

УДК 523.035.31

## ОБ ОТРАЖАТЕЛЬНОЙ СПОСОБНОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ЭКРАНА

С. С. Виноградов

Получено строгое решение векторной задачи дифракции на идеально проводящей сфере с отверстием по методу работ [2, 7]. Дана корректная формулировка граничных условий для потенциалов Дебая, которые оказываются связанными между собой. Проведен расчет полного и обратного поперечного сечения рассеяния.

Хорошо известны результаты расчета полного  $\sigma$  и дифференциального  $\sigma_{\nu}$  (обратного или радиолокационного) сечений рассеяния для металлического шара и круглого диска [1]. Что же касается структуры, занимающей «промежуточное» положение между этими двумя, — незамкнутого сферического экрана (рис. 1), то здесь сколь-либо систематические расчеты отражающих свойств до настоящего времени проведены не были. Исключение составляют лишь работы [2, 3], в которых содержится несколько графиков зависимостей  $\sigma$  и  $\sigma_{\nu}$  от относительного волнового числа  $ka$  ( $k=2\pi/\lambda$  — волновое число,  $a$  — радиус сферы) при значении угла раствора сферы  $\theta_1=60; 90^\circ$ . Полученное нами в [2] строгое решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сфере с отверстием позволяет в значительной мере восполнить этот пробел. Отметим, что решение задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сфере с отверстием было получено также в [4]. Кроме того, решение родственной задачи о возбуждении сферического зеркала элементом Гюйгенса содержится в [5]. Несмотря на различные методов, использованных в [4, 5], их объединяет то, что они являются сугубо численными.

Метод, примененный нами для получения строгого решения обсуждаемой здесь задачи, можно отнести к разряду численно-аналитических методов. Он связан с проблемой построения обоснованного решения парных сумматорных уравнений, содержащих в общем случае присоединенные функции Лежандра  $P_n^m(\cos \theta)$ . Подход к решению этой проблемы был предложен в [6], а затем окончательно сформулирован нами в [7]. Метод интегрального уравнения Абея после регуляризации парных сумматорных уравнений, соответствующей выделению в исходном операторе задачи  $L=\Delta+k^2$  статической (сингулярной) и динамической (вполне непрерывной) части, в сочетании с методом полуобращения [8] позволяет свести задачу к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода относительно неизвестных коэффициентов в разложении поля по сферическим волновым функциям. Подобного рода системы удобны для численного (при произвольных значениях параметров  $ka$  и  $\theta_1$ ) и аналитического ( $ka < 1$ ,  $\theta_1$  — произвольно) исследования.

В данной работе, являющейся дальнейшим развитием [2], проведен расчет поперечников рассеяния  $\sigma$  и  $\sigma_{\nu}$  в диапазоне  $0 \leq ka \leq 10$  ( $\theta_1$  — произвольно).

# 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. КОРРЕКТНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЕБАЯ

Незамкнутый сферический экран в виде идеально проводящей сферы с круговым отверстием облучается полем плоской электромагнитной волны, направление распространения которой совпадает с осью симметрии экрана (рис. 1):

$$E_x = -H_y = \exp(ikz) = \exp(ikr \cos \theta) *$$

Поле плоской волны опишем при помощи электрического  $U^0$  и магнитного  $V^0$  потенциалов Дебая [9]:

$$\left. \begin{aligned} U^0 &= \cos \varphi \\ V^0 &= \sin \varphi \end{aligned} \right\} (ik^2 r)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

где  $A_n = i^n (2n + 1) n^{-1} (n + 1)^{-1}$ ,  $\psi_n(x) = (\pi x / 2)^{1/2} J_{n+1/2}(x)$  — сферические функции Бесселя в обозначениях Дебая,  $P_n^1(\cos \theta)$  — присоединенные функции Лежандра первого рода. Потенциалы Дебая рассеянного поля должны удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца

$$L\Phi = 0, \quad \Phi \equiv U, V, \quad L = \Delta + k^2, \quad (1)$$

соответствующим граничным условиям на поверхности экрана и условию непрерывности на его сферическом дополнении (корректная формулировка этих условий будет дана ниже). Кроме того, рассеянное поле в дальней зоне рассеивателя ( $kr \gg ka$ ,  $kr \rightarrow \infty$ ) должно вести себя подобно расходящейся сферической волне:

$$E_{\theta}^{sc} = H_{\varphi}^{sc} = r^{-1} \exp(ikr) S_1(\theta, \varphi), \quad (2)$$

$$H_{\theta}^{sc} = -E_{\varphi}^{sc} = r^{-1} \exp(ikr) S_2(\theta, \varphi),$$

где  $S_1(\theta, \varphi)$ ,  $S_2(\theta, \varphi)$  — диаграммы рассеяния в дальней зоне. Когда сферическая поверхность замкнута ( $\theta_1 = 0$ ), этих условий достаточно для однозначного определения решения во всем пространстве [10].

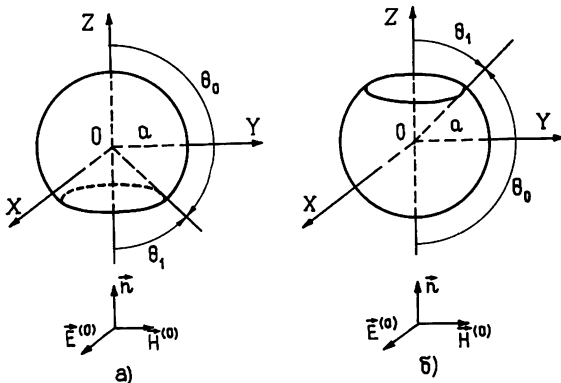


Рис. 1.

При разрыве граничного контура (появления отверстия в сфере) условия теоремы единственности, сформулированные выше, должны быть дополнены условием конечности энергии в любой ограниченной области пространства, включающей в том числе и ребро экрана [11].

\* Здесь и далее везде опущен временной множитель вида  $\exp(-i\omega t)$ .

В качестве такой области естественно выбрать в нашем случае шар радиуса  $a$ . Тогда последнее условие сводится к требованию ограниченности средней за период энергии, запасенной во внутренней области экрана:

$$\bar{W} = \frac{c}{4\pi} \int_V \{ |E|^2 + |H|^2 \} dv < \infty, \quad (3)$$

где  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$  — элемент объема в сферической системе координат.

Решение, удовлетворяющее (1) и (2), будем искать в областях « $i$ » ( $r < a$ ), « $e$ » ( $r > a$ ) в следующем виде:

$$U^i = (ik^2 r)^{-1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n^{(i)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

$$U^e = U^0 + (ik^2 r)^{-1} \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n^{(e)} \zeta_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

$$V^i = (ik^2 r)^{-1} \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n^{(i)} \psi_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

$$V^e = V^0 + (ik^2 r)^{-1} \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n^{(e)} \zeta_n(kr) P_n^1(\cos \theta),$$

где  $\zeta_n(x) = (\pi x/2)^{1/2} H_{n+1/2}^{(1)}(x)$ ,  $\{x_n^{(i, e)}\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n^{(i, e)}\}_{n=1}^{\infty}$  — бесконечные последовательности амплитудных коэффициентов, нуждающихся в определении. Граничные условия для электромагнитного поля на поверхности сферы  $r=a$  имеют вид (см. рис. 1а)

$$[e_r, E^{(i)}] = [e_r, E^{(e)}] = 0, \quad \theta \in (0, \theta_0); \quad (4)$$

$$[e_r, H^{(i)}] = [e_r, H^{(e)}], \quad \theta \in (\theta_0, \pi), \quad (5)$$

где  $e_r$  — единичный вектор в радиальном направлении, совпадающий с внешней нормалью к поверхности экрана. Используя дифференциальную связь электромагнитного поля с потенциалами Дебая [9], получим, например, для (4) пару дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta) + \frac{i}{\sin \theta} g(\theta) = 0, \quad \frac{1}{\sin \theta} f(\theta) + i \frac{d}{d\theta} g(\theta) = 0, \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (6)$$

эквивалентных дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции  $F(\theta) \equiv \{f(\theta), g(\theta)\}$ :

$$\frac{1}{\sin \theta} F(\theta) - \frac{d}{d\theta} \left[ \sin \theta \frac{d}{d\theta} F(\theta) \right] = 0, \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (7)$$

где

$$a \cos \varphi f(\theta) = \frac{d}{dr} [r U^{(i, e)}] \Big|_{r=a}, \quad \frac{\sin \varphi}{k} g(\theta) = V^{(i, e)} \Big|_{r=a}.$$

Нетрудно заметить, что (7) совпадает с дифференциальным уравнением для  $P_0^1(\cos \theta)$ .

Решение (7) имеет простой вид:

$$f(\theta) = B_1 \operatorname{tg}(\theta/2) + B_2 \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad g(\theta) = D_1 \operatorname{tg}(\theta/2) + D_2 \operatorname{ctg}(\theta/2),$$

где  $B_i, D_i$  ( $i = 1, 2$ ) — произвольные постоянные.

Условие ограниченности решения снимает произвол в определении  $B_2$  и  $D_2$  ( $B_2 = D_2 \equiv 0$ ), а связь граничных условий для потенциалов Дебая (6) приводит к связи постоянных  $B_1$  и  $D_1$  ( $D_1 = iB_1$ ).

Таким образом, в случае неполной сферической поверхности граничные условия оказываются связанными между собой. Их разделение происходит с точностью до константы связи ( $B_1$  в данном случае). Для замкнутой идеально проводящей сферы ( $\theta_0 = \pi$ ) из условия ограниченности решения также следует  $B_1 = D_1 = 0$ , т. е. мы приходим к обычным нулевым граничным условиям для потенциалов Дебая на поверхности идеально проводящего шара [9]. Аналогично, проводя же рассуждения для условия непрерывности тангенциальных составляющих магнитного поля (5) с учетом очевидной связи коэффициентов  $x_n^{(i)}$  и  $x_n^{(e)}$ ,  $y_n^{(i)}$  и  $y_n^{(e)}$ :

$$x_n^{(e)} = \frac{\psi_n'(ka)}{\zeta_n'(ka)} (x_n^{(i)} - 1), \quad y_n^{(e)} = \frac{\psi_n(ka)}{\zeta_n(ka)} (y_n^{(i)} - 1), \quad (8)$$

получим в итоге две связанные системы парных сумматорных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n x_n^{(i)} \psi_n'(ka) P_n^1(\cos \theta) = B_1 \operatorname{tg}(\theta/2), \quad \theta \in (0, \theta_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (x_n^{(i)} - 1) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\zeta_n'(ka)} = B_3 \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad \theta \in (\theta_0, \pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n^{(i)} \psi_n(ka) P_n^1(\cos \theta) = iB_1 \operatorname{tg}(\theta/2), \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (y_n^{(i)} - 1) \frac{P_n^1(\cos \theta)}{\zeta_n(ka)} = -iB_3 \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad \theta \in (\theta_0, \pi).$$

## 2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (9)

Проведем регуляризацию функциональных уравнений несколько иначе, чем в [2], с той целью, чтобы получить решение, пригодное для аналитического исследования рэлеевского рассеяния при произвольном значении угла  $\theta_0$ . Для этой цели введем коэффициенты  $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ , связанные с  $\{x_n^{(i)}, y_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$  посредством соотношений

$$x_n^{(i)} = (-i)^n \zeta_n'(ka) x_n, \quad y_n^{(i)} = (-i)^n \zeta_n(ka) y_n, \quad (10)$$

а также параметры

$$\epsilon_n = 1 + ika [(2n+1)/n(n+1)] \psi_n'(ka) \zeta_n'(ka)_{n \gg ka} = O[(ka/n)^2]; \quad (11)$$

$$\mu_n = 1 - (i/ka)(2n+1) \psi_n(ka) \zeta_n(ka)_{n \gg ka} = O[(ka/n)^2]. \quad (12)$$

Поскольку, как это следует из (11), (12),  $\lim_{ka \rightarrow 0} \mu_n = 0$ ,  $\lim_{ka \rightarrow 0} \epsilon_n = 0$  для произвольного  $n$ , то проводимая здесь регуляризация, в отличие от [2], основана на выделении в (9) явного решения соответствующей статической задачи. С учетом (10)–(12) получим из (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \epsilon_n) x_n P_n^1(\cos \theta) = -ika B_1 \operatorname{tg}(\theta/2), \quad \theta \in (0, \theta_0),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ x_n - \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} \right\} P_n^1(\cos \theta) = B_3 \operatorname{ctg}(\theta/2), \quad \theta \in (\theta_0, \pi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\nu_n}{n(n+1)} y_n P_n^1(\cos \theta) = -\frac{1}{ka} B_1 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left\{ y_n - \frac{i^n}{\zeta_n(ka)} \right\} P_n^1(\cos \theta) = -iB_3 \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (\theta_0, \pi).$$

Выражение для средней за период энергии, запасенной внутри экрана  $\bar{W}$  ( $r < a$ ) с учетом введенных обозначений имеет вид

$$\frac{4\pi}{c} \bar{W} = \frac{2\pi}{k^3} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \{ |x_n|^2 |\zeta'_n(ka)|^2 + |y_n|^2 |\zeta_n(ka)|^2 \} \times \\ \times \{ \psi'_n(ka) \psi_n(ka) + ka [\psi_n^2(ka) - \psi_{n-1}(ka) \psi_{n+1}(ka)] \}. \quad (14)$$

Асимптотическая ( $n \gg ka$ ,  $n \rightarrow \infty$ ) оценка (14) при условии (3) позволяет определить класс комплексных числовых последовательностей, в котором следует искать решение уравнений (13):

$$\{ x_n \}_{n=1}^{\infty} \in L_2(2), \quad \{ y_n \}_{n=1}^{\infty} \in L_2(0), \quad (15) \\ l_2(\eta) = \left\{ C_n \in C^1 : \sum_{n=1}^{\infty} n^\eta |C_n|^2 < \infty \right\}.$$

Принимая во внимание (15), процесс построения решения начнем с улучшения сходимости первого уравнения в (13), для чего последнее проинтегрируем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_n) x_n P_n(\cos \theta) = C - i2kaB_1 \ln(\cos(\theta/2)), \quad \theta \in (0, \theta_0), \quad (16)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из условия (15). Используя интегральное представление в форме Мелера—Дирихле для  $\ln(\cos(\theta/2))$ :

$$2 \ln(\cos(\theta/2)) = -2^{1/2} \pi^{-1} \int_0^{\theta} (\cos \varphi - \cos \theta)^{-1/2} \varphi \sin(\varphi/2) d\varphi,$$

а также для  $P_n(\cos \theta)$ ,  $P_n^1(\cos \theta)$ ,  $\operatorname{tg}(\theta/2)$ ,  $\operatorname{ctg}(\theta/2)$ , сведем, следуя [7], систему функциональных уравнений, состоящую из последних трех уравнений (13) и (16), к функциональным уравнениям с тригонометрическими ядрами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta = \\ = \begin{cases} C \cos \frac{\theta}{2} + ikaB_1 \theta \sin \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta, & \theta \in (0, \theta_0), \\ -B_3 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \theta, & \theta \in (\theta_0, \pi) \end{cases}; \quad (17)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta = \begin{cases} -\frac{1}{ka} B_1 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \nu_n \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta, \\ \theta \in (0, \theta_0) \\ iB_3 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta_n(ka)} \cos \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta, \\ \theta \in (\theta_0, \pi) \end{cases} \quad (18)$$

Требование (15) однозначно определяет выбор  $C$  [7]:

$$C = -B_3 - ikaB_1 \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} - x_n \varepsilon_n \right] \frac{\cos(n + 1/2) \theta_0}{\cos \theta_0/2}. \quad (19)$$

Домножим (17), (18) на  $\cos(m + 0,5)\theta$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) и проинтегрируем по  $\theta$  в пределах от 0 до  $\pi$ , что позволяет получить систему уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} x_m - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n Q_{nm}^{(1)}(\theta_0) &= -ikaB_1 V_m(\theta_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} [\delta_n^m - Q_{nm}^{(1)}(\theta_0)], \\ y_m - \sum_{n=1}^{\infty} y_n \nu_n Q_{nm}(\theta_0) &= -\frac{B_1}{ka} Q_{0m}(\theta_0) - iB_3 Q_{0m}(\theta_0) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} [\delta_n^m - Q_{nm}(\theta_0)]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$ikaV_0(\theta_0)B_1 + B_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ x_n \varepsilon_n - \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} \right] Q_{n0}^{(1)}(\theta_0), \quad (21)$$

$$-\frac{1}{ka} Q_{00}(\theta_0)B_1 + i[1 - Q_{00}(\theta_0)]B_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} - y_n \nu_n \right] Q_{n0}(\theta_0).$$

Здесь использованы обозначения

$$V_m(\theta_0) = \theta_0 \operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} Q_{0m}(\theta_0) - W_m(\theta_0),$$

$$Q_{nm}^{(1)}(\theta_0) = Q_{nm}(\theta_0) - \frac{\cos(n + 0,5)\theta_0}{\cos(\theta_0/2)} Q_{0m}(\theta_0),$$

$$W_m(\theta_0) = \frac{\theta_0}{\pi} \left[ \frac{\cos m\theta_0}{m} - \frac{\cos(m+1)\theta_0}{m+1} \right] - \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sin m\theta_0}{m^2} - \frac{\sin(m+1)\theta_0}{(m+1)^2} \right], \quad (22)$$

$$Q_{nm}(\theta_0) = \pi^{-1} \left[ \frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m} + \frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1} \right].$$

Система линейных алгебраических уравнений второго рода (20), (21) единственным образом определяет решение исследуемой задачи. Простота матричных элементов этой системы, конструируемых из тригонометрических функций (22) и сферических функций Бесселя (11), (12), наряду с быстрой сходимостью системы (20), (21) позволила реализовать эффективный численный алгоритм ее решения. Как следует

из оценки абсолютной нормы матричного оператора системы (20), (21), к ее решению применим метод последовательных приближений при условии  $ka < 1$  ( $\theta_0$  — произвольно). С целью получения при этих условиях аналитического решения (20), (21) исключим константы  $B_1, B_3$  из (20) при помощи (21). В результате будем иметь

$$x_m - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n c_{nm} - i \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_n d_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} (\delta_n^m - c_{nm}) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta_n(ka)} d_{nm},$$

$$y_m - \sum_{n=1}^{\infty} y_n \mu_n t_{nm} - i \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varepsilon_n p_{nm} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta_n(ka)} (\delta_n^m - t_{nm}) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{\zeta'_n(ka)} p_{nm}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

где

$$c_{nm} = Q_{nm}^{(1)}(\theta_0) - ka \frac{1 - Q_{00}(\theta_0)}{q(ka, \theta_0)} Q_{n0}^{(1)}(\theta_0) V_m(\theta_0),$$

$$d_{nm} = ka \frac{V_m(\theta_0)}{q(ka, \theta_0)} Q_{n0}(\theta_0),$$

$$t_{nm} = Q_{nm}(\theta_0) + \frac{1 + (ka)^2 V_0(\theta_0)}{ka q(ka, \theta_0)} Q_{n0}(\theta_0) Q_{0m}(\theta_0),$$

$$p_{nm} = \frac{Q_{0m}(\theta_0)}{ka q(ka, \theta_0)} Q_{n0}^{(1)}(\theta_0), \quad q(ka, \theta_0) = ka [1 - Q_{00}(\theta_0)] V_0(\theta_0) - Q_{00}(\theta_0)/ka.$$

В том случае, когда плоская волна набегаёт на выпуклую часть сферического экрана (рис. 16), решение, вывод которого вполне аналогичен (23), имеет вид ( $x_m^* = (-1)^m x_m$ ,  $y_m^* = (-1)^m y_m$ )

$$x_m^* - \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \varepsilon_n c_{nm} + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n^* \mu_n d_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\zeta'_n(ka)} (\delta_n^m - c_{nm}) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\zeta_n(ka)} d_{nm},$$

$$y_m^* - \sum_{n=1}^{\infty} y_n^* \mu_n t_{nm} + i \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \varepsilon_n p_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\zeta_n(ka)} (\delta_n^m - t_{nm}) + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{\zeta'_n(ka)} p_{nm}.$$

Используя метод последовательных приближений при  $ka \ll 1$ , получим решение (23), (25):

$$x_n - i^n / \zeta'_n(ka) = \mp a_{1n}(ka)^2 - ia_{2n}(ka)^3 \mp a_{3n}(ka)^4 + O((ka)^5),$$

$$y_n - i^n / \zeta_n(ka) = \pm b_{1n}ka + ib_{2n}(ka)^2 \mp b_{3n}(ka)^3 + O((ka)^4).$$

Здесь верхние знаки относятся к случаю, изображенному на рис. 16, а нижние — к рис. 1а. В (26) использованы следующие обозначения:

$$a_{1n} \equiv Q_{1n}^{(1)}(\theta_0), \quad a_{2n} = \frac{1}{6} Q_{2n}^{(1)}(\theta_0) + \frac{Q_{10}(\theta_0)}{Q_{00}(\theta_0)} V_n(\theta_0),$$

$$a_{3n} = \frac{3}{20} Q_{1n}^{(1)}(\theta_0) - \frac{[1 - Q_{00}(\theta_0)] Q_{10}^{(1)}(\theta_0) - (1/3) Q_{20}(\theta_0)}{Q_{00}(\theta_0)} V_n(\theta_0) + F_n(\theta_0),$$

$$b_{1n} = Q_{1n}^*(\theta_0), \quad b_{2n} = \frac{1}{3} Q_{2n}^*(\theta_0) + \frac{Q_{10}^{(1)}(\theta_0)}{Q_{00}(\theta_0)} Q_{0n}(\theta_0),$$

$$b_{3n} = \frac{1}{10} Q_{1n}^*(\theta_0) + \frac{Q_{10}(\theta_0)V_0(\theta_0) + (1/6)Q_{20}^{(1)}(\theta_0)Q_{00}(\theta_0)}{Q_{00}^2(\theta_0)} Q_{0n}(\theta_0) + G_n(\theta_0), \quad (27)$$

$$F_m(\theta_0) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n^2 + 2n + 3)Q_{1n}^{(1)}(\theta_0)}{n(n+1)(2n-1)(2n+3)} Q_{nm}^{(1)}(\theta_0),$$

$$G_m(\theta_0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_{1n}^*(\theta_0)Q_{nm}^*(\theta_0)}{(2n-1)(2n+3)},$$

$$Q_{nm}^*(\theta_0) = Q_{nm}(\theta_0) - Q_{n0}(\theta_0)Q_{0m}(\theta_0)/Q_{00}(\theta_0).$$

Решение (26) позволяет в пределе  $k=0$  получить решение соответствующих статических задач:

$$U_s = -r \sin \theta \cos \varphi + a \cos \varphi \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}^{(1)}(\theta_0) \left\{ \begin{array}{l} (r/a)^n, \quad r < a \\ (r/a)^{-n-1}, \quad r > a \end{array} \right\} P_n^1(\cos \theta), \quad (28)$$

$$U_m = -r \sin \theta \sin \varphi + a \sin \varphi \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}^*(\theta_0) \left\{ \begin{array}{l} n^{-1}(r/a)^n, \quad r < a \\ -(n+1)^{-1}(r/a)^{-n-1}, \quad r > a \end{array} \right\} \times \\ \times P_n^1(\cos \theta).$$

При выводе (28) использована очевидная связь потенциалов  $U_s$  и  $U_m$ , описывающих соответственно статическое электрическое и магнитное поле, с потенциалами Дебая

$$U_s = -(d/dr)(rU), \quad U_m = -(d/dr)(rV).$$

При этом, как обычно,  $E = -\nabla U_s$ ,  $H = -\nabla U_m$ .

### 3. РАСЧЕТ РАДИОЛОКАЦИОННОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ

Согласно определению [9] радиолокационное сечение рассеяния  $\sigma_B$  равно

$$\sigma_B = \lim_{z \rightarrow \infty} 4\pi r^2 (|E_{\theta}^{sc}|^2 / |E_{\theta}^0|^2),$$

где рассеянное поле определено в направлении на источник ( $\theta = \pi$ ). Диаграммы рассеяния (2) имеют вид

$$S_1(\theta, \varphi) = \frac{\cos \varphi}{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [x_n^{(e)} \tau_n(\cos \theta) + y_n^{(e)} \pi_n(\cos \theta)], \quad (29)$$

$$S_2(\theta, \varphi) = \frac{\sin \varphi}{ik} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [x_n^{(e)} \pi_n(\cos \theta) + y_n^{(e)} \tau_n(\cos \theta)],$$

где  $\tau_n(\cos \theta) = (d/d\theta)P_n^1(\cos \theta)$ ,  $\pi_n(\cos \theta) = \sin \theta^{-1}P_n^1(\cos \theta)$  — угловые функции, обычно используемые в теории Ми. Поскольку  $\tau_n(-1) =$



$= -\pi_n(-1) = (-1)^n [n(n+1)]/2$ , то  $|S_1(\pi)| = |S_2(\pi)| = (2k)^{-1} \times$   
 $\times \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (x_n^{(e)} - y_n^{(e)}) \right|$  и обратное сечение рассеяния при-  
 обретает следующий вид:

$$\sigma_B/\pi a^2 = (ka)^{-2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1) (x_n^{(e)} - y_n^{(e)}) \right|^2. \quad (30)$$

Если записать теорему о комплексной мощности для электромагнитного поля в сферическом слое, включающем незамкнутый экран, можно получить энергетическое соотношение

$$2\pi k^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (\operatorname{Re} x_n^{(e)} + \operatorname{Re} y_n^{(e)} + |x_n^{(e)}|^2 + |y_n^{(e)}|^2) = 0, \quad (31)$$

имеющее смысл закона сохранения дифракционной энергии. Из (31) следует выражение для полного сечения рассеяния

$$\sigma/\pi a^2 = 2(ka)^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|x_n^{(e)}|^2 + |y_n^{(e)}|^2). \quad (32)$$

В случае рэлеевского рассеяния ( $ka \ll 1$ ) с точностью до  $O((ka)^8)$  обратное сечение рассеяния не зависит от ориентации отверстия. Используя (26) и (30), получим

$$\begin{aligned} \sigma_B/\pi a^2 &= (2a_{11} + b_{11})^2 (ka)^4 + [(2a_{21} + b_{21} + a_{12} + (1/3)b_{12})^2 - \\ &- 2(2a_{11} + b_{11})((2/5)a_{11} - 2a_{31} + (1/10)b_{11} + e_{31} + a_{22} + \\ &+ (1/3)b_{22} + (4/15)a_{13} + (1/15)b_{13})] (ka)^6 + O((ka)^8); \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sigma/\pi a^2 &= \frac{2}{3} \{ (4a_{11}^2 + b_{11}^2) (ka)^4 + [4(a_{21}^2 + 2a_{11}a_{31}) + b_{21}^2 - 2b_{11}b_{31} - (8/5)a_{11}^2 - \\ &- (1/5)b_{11}^2 + (3/5)a_{12}^2 + (1/15)b_{12}^2] (ka)^6 + O((ka)^8) \}. \end{aligned} \quad (34)$$

Как следует из (27) и (22), при  $\theta_0 = \pi$ ,  $a_{11} = b_{11} = 1$   $\sigma_B/\pi a^2 = 9(ka)^4 + O((ka)^6)$ ,  $\sigma/\pi a^2 = (10/3)(ka)^4 + O((ka)^6)$ . Если  $\theta_0 \ll 1$  (идеально проводящий диск радиуса  $a_d = a\theta_0$ ),  $a_{11} = (4/3\pi)\theta_0^3 + O(\theta_0^5)$ ,  $b_{11} = O(\theta_0^5)$ , то

$$\sigma_B/\pi a_d^2 = \frac{64}{9\pi^2} (ka_d)^4 + O((ka_d)^6), \quad \sigma/\pi a_d^2 = \frac{128}{27\pi^2} (ka_d)^4 + O((ka_d)^6).$$

Полученные в пределе длинных волн из (33), (34) выражения для поперечников рассеяния идеально проводящего шара ( $\theta_0 = \pi$ ) и круглого идеально проводящего диска ( $\theta_0 \ll 1$ ) совпадают с известными выражениями [7].

При произвольных параметрах  $ka$  и  $\theta_0$  расчет  $\sigma$  и  $\sigma_B$  проводился путем численного решения систем (20), (21). Порядок редукции  $N$  при этом выбирался таким образом, чтобы баланс мощности (31) не превышал величины  $\sim 10^{-7}$ , что обеспечивало стабилизацию четырех-пяти значащих цифр в значении коэффициентов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ .

На рис. 2 приведена зависимость  $\sigma_B/\pi a_d^2$  сферической чаши от относительного волнового параметра  $ka \sin \theta_0$ , описывающего ее характерный размер, при трех значениях угла  $\theta_0 = 15; 30; 45^\circ$  (кривые 2, 3,

4 соответственно). В диапазоне  $ka_d < 3$  все три зависимости незначительно отличаются от значения обратного сечения рассеяния круглого диска (асимптотическая кривая 1 при  $ka \gg 1$  для диска  $\sigma_B \approx \approx \pi a_d^2 (ka_d)^2$ ). С ростом частоты, когда глубина сферической чаши начинает превышать величину  $\lambda/8$ , отклонение от величины  $\sigma_B$  для диска становится все более заметным. Характерная для круглого диска картина правильного чередования (через  $\lambda/2$ ) интерференционных максимумов и минимумов наблюдается в рассчитанной области частот при  $\theta_0 = 15^\circ$  (кривая 2, рис. 2). По мере увеличения угла  $\theta_0$  эта картина разрушается (рис. 3). На рис. 3 построена зависимость  $\sigma_B$  от  $ka$  при  $\theta_1 = 60^\circ; 90^\circ$ . Процесс рассеяния в этой области углов  $\theta_1$  определяется уже двумя факторами: интерференционными эффектами, как и прежде, и все возрастающим по мере уменьшения угла  $\theta_1$  влиянием квазисобственных колебаний идеально проводящего сферического экрана. Отметим, что кривая 1 для  $\theta_1 = 60^\circ$  идеально согласуется, в отличие от [3], с экспериментальной кривой, приведенной в той же работе. Однако, на наш взгляд, наиболее существенным моментом здесь является расчет влияния высокочастотных колебаний экрана, реализующихся при  $\theta_1 \ll 1$ , на эффекты отражения. Детальный расчет первых 14 типов квазисобственных частот идеально проводящей сферы с отверстием проведен нами в [12]. Как следует из рис. 4, влияние резонансных режимов возбуждения на отражающие характеристики экрана

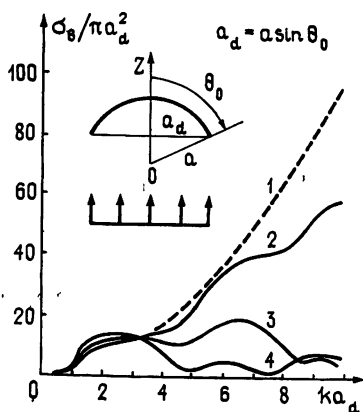


Рис. 2.

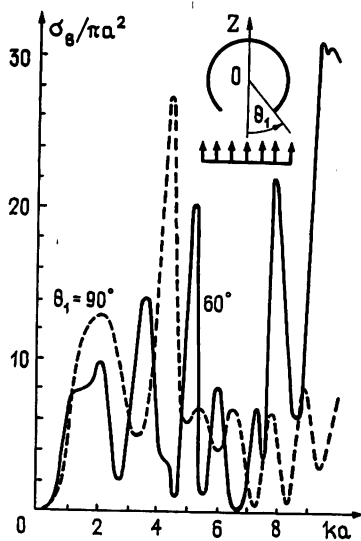


Рис. 3.

чрезвычайно велико и не укладывается в упрощенную схему работы [3], где провал в характеристиках обратного сечения рассеяния объясняется резонансным поглощением энергии плоской электромагнитной волны. В действительности реализуется более тонкий эффект «двойного экстремума», осуществляющийся в узком диапазоне изменений относительного волнового числа (или частоты)  $\delta ka$  вблизи одного из квазисобственных значений колебаний доминантного электрического  $\nu_{kr}$  или доминантного магнитного  $\tau_{kr}$  типа. Индекс  $k$  здесь означает число вариаций поля вдоль координаты  $\theta$ , а  $p$  — число вариаций поля вдоль координаты  $r$  (по радиусу резонатора). Термин «доминантные колебания» электрического типа означает, что  $E_r \gg H_r$  (см. также [12]), а тер-

мин «доминантные колебания магнитного типа» —  $H_r \gg E_r$ , поскольку, согласно (6); при данном способе возбуждения экрана (плоской волной) не существует колебаний чисто электрического или магнитного типа.

На рис. 4а представлен график зависимости  $\sigma_B$  от  $ka$  для идеально проводящей сферы с отверстием  $\theta_1 = 10^\circ$ . На нем отчетливо прослеживается эффект двойного экстремума (или двойного резонанса), когда величина  $\sigma_B$  испытывает вначале резкое возрастание, а затем резкий спад. Причем, как это следует из рис. 4б, ни один из этих экстремумов не совпадает с квазисобственной частотой резонатора. Наблюдающийся эффект можно представить себе как результат интерференции в дальней зоне рассеивателя двух волн. Одна из них является волной, отраженной в обратном направлении от внешней поверхности ре-

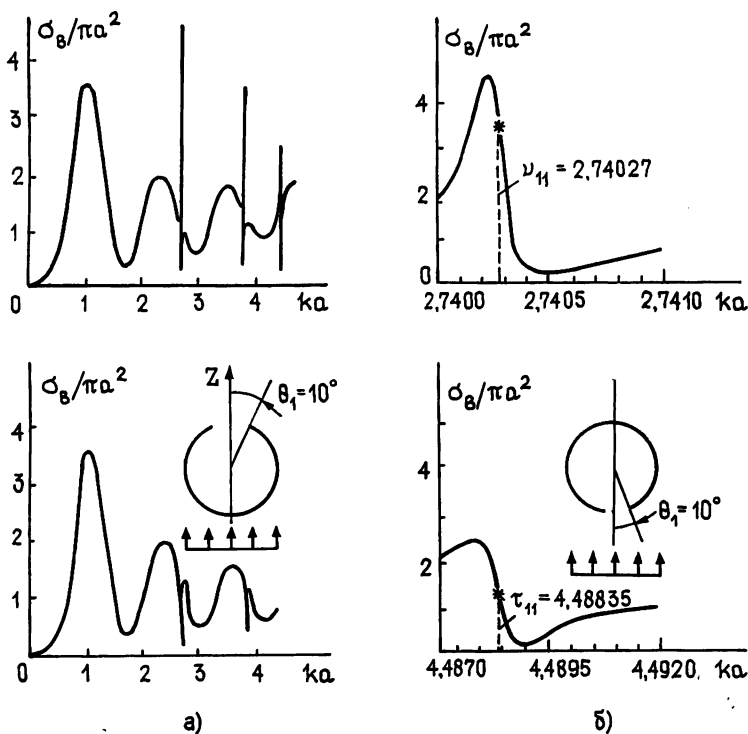


Рис. 4.

зонатора; ее амплитуда близка к амплитуде волны, отраженной от идеально проводящего шара. Амплитуда и фаза этой волны практически не меняются в узком интервале вблизи резонансной частоты. Эта волна интерферирует с волной, порожденной резонансным излучением из отверстия. Амплитуда и фаза этого излучения испытывают резкие изменения вблизи резонансной частоты, складываясь в фазе или в противофазе с волной, отраженной от поверхности резонатора. При противоположной ориентации

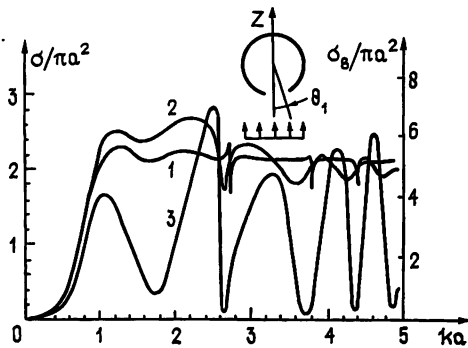


Рис. 5.

отверстия (рис. 4б) величина эффекта менее значительна, а сам эффект «меняет» знак: резонансное рассеяние характеризуется вначале минимумом, а затем подавленным максимумом. Последнее связано с тем, что при такой ориентации отверстия энергия, запасенная в резонаторе, значительно меньше.

В заключение на рис. 5 приведены результаты расчета величины полного и обратного сечения рассеяния для экранов с отверстиями  $\theta_1 = 10^\circ$  (кривая 1),  $30^\circ$  (кривые 2, 3). На графиках полного сечения рассеяния также наблюдается эффект двойного резонанса, однако, как и следует ожидать, значительно менее выраженный, чем для обратного сечения рассеяния.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кинг Р., Тай-Цзунь У. Рассеяние и дифракция электромагнитных волн.—М.: ИЛ, 1962.
2. Виноградов С. С., Шестопапов В. П.—ДАН СССР, 1977, 237, № 1, с. 60.
3. Jones R. K., Shumpert T. H.—IEEE Trans., 1980, AP-28, № 1, p. 128.
4. Senior T. B. A., Desjardins G. A.—IEEE Trans., 1974, EMC-16, № 4, p. 205.
5. Фельд Я. Н., Ансрян А. К.—Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 4, с. 673.
6. Радин А. М., Шестопапов В. П.—ДАН СССР, 1973, 212, № 4, с. 838.
7. Виноградов С. С., Тучкин Ю. А., Шестопапов В. П.—ДАН СССР, 1978, 242, № 1, с. 80.
8. Шестопапов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках.—Харьков: изд. ХГУ, 1973.
9. Иванов Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах.—Минск: Наука и техника, 1968.
10. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1972.
11. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции.—М.: Мир, 1964.
12. Виноградов С. С. Диссертация, Харьков, 1980.

Институт радиофизики и электроники  
АН УССР

Поступила в редакцию  
5 апреля 1982 г.

#### ON THE REFLECTION ABILITY OF A SPHERICAL SCREEN

S. S. Vinogradov

Based on the methods of papers [2, 7] a strict solution has been obtained for the vector problem of diffraction by an ideally conducting sphere with a hole. The corrective formulation is given of boundary conditions for the Debye potentials which appear to be related between each other. A calculation is made of the total and back transverse section of scattering.

---