

УДК 538.56.4 : 621.372.8.09

ТЕОРИЯ ВЫНУЖДЕННОГО РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ РЕЛЯТИВИСТСКИМ ЭЛЕКТРОННЫМ ПУЧКОМ

C. H. Белов, Н. И. Карбушев, А. А. Рухадзе

Теоретически исследуется когерентное рассеяние электромагнитных E -волн в круглом волноводе конечной длины трубчатым релятивистским электронным пучком в приближении сильного продольного магнитного поля. Определены коэффициенты усиления рассеянной волны в случаях резонансного (рамановского) и нерезонансного (модифицированного) рассеяния. Получены ограничения на степень моноэнергетичности электронов пучка и произведена оценка эффективности рассеяния.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрос интерес к проблеме вынужденного когерентного рассеяния электромагнитных волн релятивистскими электронными пучками, вызванный возможностью генерации мощного коротковолнового электромагнитного излучения [1–7]. В связи с этим в литературе появилось большое число теоретических работ, посвященных исследованию данного вопроса. Практически во всех работах (кроме [3–6], которые также являются далеко неполными) рассматривались безграничные системы. В эксперименте же всегда взаимодействие пучка с электромагнитными волнами происходит в некотором волноводе конечного радиуса и конечной длины. Поперечная и продольная ограниченность системы могут приводить к новым эффектам, таким, как неоднородность амплитуды волны накачки и рассеянной волны в поперечном сечении, существование порога возбуждения рассеянной волны по току пучка и амплитуде волны накачки. Их учет важен при практической реализации устройств, осуществляющих генерацию электромагнитных колебаний на рассеянной волне.

В настоящей работе исследуется вынужденное рассеяние в системе, близкой к реальной. Предполагается, что взаимодействие электромагнитных волн с электронным пучком происходит в круглом волноводе радиуса R и длины L с металлическими боковыми стенками. На конце волновода $z = 0$ происходит полное отражение волн, а на конце $z = L$ коэффициент отражения $\kappa < 1$, и в общем случае может зависеть от частоты и моды колебаний. Тонкий трубчатый пучок электронов с радиусом r_b и током I входит в волновод на границе $z = 0$ и выводится из него на границе $z = L$. Для его удержания на систему наложено сильное внешнее продольное магнитное поле B_0 , параллельное оси волновода (ось $0z$). Все электроны на входе пучка имеют одинаковые величины продольной и поперечной составляющих импульса $p_{\parallel 0} = \gamma m u_{\parallel}$ и $p_{\perp 0} = \gamma m u_{\perp}$, так что равновесная функция распределения электронов может быть представлена в виде

$$f_0(r, p) = (I/\pi^2 e u_{\parallel}) \delta(r^2 - r_b^2) \delta(p_{\perp}^2 - p_{\perp 0}^2) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}), \quad (1.1)$$

где u_{\parallel} и u_{\perp} — продольная и поперечная составляющие скорости электронов, $\gamma = (1 - u_{\parallel}^2/c^2 - u_{\perp}^2/c^2)^{-1/2}$ — релятивистский фактор. Толщина .

пучка Δ и соответственно ларморовский радиус электронов при этом должны быть малыми по сравнению с радиусом волновода, т. е.

$$\gamma(u_{\perp}/\Omega) < \Delta \ll R \quad (1.2)$$

($\Omega = eB_0/mc$ — нерелятивистская электронная циклотронная частота), для того чтобы представление (1.1) было справедливо.

Волна накачки с частотой ω_0 и продольной составляющей волнового вектора $k_0 < 0$ распространяется навстречу пучку. Направление распространения рассеянной волны с частотой ω_1 и продольной составляющей волнового вектора $k_1 > 0$ совпадает с направлением распространения пучка. Комбинационная волна с частотой ω и продольной составляющей волнового вектора k , удовлетворяющими фазовым соотношениям

$$\omega = \omega_1 - \omega_0, \quad k = k_1 - k_0, \quad (1.3)$$

находится в черенковском резонансе с электронным пучком, т. е. $\omega \approx ku_{\parallel}$. Внешнее магнитное поле B_0 наряду с (1.2) обеспечивает также выполнение неравенств

$$\Omega/\gamma \gg \omega_0 - k_0 u_{\parallel}, \quad \omega_1 - k_1 u_{\parallel} \gg |\omega - ku_{\parallel}|, \quad (1.4)$$

вследствие чего колебательное движение электронов является одномерным, направленным вдоль оси Oz . Ток пучка достаточно мал, так что для волны накачки и рассеянной волны пучок является малым возмущением.

2. ВЫВОД ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В приближении одномерного движения кинетическое уравнение для электронов записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_{\parallel} \frac{\partial f}{\partial z} + eE_z \frac{\partial f}{\partial p_{\parallel}} = 0, \quad (2.1)$$

где $v_{\parallel} = p_{\parallel}/\gamma m$, причем рассеиваться на пучке могут только волновые моды E -типа, имеющие отличную от нуля продольную составляющую электрического поля E_z . Будем рассматривать волны, обладающие азимутальной симметрией, полагая

$$E_{0z} = E_0(r) \cos(k_0 z - \omega_0 t), \quad E_{1z} = E_1(r) \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)], \\ E_z = E(r) \exp[i(kz - \omega t)]. \quad (2.2)$$

В линейном приближении по рассеянной и комбинационной волнам с точностью до членов, содержащих амплитуду волны накачки во второй степени, из кинетического уравнения (2.1) находим возмущение функции распределения электронов:

$$\delta f(r) = \delta f_0 \sin(k_0 z - \omega t) + \delta f_1 \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + \\ + \delta f \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2.3)$$

где

$$\delta f_0 = \frac{-ieE_0}{\omega_0 - k_0 v_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}},$$

$$\delta f_1 = \frac{-ieE_1}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} - \frac{1}{2} \frac{e^2 E_0 E}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left[\left(\frac{1}{\omega - kv_{\parallel}} + \frac{1}{\omega_0 - k_0 v_{\parallel}} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] + \frac{i}{4} \frac{e^3 E_0^2 E_1}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left\{ \frac{1}{\omega - kv_{\parallel}} \cdot \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left[\left(\frac{1}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right) \right] \right\}$$

$$-\frac{1}{\omega_0 - k_0 v_{\parallel}} \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right) \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] - \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left[\frac{1}{(\omega_0 - k_0 v_{\parallel})^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] \right\}, \quad (2.4)$$

$$\delta f = \frac{-ieE}{\omega - kv_{\parallel}} \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right. - \frac{1}{2} \frac{e^2 E_0 E_1}{\omega - kv_{\parallel}} \left. \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right[\left(\frac{1}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} - \frac{1}{\omega_0 - k_0 v_{\parallel}} \right) \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] + \\ + \frac{i}{4} \frac{e^2 E_0^2 E}{\omega - kv_{\parallel}} \left. \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right\} \left\{ \frac{1}{\omega_1 - k_1 v_{\parallel}} \left. \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \right[\left(\frac{1}{\omega - kv_{\parallel}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\omega_0 - k_0 v_{\parallel}} \right) \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] - \frac{\partial}{\partial p_{\parallel}} \left[\frac{1}{(\omega_0 - k_0 v_{\parallel})^2} \left. \frac{\partial f_0}{\partial p_{\parallel}} \right] \right\}.$$

Плотность тока при этом имеет только одну отличную от нуля составляющую:

$$j_z(r) = j_0 \sin(k_0 z - \omega_0 t) + j_1 \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + j \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2.5)$$

причем

$$4\pi i j_0 / \omega_0 = \delta \epsilon_0(r) E_0, \quad 4\pi i j_1 / \omega_1 = \delta \epsilon_1(r) E_1 + S_1(r) E_0 E_1 + V_1(r) E_0^2 E_1, \quad (2.6)$$

$$4\pi i j / \omega = \delta \epsilon(r) E + S(r) E_0 E_1 + V(r) E_0^2 E.$$

С учетом неравенств (1.4) и соотношений (1.3) имеем:

$$\delta \epsilon_0(r) = -\frac{4\pi^2 e^2}{m} \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{f_0}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 (\omega_0 - k_0 v_{\parallel})^2},$$

$$\delta \epsilon_1(r) = -\frac{4\pi^2 e^2}{m} \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{f_0}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 (\omega_1 - k_1 v_{\parallel})^2},$$

$$S = -S_1 \simeq i \frac{2\pi^2 e^3}{m^2} \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{k f_0}{\gamma^2 \gamma_{\parallel}^4 (\omega - kv_{\parallel})^2 (\omega_0 - k_0 v_{\parallel})^2}, \quad (2.7)$$

$$V_1 \simeq -\frac{\pi^2 e^4}{m^3} \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{k^2 f_0}{\gamma^3 \gamma_{\parallel}^6 (\omega - kv_{\parallel})^2 (\omega_0 - k_0 v_{\parallel})^4},$$

$$V \simeq \frac{8\pi^2 e^4}{m^3} \int_0^{\infty} dp_{\perp}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \frac{k^2 f_0}{\gamma^3 \gamma_{\parallel}^6 (\omega - kv_{\parallel})^5 (\omega_0 - k_0 v_{\parallel})},$$

$$\gamma_{\parallel} = (1 - v_{\parallel}^2/c^2)^{-1/2}.$$

Плотность тока (2.5) входит в уравнения Максвелла, из которых в случае азимутально-симметричных E -волн для продольной составляющей электрического поля следует уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z(r)}{\partial r} \right) \right] + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial E_z(r)}{\partial t} + 4\pi j_z \right) = 0. \quad (2.8)$$

Отличные от нуля составляющие полей E_r и B_θ при этом выражаются через $E_z(r)$ следующим образом:

$$E_r = \frac{\partial^2 E_z(r)}{\partial z \partial r} \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{-1}, \quad (2.9)$$

$$B_0 = - \frac{\partial^2 E_z(r)}{c \partial t \partial r} \left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^{-1}.$$

Тонкий трубчатый пучок разбивает поперечное сечение волновода на две области: $r < r_b$ и $r_b < r < R$. В обеих этих областях $j_z(r) = 0$, а решение уравнения (2.8) представимо в виде

$$E_z(r < r_b) = A_0 J_0(k_{\perp 0} r) \cos(k_0 z - \omega_0 t) + A_1 J_0(k_{\perp 1} r) \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + A I_0(k_{\perp} r) \exp[i(kz - \omega t)], \quad (2.10)$$

$$E_z(r_b < r < R) = [B_0 J_0(k_{\perp 0} r) + C_0 N_0(k_{\perp 0} r)] \cos(k_0 z - \omega_0 t) + [B_1 J_0(k_{\perp 1} r) + C_1 N_0(k_{\perp 1} r)] \exp[i(k_1 z - \omega_1 t)] + [B I_0(k_{\perp} r) + C K_0(k_{\perp} r)] \exp[i(kz - \omega t)].$$

Здесь J_0 и N_0 — функции Бесселя и Неймана, I_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя и Ханкеля, $k_{\perp 0,1} = \sqrt{\omega_{0,1}^2/c^2 - k_{\parallel}^2}$, $k_{\perp} = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}$, $A_0, A_1, A, B_0, B_1, B, C_0, C_1, C$ — постоянные. Для сшивания решений (2.10) на границе $r=r_b$ необходимо проинтегрировать уравнение (2.8) по радиусу в тонком слое Δ , в котором расположен пучок. В результате получаем граничные условия:

$$\begin{aligned} E_z(r=r_b+\Delta/2) - E_z(r=r_b-\Delta/2) &= 0, \\ r_b \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial E_z}{\partial r}(r=r_b+\Delta/2) - \frac{\partial E_z}{\partial r}(r=r_b-\Delta/2) \right] &= \\ &= \left(\frac{1}{c^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) 2\pi \int_{r_b-\Delta/2}^{r_b+\Delta/2} j_z(r) d(r^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

На боковой же стенке волновода $r=R$ должно выполняться граничное условие

$$E_z(r=R) = 0. \quad (2.12)$$

В предположении, что пучок является слабым возмущением для волны накачки и рассеянной волны, из условий (2.11) и (2.12) находим характеристическое уравнение, описывающее процесс рассеяния,

$$\begin{aligned} \left(\omega_1^2 - k_1^2 c^2 - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2} c^2 \right) \left[1 - 4 \frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel} R^2 (\omega - k u_{\parallel})^2} \right] &= \\ = \frac{e}{m} \frac{\mu_{0l}^2 I c^2 v_E^2 \alpha^2 J_0^2(\mu_{0l} r_b / R)}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel}^3 R^4 (\omega - k u_{\parallel})^2 J_1^2(\mu_{0l})}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь μ_{0s} и μ_{0l} — корни функции Бесселя, $J_0(\mu_{0s}) = 0$, $J_0(\mu_{0l}) = 0$,

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_0 - k_0 u_{\parallel}}, \quad v_E = \frac{e A_0 J_0(\mu_{0s} r_b / R)}{m \gamma \gamma_{\parallel}^2 (\omega_0 - k_0 u_{\parallel})}, \quad (2.14)$$

$$\Phi = \frac{x^2}{2} \frac{I_0(x r_b / R)}{I_0(x)} [I_0(x) K_0(x r_b / R) - I_0(x r_b / R) K_0(x)],$$

$$x = \omega R / \gamma_{\parallel} u_{\parallel}.$$

3. АНАЛИЗ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

Характеристическое уравнение (2.13) определяет продольные составляющие волновых векторов четырех нормальных волн системы на частотах ω_1, ω . В случае резонансного рамановского рассеяния, когда

$$\left| 1 - 4 \frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 (\omega - ku_{\parallel})^2} \right| \ll 1, \quad (3.1)$$

для продольных составляющих волновых векторов двух нормальных комбинационных волн находим

$$k_{1,2}(\omega) = \frac{\omega}{u_{\parallel}} + 2 \left(\frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel}^3 R^2} \right)^{1/2} - \frac{\delta\omega}{2} \left(\frac{1}{u_{\parallel}} - \frac{1}{v_1} \right) \pm \\ \pm i \sqrt{F_{\text{рез}} - \frac{\delta\omega^2}{4} \left(\frac{1}{u_{\parallel}} - \frac{1}{v_1} \right)^2}, \quad (3.2)$$

где

$$F_{\text{рез}} = \frac{1}{8} \left(\frac{e}{m} \frac{I}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel} \Phi} \right)^{1/2} \mu_{0l}^2 \frac{v_E^2 \alpha^2 J_0^2 (\mu_{0l} r_b / R)}{k_1 u_{\parallel}^3 R^3 J_1^2 (\mu_{0l})}, \quad (3.3)$$

$$v_1 = k_1 c^2 / \omega_1 > u_{\parallel},$$

$\delta\omega = \omega - \omega^{(0)} = \omega_1 - \omega_1^{(0)}$, а $\omega^{(0)}$ и $\omega_1^{(0)}$ являются решением системы уравнений

$$\omega = ku_{\parallel} - 2 \left(\frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel} R^2} \right)^{1/2}, \quad \omega_1^2 = k_1^2 c^2 + \frac{\mu_{0l}^2}{R^2} c^2 \quad (3.4)$$

с учетом условий (1.3). Третья и четвертая нормальные волны имеют продольные составляющие волновых векторов соответственно

$$k_3(\omega) = \frac{\omega}{u_{\parallel}} - 2 \left(\frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel}^3 R^2} \right)^{1/2}, \quad k_4(\omega) = - \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} + k_0. \quad (3.5)$$

Три первые нормальные волны являются прямыми и резонансными для пучка, в то время как четвертая нормальная волна, осуществляющая обратную связь, является нерезонансной.

Если электронный пучок при влете в систему является немодулированным, то условия отсутствия возмущений плотности тока и заряда на границе $z = 0$ позволяют определить коэффициент усиления прямой рассеянной волны в системе:

$$G_{\text{рам}}(\omega) = \frac{E_1(L)}{E_1(0)} \simeq \text{ch} \left[L \sqrt{F_{\text{рез}} - \frac{\delta\omega^2}{4} \left(\frac{1}{u_{\parallel}} - \frac{1}{v_1} \right)^2} \right] \times \\ \times \exp \left[ik_0 L + i \frac{\omega}{u_{\parallel}} L + 2iL \left(\frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma\gamma_{\parallel}^2 u_{\parallel}^3 R^2} \right)^{1/2} - \right. \\ \left. - i \frac{\delta\omega}{2} L \left(\frac{1}{u_{\parallel}} - \frac{1}{v_1} \right) \right]. \quad (3.6)$$

Максимальное значение $G_{\text{рам}}(\omega)$ достигается при $\delta\omega = 0$. Учет обратной связи и использование электродинамических условий на границах

$z = 0$, L приводят к дисперсионному соотношению, определяющему частоты собственных колебаний системы*:

$$\kappa G_{\text{рам}}(\omega) \exp \left(iL \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} \right) = 1. \quad (3.7)$$

В стартовых условиях ($\text{Im } \omega = 0$, $G_{\text{рам}} = G_{\text{рам}}^{\max}$) из (3.7) находим фазовое соотношение, выполнение которого обеспечивает положительную обратную связь,

$$\text{Re } k_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} = \frac{\pi n}{L}, \quad (3.8)$$

где n — положительное целое число. Из амплитудного соотношения при этом следует величина стартового порогового пучка, равная

$$I_{\text{ст}} = 64 \frac{m}{e} \gamma \gamma_{\parallel}^2 \frac{k_1^2 u_{\parallel}^7 R^6 \Phi J_1^4(\mu_{0l})}{\mu_{0l}^4 v_E^4 \alpha^4 L^4 J_0^4(\mu_{0l} r_b/R)} (\text{Arch } \kappa^{-1})^4. \quad (3.9)$$

Инкремент нарастания колебаний вблизи порога определяется выражением

$$\text{Im } \omega \simeq \frac{\sqrt{1 - \kappa^2}}{2} \frac{u_{\parallel}}{L} \frac{I - I_{\text{ст}}}{I_{\text{ст}}} \left(1 + 3 \frac{u_{\parallel}}{v_1} \right)^{-1} \cdot \text{Arch}(\kappa^{-1}), \quad (3.10)$$

а при сильном превышении порога

$$\text{Im } \omega \simeq \frac{\mu_{0l}}{2 \sqrt{2}} \left(\frac{e}{m} \frac{I}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 \omega_1^2 R^2 u_{\parallel} \Phi} \right)^{1/4} \frac{v_E c \alpha}{u_{\parallel} R} \left| \frac{J_0(\mu_{0l} r_b/R)}{J_1(\mu_{0l})} \right|. \quad (3.11)$$

Из соотношения (3.1) следует, что резонансное рамановское рассеяние имеет место при не очень большой амплитуде поля волны на-качки, когда

$$v_E^2 \ll 32 \frac{k_1 R}{\mu_{0l}^2 \alpha^2} \left(\frac{e}{m} \frac{I u_{\parallel}}{\gamma \gamma_{\parallel}^2} \right)^{1/2} \Phi^{3/2} \frac{J_1^2(\mu_{0l})}{J_0^2(\mu_{0l} r_b/R)}. \quad (3.12)$$

В случае выполнения неравенства, обратного (3.12), происходит нерезонансное комптоновское (модифицированное) рассеяние. Тогда для продольных составляющих волновых векторов трех прямых нормальных волн из (2.13) имеем уравнение третьей степени

$$\begin{aligned} \delta k^2 [\delta k + \delta \omega (1/u_{\parallel} - 1/v_1)] &= \\ = -F_{\text{мод}} &= -\frac{e}{m} \frac{\mu_{0l}^2 I v_E^2 \alpha^2 J_0^2(\mu_{0l} r_b/R)}{2 \gamma \gamma_{\parallel}^2 k_1 u_{\parallel}^5 R^4 J_1^2(\mu_{0l})}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\delta k = k - \omega/u_{\parallel}$, а величины v_1 и $\delta \omega$ определены в (3.3) с той лишь разницей, что $\omega^{(0)}$ и $\omega_1^{(0)}$ являются решением системы уравнений

$$\omega = k u_{\parallel}, \quad \omega_1^2 = k_1^2 c^2 + \mu_{0l}^2 c^2 / R^2 \quad (3.14)$$

с учетом условий (1.3). Продольная составляющая волнового вектора обратной четвертой нормальной волны, так же как и в случае резонансного рамановского рассеяния, определяется соотношением (3.5).

* Аналогичного вида дисперсионное соотношение для рассеянной волны записано в работе [6], где абсолютная величина коэффициента усиления найдена в безграничной в поперечном направлении системе.

Используя условия отсутствия возмущений плотности тока и заряда немодулированного на границе $z = 0$ пучка, находим коэффициент усиления рассеянной волны

$$G_{\text{ком}}(\omega) = \frac{E_1(L)}{E_1(0)} = \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\delta k_i^2 \exp(i\delta k_i L)}{(\delta k_i - \delta k_j)(\delta k_i - \delta k_p)} \right] \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\delta k_i^2}{(\delta k_i - \delta k_j)(\delta k_i - \delta k_p)} \right]^{-1} \exp\left(ik_0 L + i \frac{\omega}{u_{\parallel}}\right), \quad (3.15)$$

где $i \neq j \neq p \neq i$, а δk_i — корни уравнения (3.13). Дисперсионное соотношение, определяющее частоты собственных колебаний системы, в случае полного отражения обратной волны на границе $z=0$ и коэффициента отражения прямой волны x на границе $z=L$ имеет вид, аналогичный (3.7), в котором $G_{\text{рам}}(\omega)$ заменено на $G_{\text{ком}}(\omega)$. Когда коэффициент усиления велик ($|G_{\text{ком}}| \gg 1$), его максимальное значение достигается при $\delta\omega = 0$ и равно

$$G_{\text{ком}}^{\max} \simeq \frac{1}{3} \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} F_{\text{мод}}^{1/3} L + iL \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} + \frac{i}{2} F_{\text{мод}}^{1/3} L\right), \quad (3.16)$$

а в случае небольшого коэффициента усиления ($|G_{\text{ком}}| - 1 \ll 1$) максимальное его значение [9]

$$G_{\text{ком}}^{\max} \simeq \left(1 + \frac{4}{\pi^3} F_{\text{мод}} L^3\right) \exp\left[iL \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} + i\pi \left(\frac{v_1}{u_{\parallel}} - 1\right)^{-1}\right] \quad (3.17)$$

достигается при $\delta\omega = (\pi u_{\parallel}/L)(1 - u_{\parallel}/v_1)^{-1}$.

Таким образом, из соотношений (3.7), (3.16) и (3.17) следует, что положительная обратная связь имеет место, если

$$\operatorname{Re} k_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} = \frac{\pi n}{L} - \frac{1}{4} \left[\frac{e}{m} \frac{\mu_{0l}^2 I v_E^2 \alpha^2 J_0^2(\mu_{0l} r_b/R)}{2 \gamma \gamma_{\parallel}^2 k_1 u_{\parallel}^5 R^4 J_1^2(\mu_{0l})} \right]^{1/3} \quad (3.18)$$

при большом коэффициенте усиления и

$$\operatorname{Re} k_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} = \frac{\pi}{L} \left[n - \left(\frac{v_1}{u_{\parallel}} - 1\right)^{-1} \right] \quad (3.19)$$

при небольшом коэффициенте усиления (n — положительное целое число). Для величины стартового тока соответственно находим следующие выражения:

$$I_{\text{ст}} \simeq \frac{m}{e} \frac{\gamma \gamma_{\parallel}^2 k_1 u_{\parallel}^5 R^4 J_1^2(\mu_{0l})}{\mu_{0l}^2 v_E^2 \alpha^2 L^8 J_0^2(\mu_{0l} r_b/R)} \begin{cases} \frac{16}{3\sqrt{3}} \ln^3\left(\frac{3}{x}\right) & \text{при } |x| \ll 1 \\ \pi^{3/2} \left(\frac{1}{x} - 1\right) & \text{при } |x| \simeq 1 \end{cases}. \quad (3.20)$$

Инкремент нарастания колебаний вблизи стартового порога равен

$$\operatorname{Im} \omega \simeq \frac{u_{\parallel}}{2L} \frac{I - I_{\text{ст}}}{I_{\text{ст}}} \begin{cases} \left(1 + 2 \frac{u_{\parallel}}{v_1}\right)^{-1} \ln \frac{3}{x} & \text{при } |x| \ll 1 \\ \frac{v_1}{u_{\parallel}} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^{1/3} & \text{при } |x| \simeq 1 \end{cases}. \quad (3.21)$$

При сильном же превышении стартового порога имеем

$$\delta\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \left[\frac{e \mu_{0l}^2 I v_E^2 c^2 \alpha^2 J_0^2(\mu_{0l} r_b / R)}{m 2\gamma \gamma_{||}^2 \omega_1 u_{||}^3 R^4 J_1^2(\mu_{0l})} \right]^{1/3}. \quad (3.22)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Существенные ограничения на возбуждение колебаний накладываются разбросом электронов пучка по импульсам. Изложенные в настоящей работе результаты с равновесной функцией распределения (1.1) справедливы только до тех пор, пока

$$k\Delta p_{||} \ll \left\{ 2 \left(\frac{e}{m} \frac{I\Phi}{\gamma \gamma_{||}^2 u_{||} R^2} \right)^{1/2}, F_{\text{ком}}^{1/3} \right\}, \quad (4.1)$$

где $\Delta p_{||}$ — эффективная величина разброса электронов по продольной составляющей импульса. В случае выполнения неравенства, обратного (4.1), неустойчивость становится кинетической, а рассеяние — некогерентным.

Характеристическое уравнение в пренебрежении малой действительной поправкой в правой части вместо (2.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - k_1^2 c^2 - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2} c^2 &= i\pi em c^2 \times \\ \times \frac{\mu_{0l}^2 \gamma_{||}^2 I v_E^2 L J_0^2(\mu_{0l} r_b / R)}{u_{||} R^4 (\omega_0 - k_0 u_{||})^2 J_1^2(\mu_{0l})} \frac{\partial f_0(p_{||})}{\partial p_{||}} \Big|_{p_{||} = m_1 [u_{||} + \gamma_{||}^2 (\omega/k - u_{||})]}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $u_{||}$ — средняя скорость, а $f_0(p_{||})$ — функция распределения электронов по продольным импульсам, нормированная на одну частицу, $\int_{-\infty}^{\infty} dp_{||} f_0(p_{||}) = 1$. Для коэффициента усиления рассеянной волны при этом получаем

$$\begin{aligned} G_1(\omega) &= \exp \left[\frac{\pi em \gamma_{||}^2 \mu_{0l}^2 I v_E^2 L J_0^2(\mu_{0l} r_b / R)}{2k_1 u_{||} R^4 (\omega_0 - k_0 u_{||})^2 J_1^2(\mu_{0l})} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial f_0(p_{||})}{\partial p_{||}} \Big|_{p_{||} = m_1 [u_{||} + \gamma_{||}^2 (\omega/k - u_{||})]} + iL \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Усиление имеет место при условии $\partial f_0(p_{||})/\partial p_{||} < 0$, а стартовый ток для возбуждения генератора определяется формулой

$$\begin{aligned} I_{\text{ст}} &= \frac{2k_1 u_{||} R^4 (\omega_0 - k_0 u_{||})^2 J_1^2(\mu_{0l})}{\pi em \gamma_{||}^2 \mu_{0l}^2 v_E^2 L J_0^2(\mu_{0l} r_b / R)} \times \\ \times \left[\frac{\partial f_0(p_{||})}{\partial p_{||}} \Big|_{p_{||} = m_1 [u_{||} + \gamma_{||}^2 (\omega/k - u_{||})]} \right]^{-1} \ln(x^{-1}). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из фазовых же соотношений при этом следует, что в системе осуществляется положительная обратная связь, если $\operatorname{Re} k_1 = \sqrt{\frac{\omega_1^2}{c^2} - \frac{\mu_{0l}^2}{R^2}} = \frac{\pi n}{L}$, где n — целое положительное число.

Частота рассеянной волны при развитии как кинетической, так и рассмотренных выше гидродинамических неустойчивостей находится из формулы [7]:

$$\omega_1 \simeq \omega' \gamma_{\parallel}^2 [1 + (u_{\parallel}/c) \sqrt{1 - (\mu_{0l}^2 c^2)(\omega'^2 \gamma_{\parallel}^2 R^2)^{-1}}], \quad (4.5)$$

где

$$\omega' = \omega_0 [1 + (u_{\parallel}/c) \sqrt{1 - (\mu_{0s}^2 c^2)(\omega_0^2 R^2)^{-1}}],$$

причем одномодовая генерация имеет место тогда, когда стартовые условия превыщены только для одной из радиальных мод. Выбирая радиус пучка r_b таким, чтобы отношение $J_0(\mu_{0l} r_b/R)/J_1(\mu_{0l})$ при определенном μ_{0l} принимало максимальное значение, можно добиться попречной одномодовости генерации.

Нелинейное насыщение амплитуды рассеянной волны при достаточно большой ее величине может быть обусловлено двумя факторами: истощением волны накачки или выходом электронов пучка из резонанса. Первый механизм имеет место, если амплитуда волны накачки мала, так что

$$v_E \ll \max \left\{ 2 \sqrt{2} \left(\frac{e}{m} \frac{I}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 R^2} \right)^{3/4} \frac{\mu_{0s} u_{\parallel}^{3/4} \alpha \Phi^{1/4}}{\omega^2 |k_0|^{1/2} R} \left| \frac{J_0(\mu_{0s} r_b/R)}{J_1(\mu_{0s})} \right|, \right. \\ \left. \sqrt{2} \frac{e}{m} \frac{I \mu_{0s}^{3/2} \mu_{0l}^{1/2} \alpha^2 u_{\parallel}}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 |k_0|^{3/4} k_1^{1/4} \omega^3 R^4} \left| \frac{J_0(\mu_{0s} r_b/R)}{J_1(\mu_{0s})} \right|^{3/2} \left| \frac{J_0(\mu_{0l} r_b/R)}{J_1(\mu_{0l})} \right|^{1/2} \right\}. \quad (4.6)$$

Максимальная (установившаяся) амплитуда рассеянной волны при этом равна [1]

$$A_1^{\max} \simeq (\mu_{0l}/\mu_{0s}) \sqrt{|k_0|/k_1} A_0 |J_1(\mu_{0s})/J_1(\mu_{0l})|. \quad (4.7)$$

Второй механизм насыщения проявляется, когда электронный пучок оказывается полностью промодулированным по плотности. Тогда для максимальной амплитуды рассеянной волны находим:

при резонансном рамановском рассеянии

$$A_1^{\max} \simeq 2 \sqrt{2} \left(\frac{e}{m} \frac{I}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 R^2} \right)^{3/4} \frac{\mu_{0l} u_{\parallel}^{3/4} \alpha \Phi^{1/4} A_0 |J_0(\mu_{0s} r_b/R)|}{\omega^2 k_1^{1/2} v_E R |J_1(\mu_{0l})|}, \quad (4.8)$$

при нерезонансном комптоновском рассеянии

$$A_1^{\max} \simeq 2^{1/3} \left(\frac{e}{m} \frac{\mu_{0l} I a^2 u_{\parallel}}{\gamma \gamma_{\parallel}^2 k_1 v_E R^4} \right)^{2/3} \frac{A_0 |J_0(\mu_{0s} r_b/R) J_0^{1/3}(\mu_{0l} r_b/R)|}{\omega^2 |J_1^{4/3}(\mu_{0l})|}. \quad (4.9)$$

Определяя эффективность рассеяния как отношение потока электромагнитной энергии генерируемой волны к потоку кинетической энергии электронов $(mc^2/e) I (\gamma - 1)$, для КПД получаем следующие формулы:

$$\eta \simeq e \omega_1 P_0 [mc^2 \omega_0 I (\gamma - 1)]^{-1} \quad (4.10)$$

в случае, когда происходит истощение волны накачки и амплитуда рассеянной волны определяется соотношением (4.7),

$$\eta \simeq (\gamma \sqrt{\gamma} \omega_1 u_{\parallel}^{3/2} \Phi^{1/2}) [2 \omega^2 c^2 R (\gamma - 1)]^{-1} (e I / m)^{1/2} \quad (4.11)$$

при полной модуляции пучка в резонансном рамановском рассеянии и, наконец,

$$\eta \simeq \frac{\mu_{0s}^{2/3} e I^{1/3} \omega_1 u_{\parallel}^{4/3} \alpha^{4/3} P_0^{1/3}}{4 \mu_{0l}^{2/3} m \omega^{8/3} (\omega_0 k_1 |k_0|)^{1/3} R^{8/3} c^2 (\gamma - 1)} \times \\ \times \left[\frac{J_0(\mu_{0s} r_b/R) J_0(\mu_{0l} r_b/R)}{J_1(\mu_{0s}) J_1(\mu_{0l})} \right]^{2/3} \quad (4.12)$$

при модуляции пучка в результате нерезонансного комптоновского рассеяния. В формулах (4.10) и (4.12) P_0 — мощность волны накачки, распространяющейся в волноводе.

В качестве численного примера рассмотрим рассеяние электромагнитной волны на частоте $\omega_0 = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ c}^{-1}$ (длина волны $\lambda_0 = 3 \text{ см}$) электронным пучком радиуса $r_b = 0,5 \text{ см}$ с током $I = 5 \text{ кA}$ и энергией электронов 700 кэВ ($\gamma \approx \gamma_{\parallel} \approx 2,4$) в волноводе с радиусом $R = 1,5 \text{ см}$. Неравенства (1.4) при этом выполняются, если напряженность внешнего магнитного поля превышает 15 кГс . Когда мощность волны накачки равна $P_0 = 1 \text{ ГВт}$, величина v_E составляет $v_E \approx 5 \cdot 10^8 \text{ см/с}$ и выполняется условие резонансного рамановского рассеяния (3.12). Поэтому коэффициент усиления волны (волноводной E_{01} -моды), имеющей частоту $\omega_1 \approx 10^{12} \text{ c}^{-1}$ (длина волны $\lambda_1 \approx 1,7 \text{ мм}$), необходимо рассчитывать по формуле (3.6).

Находим, что коэффициент усиления рассеянной волны составляет $G = 1,05$ при длине системы $L = 70 \text{ см}$, $G = 1,25$ при $L = 140 \text{ см}$, $G = 2,5$ при $L = 360 \text{ см}$. Соответственно, чтобы превысить стартовый порог генерации (3.9), коэффициент отражения рассеянной волны должен быть $\kappa > 0,95$ при $L = 70 \text{ см}$, $\kappa > 0,8$ при $L = 140 \text{ см}$ и $\kappa > 0,4$ при $L = 360 \text{ см}$. Коэффициент усиления может быть существенно повышен, если использовать резонатор для волны накачки, приводящий к увеличению ее амплитуды и скорости осцилляций электронов.

В приведенных условиях выполняется неравенство, обратное (4.6). Оценки по формуле (4.11) показывают, что может быть достигнут КПД генерации рассеянной волны $\eta \approx 2,5\%$, чему соответствует мощность $\sim 180 \text{ МВт}$. Инкремент нарастания колебаний согласно (3.11) составляет $\text{Im } \omega \leqslant 10^8 \text{ c}^{-1}$, т. е. время нарастания колебаний порядка десятка наносекунд. Рассеяние является гидродинамическим, если степень немоноэнергетичности электронов пучка не превышает величины $\Delta \gamma / \gamma \approx \Delta p_{\parallel} / p_{\parallel} < 5\%$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sprangle P., Drobot A. T.—J. Appl. Phys., 1979, 50, № 5, p. 2652.
2. Sprangle P., Granatstein V. L., Baker L.—Phys. Rev. A., 1975, 12, № 4, p. 1697.
3. Братман В. Л., Гинзбург Н. С., Петелин М. И.—ЖЭТФ, 1979, 76, № 3, с. 930.
4. Векефи G.—J. Appl. Phys., 1980, 51, № 6, p. 3081.
5. Мирошниченко В. И.—Физика плазмы, 1980, 6, № 3, с. 581.
6. Драганов А. Б., Калмыков А. М., Коцаренко Н. Я.—Письма в ЖТФ, 1980, 6, № 22, с. 1371.
7. Райзер М. Д., Рухадзе А. А. Препринт ФИАН № 101, М., 1980.
8. Александров А. Ф., Богданевич Л. С., Рухадзе А. А. Основы электродинамики плазмы.—М.: Наука, 1978, с. 99.
9. Шевчик В. Н., Трубецков Д. И. Аналитические методы расчета в электронике СВЧ.—М.: Сов. радио, 1970, гл. III.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

Поступила в редакцию
23 марта 1982 г.

THE THEORY OF INDUCED SCATTERING OF ELECTROMAGNETIC WAVES IN A WAVEGUIDE BY A RELATIVISTIC ELECTRON BEAM

S. N. Belov, N. I. Karbushev, A. A. Rukhadze

Coherent scattering of electromagnetic E -waves in a circular waveguide of the finite length by a annular relativistic electron beam in the approximation of a strong longitudinal magnetic field is theoretically investigated. Amplification coefficients of a scattered wave are defined for the cases of the resonance (Raman) and nonresonance (modified) scattering. Limitations have been obtained for the degree of electron beam monoenergeticity and the estimation is made for the scattering efficiency.