ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 1 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 538.56

К ТЕОРИИ ИНТЕРФЕРОМЕТРА ФАБРИ—ПЕРО СО СТАТИСТИЧЕСКИ ШЕРОХОВАТЫМИ ЗЕРКАЛАМИ

И. В. Богатырева, В. П. Данильченко, Л. А. Поспелов

В работе изложены результаты теоретического исследования влияния статистических шероховатостей поверхностей зеркал интерферометра Фабри—Перо на амплитудно-частотные характеристики возбуждаемых в нем H-поляризованных электромагнитных полей.

Как известно, на идеально гладкой проводящей поверхности тангенциальная компонента электрического поля обращается в нуль, в результате чего падающие на такую поверхность электромагнитные волны отражаются от нее без потерь [1]. В условиях эксперимента проводящая поверхность может оказаться шероховатой. В этом случае часть падающего излучения рассеивается, отражаясь под углами, не равными соответствующему значению френелевского для идеально гладкой плоскости. Обусловленный этим рассеянием импеданс шероховатой плоскости проводника для регулярной части поля, как было показано в [2], в общем случае имеет отличные от нуля активную и реактивную части. Представляет интерес изучение влияния рассеяния, обусловленного шероховатостью проводящих стенок волноводных и резонансных систем, на характеристики собственных и вынужденных колебаний электромагнитного поля в этих системах. Данная работа посвящена теоретическому исследованию этого вопроса для плоского интерферометра, возбуждаемого монохроматическим излучением.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский резонатор, образованный двумя проводящими стенками, внутренние поверхности которых имеют отклонения от плоскостей, распределенных по случайному закону (с равным нулю средним значением и отличным от нуля среднеквадратичным). Будем считать, что эти шероховатости удовлетворяют условиям применимости теории рассеяния плоских волн, изложенной в [2] (т. е. достаточно малы и пологи), и воспользуемся результатами этой теории для описания зависимости отражательных свойств шероховатых стенок от частоты, угла падения и поляризации поля. Найдем распределение поля H-поляризованной волны в таком резонаторе для случая, когда его возбуждение обеспечивается падающей на одну из стенок внешней монохроматической волной соответствующей поляризации.

2. Решение задачи. Решение этой задачи можно получить с помощью метода, изложенного в [1]. Действительно, направим ось z перпендикулярно к плоскостям $z=0$ и $z=L$, соответствующим положениям средних поверхностей стенок резонатора. Пусть падающая волна подходит к левой стенке ($z=0$), ось y направим вдоль вектора магнитной составляющей поля падающей волны, которое не зависит от координаты y. Тогда полное поле H_y внутри резонатора можно представить в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся вдоль оси x:

$$H_y^{(i)}(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_\parallel \{A(k_\parallel) \exp[ik_\perp(k_\parallel)z] + \\ + B(k_\parallel) \exp[-ik_\perp(k_\parallel)z]\} \exp(ik_\parallel x - i\omega t), \quad 0 \leqslant z \leqslant L. \tag{1}$$

Здесь $k_\perp^2(k_\parallel) = (\omega^2/c^2) - k_\parallel^2$, $\operatorname{Re} k_\perp > 0$, $\operatorname{Im} k_\perp > 0$.

Неизвестные амплитуды $A(k_\parallel)$ и $B(k_\parallel)$ должны быть определены из граничных условий на стенках резонатора ($z=0$, L). На этих стенках для каждой из плоских волн, образующих в сумме полное поле (1), согласно [1], должны быть выполнены граничные условия для средних полей, полученные с учетом эффекта рассеяния на шероховатостях в [2]. При использовании этих граничных условий в данной задаче следует учитывать физические особенности взаимодействия поля излучения со стенками резонатора. Во-первых, эффективные граничные условия работы [2] устанавливают связь только между полями падающих и отраженных волн внутри резонатора; возбуждающее поле внешней волны, падающей на левую стенку этого резонатора и приходящей из минус бесконечности, входит в условие равенства полных полей на этой стенке ($z=0$) как независимая внешняя сила. Во-вторых, на левой стенке первое слагаемое в правой части (1) описывает отраженную волну, а второе — падающую. На правой стенке наоборот: первое слагаемое описывает падающую волну, а второе — отраженную. С учетом указанных особенностей граничные условия [1, 2] для неизвестных амплитуд $A(k_\parallel)$ и $B(k_\parallel)$ могут быть представлены в следующем виде:

— на левой стенке ($z=0$)

$$A(k_\parallel) = R_0(k_\parallel) B(k_\parallel) + h(k_\parallel), \tag{2а}$$

— на правой стенке ($z=L$)

$$B(k_\parallel) = R_L(k_\parallel) A(k_\parallel) \exp[2ik_\perp(k_\parallel) L]. \tag{2б}$$

Здесь $R_0(k_\parallel, \omega)$ — коэффициент отражения плоской волны с заданным волновым числом $k_\parallel$ от левой стенки (с учетом ее шероховатости и прозрачности), $R_L(k_\parallel, \omega)$— аналогичный коэффициент для правой оценки, которую мы считаем шероховатой, но не прозрачной. Последнее слагаемое в правой части (2а) описывает амплитуду Фурье поля внешнего источника. В рассматриваемой задаче эта функция $h(k_\parallel)$ является известной: по заданному значению поля накачки $H_y^{(e)}(x, 0, t)$ на левой стенке резонатора она может быть вычислена с помощью обратного преобразования Фурье:

$$h(k_\parallel) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx H_y^{(e)}(x, 0, t) \exp(i\omega t - ik_\parallel x). \tag{3}$$

Решая систему неоднородных алгебраических уравнений (2), найдем зависимости искомых амплитуд $A(k_\parallel)$ и $B(k_\parallel)$ от внешних параметров системы — частоты падающей волны ω, среднего расстояния между стенками L и отражательных характеристик стенок $R_{0,L}(k_\parallel, \omega)$:

$$A(k_\parallel) = h(k_\parallel)[1 - R_0 R_L \exp(2ik_\perp L)]^{-1}; \tag{4а}$$

$$B(k_\parallel) = R_L A(k_\parallel) \exp(2ik_\perp L). \tag{4б}$$

Как следует из (4), эти амплитуды резонансным образом возрастают в окрестностях точек, для которых $k_\parallel$ и ω близки к резонансным, определяемым из требования равенства нулю знаменателя правой части (4а):

$$1 - R_0 R_L \exp(2ik_\perp L) = 0. \tag{5}$$

Наибольший практический интерес представляет та область значений параметров шероховатости, в которой соответствующие коэффициенты отражения близки к единице [2]:

$$R_{0,L} = 1 - 2\eta_{0,L}/\cos\theta, \quad |2\eta_{0,L}| \ll \cos\theta. \tag{6а}$$

В этом случае решение уравнения (5) можно найти в аналитическом виде путем разложения искомых частот в ряд по степеням малых параметров η_0 и η_L. С точностью до членов порядка η находим

$$k_\perp^{(n)}L = \pi n - i(\eta_0 + \eta_L)(k_0/k_\perp^{(n)}), \quad n = 1, 2, 3,\ldots \tag{6б}$$

Подставляя это выражение в дисперсионное уравнение рассматриваемой системы

$$\omega \equiv \left(k_\parallel^2 + k_\perp^2\right)^{1/2} c, \tag{6в}$$

найдем окончательные зависимости собственных частот ω от продольного волнового числа $k_\parallel$:

$$\omega(k_\parallel) \equiv \omega_n^{(0)} + \delta_n, \tag{7}$$

где

$$\omega_n^{(0)} \equiv (k_\parallel^2 + \pi^2 n^2/L^2)^{1/2} c \tag{7а}$$

— собственная частота соответствующего волновода с гладкими стенками,

$$\delta_n \equiv -i(\eta_0 + \eta_L)\, c/L \tag{7б}$$

— поправка, обусловленная шероховатостью и прозрачностью стенок.

3. Учет поперечной неоднородности поля вынужденной волны. Формулы (1), (2б), (3) и (6) дают полное аналитическое решение рассматриваемой задачи, которое позволяет установить функциональные зависимости конфигурации поля в резонаторе от внешних параметров этого резонатора и характеристик падающей волны, по крайней мере, численными методами. Однако для решения практических задач представляет интерес нахождение явного вида конфигурации поля и его зависимости от указанных параметров. Чтобы получить такие зависимости, необходимо конкретизировать картину поля падающей волны в плоскости $z=0$, а также зависимость характеристик прозрачности левой стенки резонатора от угла падения и частоты. Ниже мы рассмотрим наиболее простые модели этих функциональных зависимостей. А именно, предположим, что

— коэффициент прозрачности левого зеркала в отсутствие шероховатостей $\Delta_0 \equiv 1 - R_0$ не зависит от угла падения $((d\Delta_0/dk_\parallel) = 0$, R_0 — коэффициент отражения H-поляризованной волны левой стенкой резонатора в отсутствие шероховатостей: $\Delta_{\text{tot}}(0) \equiv \Delta_0 + \Delta_m$, Δ_m — поправка к этому коэффициенту отражения, обусловленная шероховатостью);

— амплитуда поля падающей волны в плоскости левой стенки резонатора имеет гауссово распределение с характерным поперечным размером $L_\perp \equiv \alpha^{-1}$:

$$H_y^{(e)}(x, 0, t) = h_0 \exp\left[-\alpha^2 x^2 - i\omega t\right]. \tag{8а}$$

В этом случае амплитуда Фурье поля внешней волны $h(k_\parallel)$ определяется аналитическим выражением (см. [3]):

$$h(k_\parallel) = \left(h_0/2\sqrt{\pi}\,\alpha\right) \exp(-k_\parallel^2/4\alpha^2). \tag{8б}$$

Подставляя это выражение в (4) и (1), найдем окончательную картину поля в резонаторе для произвольных значений частоты падающей волны ω, расстояния между стенками a и параметра неоднородности волны α:

$$H_y^{(i)}(x, z) = \frac{h_0}{\alpha\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dk_\| \frac{\cos k_\| x \exp(-k_\|^2/4\alpha^2)}{1 - R_0 R_L \exp(2ik_\perp L)} \times$$
$$\times \{\exp[ik_\perp(k_\|)z] + R_L \exp[ik_\perp(k_\|)(2L - z)]\}. \tag{9}$$

В простейшем случае ($\alpha \to 0$) из этой формулы получаем явное выражение для картины поля в резонаторе:

$$H_y^{(i)}(x, z) = \frac{h_0\{\exp(ik_0 z) + R_L \exp[-ik_0(z - 2L)]\}}{\eta_0 + \eta_L + i(k_0 L - \pi n)}. \tag{10}$$

Здесь мы удержали лишь первый член разложения экспоненты в знаменателе (9), считая расстройку $\omega - \omega_n^{(0)}$ величиной порядка или меньше ширины полосы, обусловленной результирующими потерями в стенках:

$$|k_0 L - \pi n| \leqslant \mathrm{Re}(\eta_0 + \eta_L). \tag{10а}$$

Как видно из (10), в общем случае шероховатость стенок приводит не только к росту ширины резонансной кривой резонатора на величину

$$\delta_n'' \equiv \mathrm{Im}\,\delta_n = (\omega_n^{(0)}/\pi n)\,\mathrm{Re}(\eta_{0m} + \eta_{Lm}), \tag{11а}$$

но и к сдвигу положения максимума резонансной кривой на величину

$$\delta_n' \equiv \mathrm{Re}\,\delta_n = -(\omega_n^{(0)}/\pi n)\,\mathrm{Im}(\eta_{0m} + \eta_{Lm}). \tag{11б}$$

Следует подчеркнуть, что в общем случае в условиях рассматриваемой задачи правая часть (11а) отлична от нуля даже при отсутствии шероховатости вследствие конечной прозрачности левой стенки ($\mathrm{Re}\Delta_0 > 0$). Поэтому относительный вклад шероховатости в ширину резонансной линии определяется величиной

$$q \equiv \overline{\Delta}_m/\Delta_0, \tag{12а}$$

где $\overline{\Delta}_m \equiv 2(\eta_{0m} + \eta_{Lm})$ — поправка к коэффициенту отражения за счет шероховатостей стенок резонатора, Δ_0—введенный выше коэффициент прозрачности левой стенки при отсутствии шероховатостей. Последняя величина в данной задаче мала по сравнению с единицей, так что относительный вклад шероховатостей, как видно из (10) и (12), оказывается существенно больше абсолютной величины соответствующей поправки Δ_m к коэффициенту отражения. Что касается правой части (11б), то в общем случае эта поправка, как следует из [2], отлична от нуля даже при чисто активной отражательной способности стенок в отсутствие шероховатостей.

Отметим, что с точностью до малой поправки порядка Δ_L картина распределения поля между стенками резонатора не зависит от отражательных характеристик стенок резонатора:

$$H_y^{(i)}(z) \simeq \frac{2h_0 \cos k_0(z - L)\exp(ik_0 L)}{\eta_0 + \eta_L + i(k_0 L - \pi n)}. \tag{10б}$$

Эти характеристики, как видно из (10б), более существенно влияют только на величину амплитуды и фазы поля в резонаторе. В заключение данного раздела заметим, что переход к пространственно-однородному распределению поля падающей волны на левой стенке резонатора ($z=0$) применим в случае пучка конечных поперечных размеров ($\alpha\neq0$) только при достаточно малых значениях α. Соответствующие условия можно установить, разложив знаменатель (9) в ряд по степеням α. Таким путем найдем следующее ограничение на допустимую величину поперечной неоднородности поля возбуждающей волны:

$$\varepsilon \equiv \alpha^2 L \bar{\lambda} / |\eta_0 + \eta_L| \ll 1, \quad \bar{\lambda} = \lambda/2\pi. \tag{13а}$$

Соответствующий минимальный размер $(L_\perp)_{\min}$ поперечной неоднородности поля падающей волны определяется формулой

$$(L_\perp)_{\min} \equiv \alpha_{\min}^{-1} = [L\bar{\lambda} |\eta_0 + \eta_m|^{-1}]^{1/2}. \tag{13б}$$

Для того, чтобы найти явный вид соответствующих поправок к (10б), необходимо конкретизировать физические свойства шероховатостей, в том числе функцию их корреляции $W(x)$ [2], амплитуду высоты σ и отношение длины волны λ к длине корреляции l. В предельном случае относительно низких частот и малых высот шероховатостей, когда выполнены неравенства

$$\bar{\lambda} \gg l \gg \sigma, \tag{14а}$$

явная зависимость поправки к коэффициенту отражения за счет шероховатостей Δ_m от указанных параметров и продольного волнового числа $k_\parallel$ имеет вид (см. [2])

$$\Delta_m = 2\eta_m/\cos\theta = 2i\sigma^2 (k_0^2 - 2k_\parallel^2)/lk_\perp(k_\parallel). \tag{14б}$$

В этих условиях, как видно из (11б), при $\alpha = 0$ наличие шероховатости приводит лишь к сдвигу собственных частот резонатора на величину

$$\delta_n' = -\omega_n^{(0)} \sigma^2/lL. \tag{14в}$$

Физически этот результат можно объяснить тем, что с увеличением среднеквадратичной амплитуды шероховатости стенок резонатора растет эффективный объем области концентрации поля в резонаторе.

При конечных значениях α путем разложения знаменателя (9) по степеням α легко найти соответствующую поправку к (10б):

$$H_y^{(l)}(x, z) = \frac{2h_0 \cos k_0(z-L) \exp(ik_0 L)}{\eta_0 + \eta_L + i(k_0 L - \pi n)} \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{i\alpha^2 L\bar{\lambda}}{2} [\eta_0 + \eta_L + i(k_0 L - \pi n)]^{-1} \right\}. \tag{10в}$$

Как видно из (10в), в данном случае основной вклад в поправку за счет неоднородности поля вынуждающей волны вносит дисперсия резонансных свойств резонатора с гладкими стенками (первое слагаемое в правой части (10в)), а соответствующая величина поправки в резонансе действительно пропорциональна ε (см. (13а)).

В заключение заметим, что проведенное выше рассмотрение описывает зависимость амплитудно-частотных характеристик резонатора интерферометра Фабри—Перо от степени шероховатости поверхности стенок этого резонатора и не учитывает вклада эффекта дополнительного дифракционного рассеяния поля на статистических неровностях этих стенок, образующих торцы резонатора. Оценки этого эффекта показывают, что его вклад не может превысить дифракционной поправки ΔR_{mn} к коэффициенту отражения $R^{(0)}_{mn} = -1$ собственных волн резонатора с ровными краями зеркал его открытым торцом [4]:

$$\Delta R_{mn} \equiv (1+i)\beta \frac{\pi m}{k_0^{(n)} a}, \quad \beta \simeq 0{,}824, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{15a}$$

где m — номер продольной гармоники поля, a — длина зеркала резонатора.

В самом деле, дифракционное уменьшение амплитуды поля вблизи открытого торца резонатора, описываемое формулой (15a), должно приводить к соответствующему ослаблению вклада неровностей краев зеркал δR_{mn} в полный коэффициент отражения $R_{mn} = -1 + \Delta R_{mn} + \delta R_{mn}$,

$$|\delta R_{mn}| \sim |\Delta R_{mn}|\, |F_{mn}(k_0^{(n)}\sigma,\ k_0^{(n)} l)|. \tag{15б}$$

Функция $F_{mn}(k_0^{(n)}\sigma,\ k_0^{(n)} l)$, описывающая зависимость поправки на неровности краев зеркал резонатора от безразмерной амплитуды этих неровностей $k_0^{(n)}\sigma$ и соответствующей безразмерной длины корреляции $k_0^{(n)} l$, определяется решением системы из двух связанных двумерных сингулярных интегродифференциальных уравнений для поверхностных токов на зеркалах резонатора. Общие методы решения таких уравнений до настоящего времени не разработаны, а возможность применения итераций по амплитуде шероховатости краев зеркал ограничена в данном случае тем, что возмущения координат краев зеркал сосредоточены именно там, где искомые поверхностные токи не аналитичны. Тем не менее из физических соображений ясно, что функция $F_{mn}(k_0^{(n)}\sigma,\ k_0^{(n)} l)$ должна иметь следующую асимптотику:

$$\lim_{k_0^{(n)}\sigma \to 0} [F_{mn}(k_0^{(n)}\sigma,\ k_0^{(n)} l)] = 0. \tag{15в}$$

Это означает, что при малых значениях амплитуд неровностей краев зеркал их вклад в амплитудно-частотные характеристики резонатора интерферометра Фабри—Перо, действительно, является малым по сравнению с дифракционной поправкой ΔR_{mn} для открытых торцов с ровными краями зеркал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1957.
2. Басс Ф. Г., Фукс И. М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности.— М.: Наука, 1972.
3. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.—Л.: Гостехиздат, 1951.
4. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации.—М.: Сов. радио, 1966.

Научно-производственное объединение «Метрология»

Поступила в редакцию 1 декабря 1981 г.

THE THEORY OF THE FABRY—PEROT INTERFEROMETER WITH STATISTICALLY IRREGULAR MIRRORS

I. V. Bogatyreva, V. P. Danil'chenko, L. A. Pospelov

The calculations are given for eigen-frequencies and excitation problem of the Fabry—Perot interferometer TM-type excitations for the case of the interferometers plane statistically irregular mirrors.