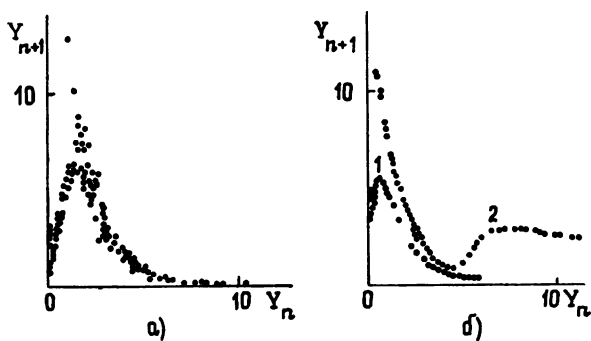


Рис. 3.

Результаты аппроксимации (10) нанесены на рис. 2 пунктиром.

Анализируя поведение системы на плоскости параметров, можно выделить в качестве основного увеличение положительного ляпуновского показателя  $\langle \lambda^+ \rangle$  и дробной части размерности  $d$  с уменьшением  $g$  и ростом  $m$ . В точке плоскости параметров  $m = 1,45$ ,  $g = 0,21$ , принадлежащей первой зоне СА,  $\langle \lambda^+ \rangle = 0,074$ ,  $d = 0,345$ . В другой точке той же зоны  $m = 1,16$ ,  $g = 0,30$  —  $\langle \lambda^+ \rangle = 0,043$ ,  $d = 0,205$ . Качественно картина повторяется и во второй зоне СА. Отрицательный показатель  $|\langle \lambda^- \rangle|$  увеличивается с ростом  $g$  (рис. 2) и приводит к уменьшению  $d$ . В соответствии с критерием, предложенным в [14], отображение, которое можно сопоставить системе, при этом должно стремиться к одномерному. В связи с этим проанализируем характер модельного отображения системы (4) в различных точках плоскости

параметров системы. Модельное отображение  $Y_{n+1} = \varphi(Y_n)$  вычислялось путем введения секущей плоскости  $x = 0$  в соответствии с методом Лоренца [2].

Исследование отображений в зависимости от  $m$  и  $g$  позволило установить следующую закономерность. В области  $g < 0,15$ ,  $m > 1,7$  отображение системы существенно неоднородно. Как видно из рис. 3а, отображение для  $m = 2,55$ ,  $g = 0,097$  содержит два характерных семейства кривых одновременно. Одно представляет собой ряд вложенных друг в друга отображений с одним максимумом, другое — состоит из монотонно спадающих неограниченных функций. Число точек во втором семействе, характеризующем наличие выбросов в реализации  $y(\tau)$ , заметно меньше, чем в первом. Анализ временных реализаций показал, что первому семейству соответствует стохастическая модуляция амплитуды базового колебания периода  $T_0 \approx 2\pi$ , на которую накладываются следующие заметно реже выбросы, обуславливающие наличие второго семейства кривых в отображении и резко уменьшающие время корреляции. При движении в область увеличения  $g$  и уменьшения  $m$  отображение приближается к одномерному, однако качественно отличается для первой и второй зон СА, что видно из рис. 3б (кривая 1 соответствует первой зоне при  $m = 1,16$ ,  $g = 0,3$ , кривая 2 соответствует второй зоне при  $m = 1,45$ ,  $g = 0,39$ ). В первой зоне сформировалось одномерное отображение из первого семейства с одним гладким максимумом, во второй — несколько видоизмененное отображение на основе второго семейства, имеющее минимум. В обоих случаях  $d \ll 1$ , что подтверждает обоснованность критерия, предложенного в [14].

**4. Статистические характеристики странного аттрактора системы.** Проблема стохастического поведения нелинейных детерминированных систем привлекает сейчас все больше специалистов, однако строгая статистическая теория СА находится пока в стадии создания [1, 15–17, 20, 21]. К описанию автостохастических систем можно применить метод уравнений Фоккера—Планка. Информация о чисто динамической стохастичности должна следовать из решения указанного уравнения в предельном случае стремления к нулю интенсивности внешних источников флуктуаций. Подобные задачи сложны уже в одномерных системах [21], и эта сложность естественно возрастает при анализе многомерных систем. В рамках настоящей работы мы ограничимся статистическим анализом реализаций автономной системы (4), которые на основе физических и численных [20] экспериментов будем рассматривать в качестве реализаций стационарного эргодического процесса (чем мы уже воспользовались при вычислении ляпуновских показателей).

В указанных предположениях были рассчитаны функция распределения  $P(x)$ , нормированная автокорреляционная функция  $\psi(\Delta\tau)$  и спектральная плотность энергии  $S(f)$  процесса  $x(\tau)$  в характерных областях параметров системы. Интересно проанализировать статистические характеристики в первой и второй зонах СА и их эволюцию с ростом фрактальной размерности. На рис. 4–6 представлены функции  $P(x)$ ,  $|\psi(\Delta\tau)|$  и  $S(f)$  процесса (спектр в логарифмическом масштабе). Цифры 1 и 2 на графиках соответствуют первой ( $m = 1,16$ ,  $g = 0,3$ ) и второй ( $m = 1,45$ ,  $g = 0,39$ ) зонам СА. Анализируя результаты в общем, отметим, что для  $g \geq 0,3$  функция распределения близка к нормальной,  $\psi(\Delta\tau)$  представляет собой квазипериодическую функцию периода  $\approx 2\pi$ , сгибающаяся которой относительно медленно спадает с ростом  $\Delta\tau$ , спектр  $S(f)$  непрерывен в широком диапазоне частот и имеет заметные выбросы вблизи частот  $n f_0 / 2$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) и основной максимум на резонансной частоте  $f_0$ . При переходе из первой во вторую зону СА функция распределения  $P(x)$  заметно уширяется, свидетельствуя об увеличении среднеквадратичного значения  $x^2$ , т. е. энергии колебательного про-

песса;  $\psi(\Delta\tau)$  хотя и остается квазипериодической, но огибающая спадает несколько быстрее, характеризуя уменьшение времени корреляции; спектр  $S(f)$  становится заметно шире, отражая увеличение общей энергии процесса.

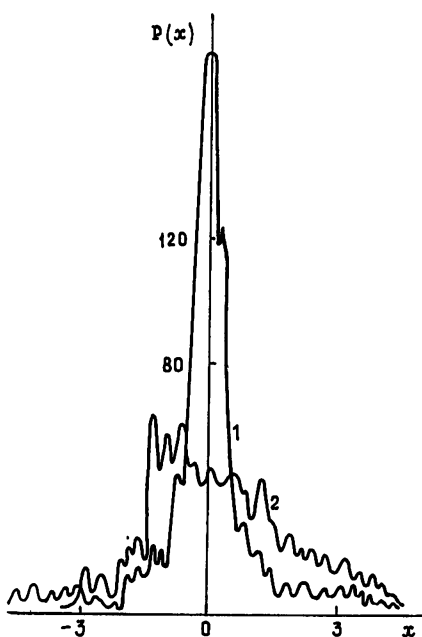


Рис. 4.

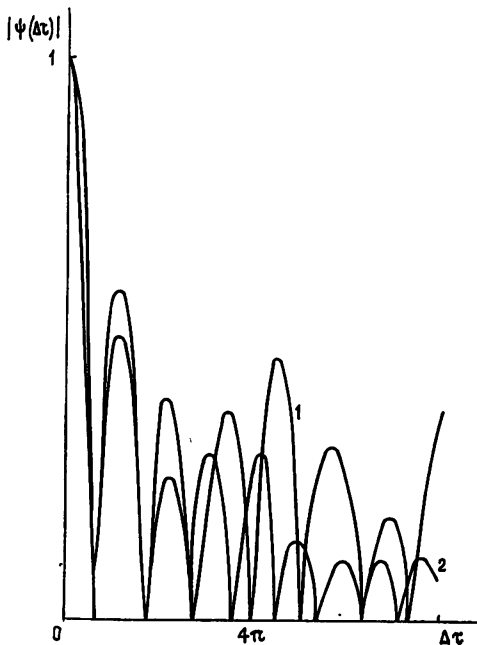


Рис. 5.

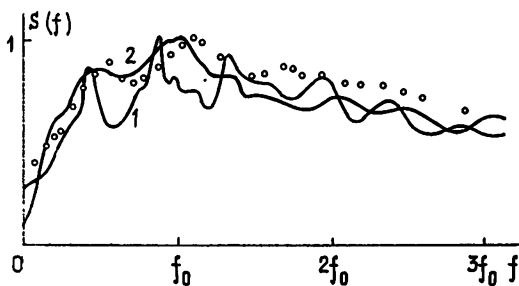


Рис. 6.



Рис. 7.

Исследование статистических характеристик процесса  $x(\tau)$  при движении в область параметров с большей фрактальной размерностью СА показало, что функция распределения заметно уширяется;  $\psi(\Delta\tau)$  перестает быть квазипериодической и приближается по виду к  $\delta$ -функции; естественно растет ширина спектра  $S(f)$ , который становится более равномерным. Отмеченные закономерности в равной степени относятся к первой и второй зонам СА. В качестве примера на рис. 7 представлен график  $|\psi(\Delta\tau)|$  для значений параметров  $m=2,55$ ,  $g=0,097$ , который наглядно иллюстрирует вышесказанное.

**5. Исследование динамики процессов на физической модели генератора.** Экспериментально исследовался автогенератор с инерционной нелинейностью, динамика которого описывается уравнениями (4). Измерения производились в диапазоне частот  $\sim 10$  кГц с целью исключения влияния помех, неизбежных при работе на высоких частотах. Экспе-

риментальные исследования качественно подтвердили установленные численно закономерности, однако бифуркационные значения параметров были отличны от рассчитанных. Для систем с сосредоточенными параметрами естественно ожидать не только качественного, но и количественного соответствия при адекватности математической и физической моделей. Детальные исследования по выяснению причин расхождения результатов выявили, что в реальной модели функция  $f(x)$  несколько отлична от теоретически предполагаемой (3). В модели генератора изменение  $f(x)$  обеспечивалось вариацией анодного напряжения триода инерционного каскада, описываемого третьим уравнением системы (4). На рис. 8 приведены экспериментальные результаты измерения бифуркационных значений параметра  $m$  при фиксированном  $g=0,3$  для различных значений указанного напряжения  $U_a$ . Линии  $l_1, l_2, l_3$  соответствуют первым трем бифуркациям удвоения,  $l_{кр}$  — линия критических значений  $m$ , соответствующая возникновению СА1. СА1 и СА2 — первая и вторая области стохастичности, в промежутке между ними в эксперименте наблюдались циклы на базе удвоения периода  $3T_0$ . С ростом  $U_a$ , что соответствует увеличению крутизны  $f(x)$ , бифуркационные значения  $m_i$ , как видно из рис. 8, монотонно уменьшаются, хотя качественных изменений в последовательности бифуркаций не наблюдается. При напряжении  $U_a=120 В$  измеренные значения достаточно хорошо совпали с рассчитанными. Экспериментальные данные приведены в последнем столбце табл. 1. Бифуркационное значение  $m_4$ , соответствующее появлению 16-тактного цикла, точно зафиксировать не удалось ввиду неустойчивости системы за счет шумов. Фиксировался лишь интервал значений  $1,075 < m_4 < 1,085$ , в котором существуют циклы периода  $\geq 16T_0$ , но еще нет развитой стохастичности. Для  $U_a=120 В$  экспериментально снималась характеристика  $f(x)$  инерционного каскада, которая в пределах точности измерений хорошо соответствует аппроксимации (3).

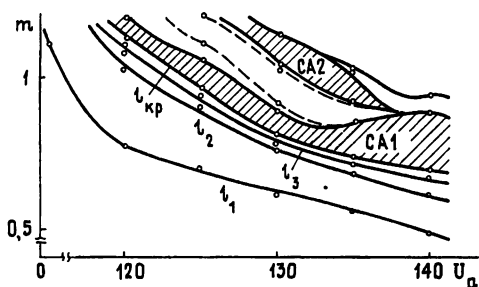


Рис. 8.

Таким образом, универсальная закономерность Фейгенбаума, подтвержденная численным экспериментом, убедительно проявляется и в физическом эксперименте. Грубость системы по отношению к виду функции  $f(x)$  была проверена численно заданием в уравнении (4)  $f(x) = \exp(x - 1)$ . Качественно характер бифуркационных явлений не изменился, и это существенно облегчает задачу аналитических исследований, так как в последнем случае производные  $f(x)$  не терпят разрыва в отличие от (3).

С целью сопоставления экспериментальных и расчетных данных по статистическим свойствам СА системы (4) измерялся спектр процесса в первой зоне СА при  $g=0,3$  с помощью селективного вольтметра В6-2. Результаты (в логарифмическом масштабе) представлены на рис. 6 кружочками и находятся в хорошем соответствии с теоретическими.

В результате численного и физического экспериментов по исследованию динамики процессов в генераторе с инерционной нелинейностью установлено, что бифуркационные явления в предстохастическом режиме на плоскости параметров системы (4)  $m$  и  $g$  подчиняются закону Фейгенбаума. Критические значения параметров, рассчитанные с использованием этого закона и путем вычисления положительного ляпу-

новского показателя, удовлетворительно согласуются. Результаты расчета бифуркационных значений параметра  $m_i$  для первых трех бифуркаций удвоения подтверждены экспериментально на физической модели генератора. Численно подтверждена справедливость критерия сведения многомерной системы к одномерному отображению, заключающегося в требовании малости дробной части фрактальной размерности СА по сравнению с единицей [14]. Проведен анализ статистических характеристик системы в первой и второй зонах стохастичности.

В заключение авторы выражают благодарность А. И. Хибнику и Ю. А. Кузнецову за предоставление и помощь при отладке программы [11] и проведение расчетов бифуркационных линий удвоения в НИВЦ АН СССР, а также С. П. Кузнецову за внимание к работе и полезные дискуссии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И.—УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
2. Странные аттракторы. Сб. статей под ред. А. П. Шильникова и Я. Г. Синая.— М., 1981.
3. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем.— М., 1969.
4. Пиковский А. С., Рабинович М. И.—ДАН СССР, 1978, 239, № 2, с. 301.
5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения.— М., 1980, гл. 4В.
6. Ланда П. С. Автоколебания в системах с конечным числом степеней свободы.— М., 1980.
7. Анищенко В. С., Астахов В. В., Летчфорд Т. Е.—Радиотехника и электроника, 1982, № 10, с. 1972
8. Анищенко В. С. Тезисы докладов 9-й Международной конференции по нелинейным колебаниям.— Киев, 1981, с. 35.
9. Feigenbaum M.—J. Stat. Phys., 1978, 19, p. 25.
10. Синай Я. Г.—В сб.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность.— Горький: ИПФ АН СССР, 1980.
11. Хибник А. И. Периодические решения систем и дифференциальных уравнений.— Пушино, ОНТИ, НЦБИ, 1979.
12. Shimada J, Nagashima T.—Progr. Theor. Phys., 1979, 61, № 6, p. 1605.
13. Benettin G, Galgani L, Strelcyn J.-M.—Phys. Rev., 1976, 14, № 6, p. 2338.
14. Израйлев Ф. М., Рабинович М. И., Угодников А. Д. Препринт ИПФ АН СССР № 17.— Горький, 1981.
15. Бунимович Л. А., Синай Я. Г.— В сб.: Нелинейные волны.— М., 1979, с. 212.
16. Стратонович Р. Л.— Изв вузов — Радиофизика, 1980, 23, № 8, с. 942.
17. Климонтович Ю. Л. Кинетическая теория электромагнитных процессов.— М., 1980, гл. 4.
18. Андрейчиков И. П., Петровская Н. В., Юдович В. И. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 3485-80. Деп. от 1 июля 1980 г.
19. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Статья депонирована в ВИНТИ, рег. № 3690-80. Деп. от 27 сентября 1980 г.
20. Kpobloch E.—J. Stat. Phys., 1979, 20, № 6, p. 695.
21. Пиковский А. С.—Препринт ИПФ АН СССР № 39.— Горький, 1981.

Саратовский государственный университет

Поступила в редакцию  
20 апреля 1982 г.

#### BIFURCATIONS IN THREE-DIMENSIONAL TWO-PARAMETRIC AUTONOMOUS OSCILLATING SYSTEM WITH A STRANGE ATTRACTOR

V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, T. E. Letchford, M. A. Safonova

It is shown numerically and by a physical model that the Feigenbaum's law is fulfilled in a three-dimensional system with two parameters. The statistical properties of the strange attractor have been analysed and the concrete conditions are defined for the description of three-dimensional system by one-dimensional reflection.