

УДК 550.383

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ И ТРАНСФОРМАЦИЯ КОРОТКИХ РАДИОВОЛН В МАГНИТОСФЕРНЫХ ВОЛНОВОДАХ

*Н. Д. Борисов*

Проведено исследование распространения и линейной трансформации коротких радиоволн в магнитосферных волноводах. Показано, что процесс трансформации может определять время жизни волны в магнитосферном резонаторе.

В ряде работ исследуется возможность магнитосферного распространения коротких радиоволн [1-3]. В [2], в частности, подробно обсуждаются условия, которым должны удовлетворять магнитосферные каналы, способные удерживать высокочастотные волны вдоль силовых линий магнитного поля. В настоящей работе в холодноплазменном приближении изучается процесс линейной трансформации, возникающий в магнитосферном резонаторе в области отражения волны от ионосферы.

Рассмотрим модель плоского волнового канала, вытянутого вдоль оси  $z$ . Положим, что концентрация плазмы  $N(\mathbf{r})$  в каждом сечении  $z = \text{const}$  имеет локальный минимум при  $y=0$ , достаточный для удержания волн. Будем считать также, что концентрация меняется не только вдоль  $y$ , но адиабатически медленно нарастает вдоль оси  $z$ , т. е.  $N = N(y, z)$ . При этом распространяющаяся в канале волна не выходит из канала, а отражается обратно при некотором значении  $z$ . Поскольку поперечный масштаб неоднородности плазмы  $L_y$  для высокочастотных магнитосферных каналов значительно меньше продольного  $L_z$  [2], в низшем приближении по  $L_y/L_z$  можно считать, что градиент плотности ортогонален оси волновода. Отметим, что рассматриваемые каналы в магнитосфере вытянуты вдоль магнитного поля. Однако вблизи земли ось канала может составлять некоторый угол  $\delta\theta$  с направлением магнитного поля.

Исследуемый в работе процесс трансформации достаточно эффективен, если точка пересечения двух ветвей лежит вблизи области распространения основной волны. Такая ситуация, как показано ниже, возникает в окрестности отражения обыкновенной волны от ионосферы. При этом эффект существенно зависит от величины угла между направлением оси волновода и магнитным полем.

### 1. СЛУЧАЙ СОВПАДЕНИЯ ОСИ ВОЛНОВОДА С НАПРАВЛЕНИЕМ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

Рассмотрим вначале случай, когда ось  $z$  канала строго совпадает с направлением магнитного поля Земли. Тогда уравнение, определяющее в ВКБ приближении поперечное волновое число, сводится к биквадратному [4]:

$$\epsilon_{11}(K_y/K_0)^4 - [\Delta\epsilon(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + \epsilon_{12}^2](K_y/K_0)^2 + \epsilon_{33}[(\Delta\epsilon)^2 + \epsilon_{12}^2] = 0. \quad (1)$$

Здесь  $K_0 = \omega/c$ ,  $\epsilon_{11} = 1 - v(1 - u)^{-1}$ ,  $\epsilon_{33} = 1 - v$ ,  $\epsilon_{12}^2 = -v^2 u(1 - u)^{-2}$ ,  $v = \omega_{pe}^2/\omega^2$ ,  $u = \omega_{He}^2/\omega^2$ ,  $\omega_{pe}$ ,  $\omega_{He}$  — плазменная и гирочастота электронов,  $\omega$  — частота волны,  $\Delta\epsilon = \epsilon_{33} - K_z^2/K_0^2$ . Параметр  $u$  в дальнейшем будем считать малым,  $u \ll 1$ , во всех сечениях канала. В (1) не учитывается частота столкновения электронов с тяжелыми частицами  $\nu_e$ , так как выше максимума  $F$ -слоя для коротких волн  $\nu_e/\omega \ll 1$ . В приэкваториальной области магнитосферы концентрация плазмы мала,  $v \ll 1$ , и уравнение (1) распадается на два, описывающих независимое квазипродольное распространение двух типов волн — обыкновенной и необыкновенной [2, 4],

$$(K_y/K_0)^2 = 1 - v(1 \pm \sqrt{u})^{-1} - K_z^2/K_0^2. \quad (2)$$

Считая, что свойства волновода адиабатически медленно меняются вдоль оси  $z$ , продольное волновое число  $K_z(z)$  для  $n$ -моды при  $n \gg 1$  найдем с помощью условия квантования [5, 6]

$$K_0 \int_{y_1}^{y_2} \left[ 1 - \frac{v}{1 \pm \sqrt{u}} - \frac{K_z^2}{K_0^2} \right]^{1/2} dy = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad (3)$$

где  $y_{1,2}$  — точки поворота.

Используя модель параболического волновода

$$v(y, z) = v_0(z) + y^2/L_y^2, \quad (4)$$

получим с помощью (3)

$$\left( \frac{K_z}{K_0} \right)_n^2 = 1 - \frac{v_0(z)}{1 \pm \sqrt{u}} - \frac{2n + 1}{K_0 L_y} \left( 1 \mp \frac{\sqrt{u}}{2} \right), \quad (5)$$

где знаки  $\pm$  отвечают соответственно обыкновенной и необыкновенной волнам. В каждом сечении канала отражение волны, т. е. обращение  $K_y$  в нуль, происходит при  $v$ , равном  $v^* = (1 - K_z^2/K_0^2)(1 \pm \sqrt{u})$ , что для модели (4) составляет

$$v^* = v_0(z) + (2n + 1)K_0^{-1}L_y^{-1}(1 \pm \sqrt{u}/2). \quad (6)$$

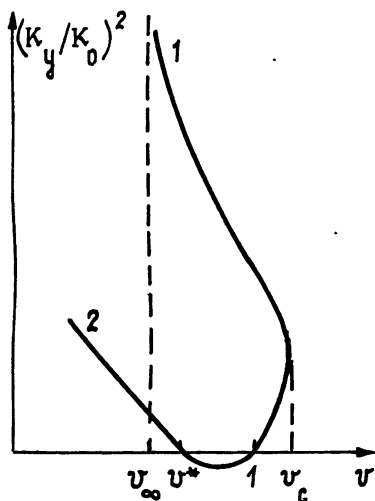


Рис 1.

Пусть в канале распространяется волна обыкновенной поляризации. С ростом плотности плазмы  $N(r)$  точка  $v^*$ , согласно (6), приближается к  $v=1$ . При этом картина независимого распространения волн нарушается. В области  $v \approx 1$  вместо (2) необходимо использовать общее уравнение (1). Рассмотрим этот случай более подробно, полагая, что точка  $v^*$  лежит в диапазоне  $1 - u \leq v^* < 1$ . Поведение кривых  $(K_y/K_0)^2$  как функции параметра  $v$  при  $v \sim 1$  приведено на рис. 1. Вертикальная пунктирная прямая, проходящая через точку  $v_\infty = 1 - u$ , соответствует обращению в нуль компоненты тензора  $\epsilon_{11}$ . Кривая 1, уходящая в бесконечность при  $v_\infty$  и расположенная между точками  $v_\infty$  и  $v_c$ , представляет собой необыкновенную ветвь (так на-

зывается  $z$ -моду). Точка  $v_0$  отвечает слиянию корней биквадратного уравнения (1). Нижняя кривая 2 есть обыкновенная ветвь. Видно, что для нее существует область непрозрачности (в геометрооптическом приближении) между точками  $v^*$  и  $v=1$ . Когда эти точки лежат близко друг к другу,  $1 - v^* \leq u$ , волновое число  $K_y/K_0$  при  $v \approx 1$  достаточно мало,  $K_y/K_0 \ll 1$ , и может быть найдено из уравнения (1), если пренебречь в последнем членом  $\epsilon_{11}(K_y/K_0)^4$ :

$$\left(\frac{K_y}{K_0}\right)^2 = \frac{\epsilon_{33} [(\Delta\epsilon)^2 + \epsilon_{12}^2]}{\Delta\epsilon(\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + \epsilon_{12}^2} \approx (1 - v) \left(1 - \frac{v}{1 + \sqrt{u}} - \frac{K_z^2}{K_0^2}\right) \frac{2}{\sqrt{u}}. \quad (7)$$

Используя (7) для модели параболического волновода (4), найдем квадрат продольного волнового числа:

$$(K_z/K_0)^2 = \sqrt{u} - u + a(z) - u^{1/4}(2a)^{-1/2} K_0^{-1} L_y^{-1} (2n + 1), \quad (8)$$

где  $a(z) = 1 - v_0(z)$  и точка поворота  $v^*$  в сечении волновода

$$v^* = \left(1 - \frac{K_z^2}{K_0^2}\right) (1 + \sqrt{u}) = 1 - a(z) + \frac{u^{1/4}}{(2a)^{1/2} K_0 L_y} (2n + 1). \quad (9)$$

Выражения (8), (9) справедливы при не слишком малых  $a(z)$ ,

$$a(z) > (u/4)^{1/6} [(2n + 1) K_0^{-1} L_y^{-1}]^{2/3}, \quad (10)$$

когда точки поворота для  $K_y$  определяются вторым множителем в (7). Исчезновение барьера, т. е. слияние точек  $v^*$  и  $v=1$  для  $n$ -моды, возникает, если

$$a(z) = a_0 = (u/4)^{1/6} [(2n + 1) K_0^{-1} L_y^{-1}]^{2/3}. \quad (11)$$

Полученные результаты позволяют оценить количество мод, которые могут удерживаться в волноводе. Согласно (9) для существования  $n$ -моды вблизи  $v=1$  требуется перепад концентрации

$$\delta N/N \approx (1/2) u^{1/4} a^{-1/2} (2n + 1) K_0^{-1} L_y^{-1}, \quad (12)$$

что составляет для  $n=5$ ,  $L_y=10$  км,  $K_0=2 \cdot 10^2$  км<sup>-1</sup> величину  $\delta N/N \approx 5\%$ . Для больших номеров  $n$  необходимы весьма значительные  $\delta N/N$ . Если условие (12) не выполняется, то волна покидает канал и уходит в сторону от него.

Отметим, что мы использовали ВКБ приближение, которое справедливо, если  $K_y/K_0$  не слишком мало. В частности, оно не работает, когда  $v^*$  стремится к точке  $v=1$  и проницаемость барьера растет. Анализ точных уравнений, проведенный в конце работы, показывает, что выражение (7) можно применять, пока

$$1 \gg (K_y/K_0)^2 \gg 4a(\sqrt{u} - K_z^2/K_0^2)^{-2} (K_0 L_y)^{-2}. \quad (13)$$

Процесс отражения волны по оси  $z$  в адиабатическом приближении также можно описывать с помощью уравнения (7). В случае  $K_z^2/K_0^2 < u^{1/2}$  точки поворота  $y_{1,2}$  определяются первым множителем в (7). Для модели параболического волновода нетрудно найти в этом случае

$$K_z^2/K_0^2 \simeq u^{1/2} - (1/2) u^{1/2} a^{-2} (2n + 1)^2 (K_0 L_y)^{-2}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что волна отражается от ионосферы при  $a=1 - v_0 = (2n + 1)/2^{1/2} K_0 L_y$ , что для реальных параметров  $L_y=10$  км,  $K_0 =$

$= 2 \cdot 10^2 \text{ км}^{-1}$  составляет очень малую величину:  $a \simeq 10^{-3} \div 10^{-2}$ . Таким образом, отражение обыкновенной волны по оси  $z$  происходит вблизи  $v_0=1$ .

Выше отмечалось, что при сближении точек  $v^*$  и  $v=1$  барьер становится все более проницаемым. Выясним, какая часть энергии волны, распространяющейся в волноводе, теряется при этом из-за просачивания. Проницаемость барьера  $P$ , равная

$$P = \exp \left( -2 \int_{y_1}^{y_2} |K_y| dy \right), \quad (15)$$

при малом расстоянии между точками  $y_2$  и  $y_1$  имеет вид

$$P = \exp \left[ -\pi a^2 K_0 L_y 2^{-5/2} u^{-1/4} (a/a_1 - 1)^2 \right], \quad (16)$$

где  $a_1(z) = a + \sqrt{u} - K_z^2/K_0^2$ . Эффект ослабления волны в канале при распространении вдоль оси  $z$  можно учесть с помощью мнимой добавки  $i\delta K_z$  к продольному волновому числу. Тогда приходим к условию квантования [7]

$$\text{ctg} \left[ K_0 \frac{2^{1/2}}{u^{1/4}} \int_{y_1}^{y_2} \left( a - \frac{y^2}{L_y^2} \right)^{1/2} \left( a + \sqrt{u} - \frac{K_z^2}{K_0^2} - \frac{y^2}{L_y^2} \right)^{1/2} dy \right] = i \frac{P}{4}. \quad (17)$$

Из (17) нетрудно найти приближенное значение  $\delta K_z/K_0$ :

$$\delta K_z/K_0 = P (1/4\pi)(2a)^{-1/2} (K_0 L_y)^{-1} u^{1/4} (u^{1/4} + a/2)^{-1}. \quad (18)$$

Выражение (18) справедливо в случае, когда  $\delta K_z/K_0 \ll a/u^{1/4}$  и, кроме того, проницаемость барьера  $P$  мала,  $P < 1$ . Полное ослабление волны в процессе ее отражения от конца волновода есть

$$Q \simeq \exp \left( -2 \int \delta K_z dz \right) = \exp \left[ -(1/4\pi) \int P(z) dz (2a)^{-1/2} L_y^{-1/2} \right]. \quad (19)$$

В реальных условиях при нахождении  $Q$  основной вклад в (19) дает область вблизи точки исчезновения барьера  $a_1=a$ . В этом случае нетрудно провести приближенное интегрирование в (19), в результате чего находим

$$Q = \exp \left[ -u^{1/8} \pi^{-1} 2^{-1/4} (2a)^{-3/2} (K_0 L_y)^{-3/2} L_y^{-1} \left| \frac{d}{dz} (a/a_1) \right|^{-1} \right]. \quad (20)$$

Оценки с помощью формулы (20) показывают, что ослабление волны должно быть заметным:  $Q \ll 1$  при  $L_y \simeq 10 \text{ км}$ ,  $L_z = 3 \cdot 10^2 \text{ км}$ .

Обсудим теперь, что происходит с волной, которая просачивается через барьер. Область  $1 < v < v_c$ , согласно рис. 1, является прозрачной, так что волна распространяется в направлении увеличения концентрации плазмы. Найдем положение точки  $v_c$ , которая определяется из условия слияния корней биквадратного уравнения (1):

$$[(\Delta \epsilon (\epsilon_{11} + \epsilon_{33}) + \epsilon_{12}^2)/2\epsilon_{11}]^2 = (\epsilon_{33}/\epsilon_{11}) [(\Delta \epsilon)^2 + \epsilon_{12}^2]. \quad (21)$$

В предельном случае исчезновения барьера, т. е. при  $K_z^2/K_0^2 = \sqrt{u}$ , имеем из (21) приближенное значение  $v_c$ :

$$v_c \simeq 1 + 0,25 \sqrt{u}. \quad (22)$$

В точке  $v_c$  происходит полная трансформация обыкновенной волны в  $z$ -моду. Подобное явление в диапазоне ОНЧ волн подробно исследовано в работе [8]. Ввиду аналогии эффектов мы лишь кратко рассмот-

рим этот вопрос. Нетрудно проверить, что при  $v > v_c$  решения уравнения (1) становятся комплексными. Найдем методом фазовых интегралов связь между различными решениями в окрестности точки  $v = v_c$  в виде  $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2 = \Psi_3$ . Здесь  $\Psi_1$  отвечает обыкновенной волне, распространяющейся к точке  $v = v_c$ ,  $\Psi_2$  соответствует  $z$ -моду (отраженная волна), а  $\Psi_3$  — затухающей при  $v \rightarrow \infty$  волне. У всех трех волн зависимость от координаты  $z$  одинаковая:  $\exp\left(i \int K_z dz\right)$ . Используя ВКБ приближение для  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  и обходя особую точку  $v_c$  в комплексной области, можно, так же как в [8], убедиться, что  $|c_2/c_1| = 1$ , т. е. трансформация оказывается полной.

## 2. ЛИНЕЙНАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ В КАНАЛЕ ПРИ $\delta\theta \neq 0$

Выше предполагалось, что градиент концентрации приближенно ортогонален магнитному полю. Если же ось волновода составляет некоторый угол  $\delta\theta$  с магнитным полем, то исходное уравнение для  $K_y/K_0$  становится полным уравнением четвертого порядка [4]. Нас в дальнейшем будет интересовать случай малых  $\delta\theta \ll 1$ . Выясним, как меняется при  $\delta\theta \neq 0$  проникаемость барьера для обыкновенной волны в случае  $v^* \approx 1$ . Считая, как и раньше, барьер слабым, ограничимся при  $(K_y/K_0)^2 \ll 1$  исследованием квадратного уравнения:

$$\begin{aligned} \left(\frac{K_y}{K_0}\right)^2 - 2\delta\theta \frac{v}{1-u} \frac{K_z}{K_0} \left(1 - \frac{K_z^2}{K_0^2}\right) \frac{K_y}{K_0} + \frac{\epsilon_{33}}{u} [(\Delta\epsilon)^2 + \epsilon_{12}^2] + \\ + (\delta\theta)^2 (K_z^2/K_0^2) \left(1 - K_z^2/K_0^2\right) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

При  $\delta\theta = 0$  уравнение (23) переходит в (7). Удерживая теперь члены  $\sim \delta\theta, (\delta\theta)^2$ , находим выражение для  $K_y/K_0$ :

$$\frac{K_y}{K_0} = \delta\theta \left(\frac{K_z}{K_0}\right) \pm \sqrt{-\frac{\epsilon_{33}}{u} [(\Delta\epsilon)^2 + \epsilon_{12}^2] - (\delta\theta)^2 \frac{K_z^4}{K_0^4}}. \quad (24)$$

Из (23) видно, что члены  $\sim (\delta\theta)^2$  создают дополнительный барьер, который мешает просачиваться волне. Этот барьер незначителен, если по порядку величины

$$(\delta\theta)^2 K_0 L_y u^{5/4} \ll 1. \quad (25)$$

Поскольку магнитосферные каналы для коротких радиоволн весьма узкие [2], параметр  $L_y$  достаточно мал:  $L_y \sim 10$  км, и условие (23) выполняется для более широкого диапазона углов  $\delta\theta \leq \delta\theta_0 = 10 \div 15^\circ$ , нежели для обычного эффекта «утраивания» при квазипродольном распространении [4]. С увеличением  $\delta\theta$  просачивание экспоненциально ослабевает. Рассмотренный эффект отличается от случая линейной трансформации при квазипродольном распространении тем, что просачивание и трансформация происходит вдоль координаты, ортогональной направлению движения волны, т. е. вдоль оси  $y$ .

## 3. ОЦЕНКА ПОПРАВОК К ВКБ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Выясним теперь, какие поправки к полученным выше результатам могут возникнуть при использовании более точных уравнений вблизи  $v = 1$ . Ограничимся, по-прежнему, моделью параболического волновода (4). Решение для компонент электрического поля волны будем искать в виде

$$E_i = \Psi_i(y, z) (K_z)^{-1/2} \exp\left(i \int K_z dz\right), \quad (26)$$

считая, что вдоль  $z$  условия применимости ВКБ приближения выполнены. Тогда, удерживая члены  $\sim d\varepsilon_{ij}/dy$ ,  $d^2\varepsilon_{ij}/dy^2$ , получим вместо (1)

$$\begin{aligned} & \{\varepsilon_{11}d^4/dy^4 + 2\varepsilon_{12}(d/dy)(\varepsilon_{11}/\varepsilon_{12})(d^3/dy^3) + \\ & + [K_0^2(\varepsilon_{12}^2 + \Delta\varepsilon(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})) + \varepsilon_{12}d^2/dy^2(\varepsilon_{11}/\varepsilon_{12})]d^2/dy^2 + \\ & + 2\varepsilon_{12}K_0^2[d/dy(\varepsilon_{11}\Delta\varepsilon\varepsilon_{12}^{-1} + \varepsilon_{12})]d/dy + \\ & + K_0^4\varepsilon_{33}((\Delta\varepsilon)^2 + \varepsilon_{12}^2) + \varepsilon_{12}d^2/dy^2(\varepsilon_{11}\Delta\varepsilon\varepsilon_{12}^{-1} + \varepsilon_{12})\} \Psi = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Оставляя далее лишь наиболее существенные при  $K_0L_y \gg u^{-1}$  члены в (27), находим при  $v \approx 1$  с помощью замены  $\Psi = \tilde{\Psi} \exp[u^{-1/2} \int (dv/dy) dy]$ ,

$$\frac{d^2\tilde{\Psi}}{dy^2} + \left[ \frac{2K_0^2}{\sqrt{u}}(1-v) \left( 1 - \frac{v}{1+\sqrt{u}} - \frac{K_z^2}{K_0^2} \right) - \frac{1}{u} \left( \frac{dv}{dy} \right)^2 \right] \tilde{\Psi} = 0. \quad (28)$$

Волновое уравнение (28) позволяет более точно описать процесс просачивания через барьер, нежели (7). Оно, в частности, справедливо при  $K_z^2/K_0^2 = \sqrt{u}$ , когда проницаемость барьера становится значительной и нарушается ВКБ приближение по координате  $y$ . Таким образом, процесс трансформации, как показано выше, приводит к сильному ослаблению волны в запертом резонаторе. Это ослабление в реальных условиях значительно больше затухания, связанного со столкновительным поглощением [2]. Вследствие эффекта трансформации время жизни волны в запертом магнитосферном резонаторе может оказаться весьма малым — порядка одного периода колебаний.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Booker Н. G.— J. Geophys. Res., 1962, 67, № 1, p. 435.
2. Гуревич А. В.— Геомагнетизм и аэрономия, 1979, 19, № 3, с. 463.
3. Букин Г. В.— Геомагнетизм и аэрономия, 1981, 21, № 4, с. 554.
4. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
5. Гуревич А. В., Цедилина Е. Е. Сверхдальнее распространение коротких радиоволн.— М.: Наука, 1979.
6. Борисов Н. Д., Гуревич А. В.— Изв. вузов — Радиофизика, 1977, 20, № 5, с. 661.
7. Борисов Н. Д., Гуревич А. В.— В сб. Сверхдальнее распространение радиоволн и модели ионосферы.— М.: 1977, с. 104.
8. Карпман В. И., Кауфман Р. Н.— ЖЭТФ, 1981, 80, № 5, с. 1845.

Институт земного магнетизма, ионосферы  
и распространения радиоволн АН СССР

Поступила в редакцию  
10 июня 1982 г.

#### SHORT RADIO WAVE PROPAGATION AND TRANSFORMATION IN MAGNETOSPHERE CHANNELS

*N. D. Borisov*

Propagation and linear transformation of short radio waves in magnetospheric channels are considered. It is shown that process of transformation can determine life time of wave in magnetospheric resonator.