ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 519.217

ОПТИМАЛЬНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПРИ СКАЧКООБРАЗНЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА

А. А. Мальцев, А. М. Силаев

Методами теории условных марковских процессов решается задача синтеза оптимальной нелинейной системы оценивания сообщения с учетом возможных скачкообразных изменений его параметров и наблюдений. Для апостериорной вероятности появления скачка и вспомогательных условных плотностей вероятности получена система взаимосвязанных уравнений, которая позволяет найти текущую оценку сообщения в реальном масштабе времени и медианную оценку момента скачка. В качестве примера рассматривается система оценивания величины случайного скачка частоты синусоидального сигнала, принимаемого на фоне аддитивных белых гауссовых шумов.

1. Методы теории оптимальной нелинейной фильтрации широко используются при обработке сигналов, которые наблюдаются на фоне аддитивных белых шумов [1, 2]. К настоящему времени получен ряд результатов по фильтрации дискретно-непрерывных и импульсных процессов [2–4]. При этом обычно предполагается, что статистические характеристики сигнала и результатов наблюдения известны и постоянны во времени. Однако во многих задачах параметры сигнала или результаты наблюдения могут изменяться со временем случайным образом. Использование для целей идентификации изменений параметров метода расширения числа переменных состояния или различных методов адаптивной фильтрации приводит, как правило, к сложным, трудно реализуемым схемам квазиоптимальной обработки.

На практике часто встречаются случаи скачкообразного изменения сигнала и результата наблюдения. Например, учет подобных «скачков» необходим в следящих системах сопровождения при маневре цели, в системах связи при случайных замираниях или при резком увеличении уровня помех.

В настоящей работе решается задача точного оптимального оценивания сообщения при случайных скачкообразных изменениях его параметров или результатов наблюдений.

2. Предположим, что скачки в сигнале и в результатах наблюдений происходят достаточно редко, так что система оценивания успевает «отрабатывать» каждый скачок в отдельности*. Это позволяет несколько упростить исходную задачу, заменив ее задачей синтеза системы оптимального оценивания, учитывающей наличие только одного скачка.

Пусть в интервале времени $[0, t]$ наблюдается m-мерный векторный случайный процесс

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{s}\,[\boldsymbol{x}(t);\; 1\,(t-\tau);\; t] + \boldsymbol{n}(t), \tag{1}$$

* Заметим, что при этом характерное время между скачками должно быть много больше постоянной времени перестройки системы оценивания. Переходные же процессы в самом сигнале могут быть и больше времени между скачками.

где $x(t)$ — вектор состояния, $n(t)$ — вектор m взаимно независимых белых гауссовых шумов со статистическими характеристиками

$$\langle n_\alpha(t)\rangle = 0, \quad \langle n_\alpha(t_1) n_\alpha(t_2)\rangle = (N_\alpha/2)\,\delta(t_2 - t_1) \tag{2}$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

$s[x(t);\ 1(t-\tau);\ t]$ — m-мерный вектор, зависящий от вектора $x(t)$, времени t и единичной функции $1(t-\tau)$, τ — момент скачка в наблюдении. Запись вектора наблюдений $y(t)$ в виде (1) очевидно эквивалентна тому, что функция $s(t)$ может иметь разный вид до и после момента времени τ:

$$s[x(t);\ 1(t-\tau);\ t] = \begin{cases} s_0(x, t), & t \leqslant \tau \\ s_1(x, t), & t > \tau \end{cases}. \tag{3}$$

Пусть компоненты вектора состояния $x(t)$ образуют марковскую совокупность, статистически не зависимую от $n(t)$. Будем считать, что плотность вероятности векторного процесса $x(t)$ удовлетворяет априорному уравнению

$$\partial W_x(x, t)/\partial t = L W_x(x, t), \tag{4}$$

где оператор $L(\cdot)$ также может иметь разные выражения до и после скачка:

$$L(\cdot) = \begin{cases} L_0(\cdot), & t \leqslant \tau \\ L_1(\cdot), & t > \tau \end{cases}. \tag{5}$$

Предположим, что момент скачка (переключения) τ заранее неизвестен. Задача обработки состоит в том, чтобы по принятой реализации $y(t)|_0^t$ получить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку фильтрации $\hat{x}(t)$ вектора состояния системы $x(t)$. Чтобы эта задача была полностью определена, необходимо в начальный момент времени $t=0$ задать совместную априорную плотность вероятности $P_{x\tau}(x,\tau$ случайной совокупности $\{x, \tau\}$.

3. На основании общих результатов теории условных марковских процессов [1, 2] для апостериорной плотности вероятности марковской совокупности $\{x, \tau\}$ запишем уравнение Стратоновича

$$\partial W_{x\tau}(x, \tau;\ t)/\partial t = L W_{x\tau}(x, \tau;\ t) + \tag{6}$$
$$+ [F(x, \tau, t) - \langle F(x, \tau, t)\rangle_{x\tau}]\, W_{x\tau}(x, \tau;\ t), \quad t \geqslant 0,$$

с начальным условием

$$W_{x\tau}(x, \tau;\ t)|_{t=0} = P_{x\tau}(x, \tau). \tag{7}$$

Здесь $L(\cdot)$ — тот же оператор, что и в уравнении (4), а функция $F(x, \tau, t)$ определяется выражением

$$F(x\ \tau, t) = \sum_{\alpha=1}^{m} (2y_\alpha(t)\, s_\alpha[x;\ 1(t-\tau);\ t] - s_\alpha^2[x;\ 1(t-\tau);\ t])\, N_\alpha^{-1} =$$
$$= \begin{cases} F_0(x, t), & t \leqslant \tau \\ F_1(x, t), & t > \tau \end{cases}, \tag{8}$$
$$\langle F(x, \tau, t)\rangle_{x\tau} \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} F(x, \tau, t)\, W_{x\tau}(x, \tau;\ t)\, dx\, d\tau.$$

С помощью введения некоторых вспомогательных функций преобразуем (6). Пусть $W_x(x, t)$ и $W_\tau(\tau, t)$ — одномерные апостериорные плотности верятности x и τ в момент времени t:

$$W_x(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, d\tau,$$

$$W_\tau(\tau, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, dx.$$

Введем следующие функции:

$$p_1(t) \equiv \langle 1(t-\tau)\rangle_\tau \equiv \int_{-\infty}^{t} W_\tau(\tau, t)\, d\tau,$$
$$p_0(t) \equiv 1 - p_1(t) \equiv \int_{t}^{\infty} W_\tau(\tau, t)\, d\tau, \tag{9}$$

имеющие смысл апостериорных вероятностей появления и непоявления скачка к моменту времени t. Кроме того, введем плотности вероятности $W_0(x, t)$ и $W_1(x, t)$ с помощью соотношений

$$W_0(x, t) \equiv (p_0(t))^{-1} \int_{t}^{\infty} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, d\tau,$$
$$W_1(x, t) \equiv (p_1(t))^{-1} \int_{-\infty}^{t} W_{x\tau}(x, \tau; t)\, d\tau. \tag{10}$$

Несложно показать, что $W_x(x, t)$ может быть представлена в виде этих двух плотностей вероятности с весами $p_0(t)$, $p_1(t)$:

$$W_x(x, t) = p_0(t)\, W_0(x, t) + p_1(t)\, W_1(x, t). \tag{11}$$

Используя как исходное уравнение для апостериорной плотности вероятности (6), найдем уравнения для введенных вспомогательных функций $p_1(t)$, $W_0(x, t)$, $W_1(x, t)$. Продифференцируем произведения $p_0(t)W_0(x, t)$ и $p_1(t)W_1(x, t)$ по времени с учетом представления (10) и уравнения (6):

$$p_0 \frac{\partial W_0}{\partial t} + W_0 \frac{dp_0}{dt} = -W_{x\tau}(x, t; t) + \int_{t}^{\infty} [L W_{x\tau} + (F - \langle F\rangle_{x\tau}) W_{x\tau}]\, d\tau,$$
$$p_1 \frac{\partial W_1}{\partial t} + W_1 \frac{dp_1}{dt} = W_{x\tau}(x, t; t) + \int_{-\infty}^{t} [L W_{x\tau} + (F - \langle F\rangle_{x\tau}) W_{x\tau}]\, d\tau. \tag{12}$$

Здесь для краткости опущены аргументы у функций.

Проинтегрируем эти выражения по x и воспользуемся (5), (8), (9). В результате получим уравнение для вероятности $p_1(t)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = W_\tau(t, t) + p_1(1-p_1)[\langle F_1(x, t)\rangle_1 - \langle F_0(x, t)\rangle_0],$$
$$\langle F_1(x, t)\rangle_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x, t) W_1(x, t)\, dx, \tag{13}$$
$$\langle F_0(x, t)\rangle_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F_0(x, t)\, W_0(x, t)\, dx.$$

Представим плотность вероятности $W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \tau; t)$ в виде произведения одномерной $W_\tau(\tau, t)$ и условной $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau; t)$ плотностей:

$$W_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \tau; t) = W_\tau(\tau, t)\, W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau; t). \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в (12), найдем уравнения для функций $W_0(\boldsymbol{x}, t)$ и $W_1(\boldsymbol{x}, t)$:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial W_0(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = -\frac{W_\tau(t, t)\,[W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_0(\boldsymbol{x}, t)]}{1 - p_1} + \\
+ L_0 W_0(\boldsymbol{x}, t) + (F_0 - \langle F_0\rangle_0)\, W_0(\boldsymbol{x}, t), \\
\frac{\partial W_1(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \frac{W_\tau(t, t)\,[W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/t; t) - W_1(\boldsymbol{x}, t)]}{p_1} + \\
+ L_1 W_1(\boldsymbol{x}, t) + (F_1 - \langle F_1\rangle_1)\, W_1(\boldsymbol{x}, t).
\end{gathered} \tag{15}$$

Начальные условия для системы уравнений (13), (15) получим из (7), (9), (10):

$$\begin{gathered}
p_1(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{0} P_\tau(\tau)\, d\tau = p_{10}, \\
W_0(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = \frac{1}{1 - p_{10}} \int_0^\infty P_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau, \\
W_1(\boldsymbol{x}, t)|_{t=0} = \frac{1}{p_{10}} \int_{-\infty}^{0} P_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\tau.
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $P_\tau(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_{x\tau}(\boldsymbol{x}, \tau)\, d\boldsymbol{x}$ — априорная плотность времени переключения τ.

Интересно отметить, что уравнения (15) для функций $W_0(\boldsymbol{x}, t)$, $W_1(\boldsymbol{x}, t)$ имеют вид, сходный с обычным уравнением Стратоновича для апостериорной плотности вероятности (см., например, (6)). Однако в правые части уравнений (15) входят дополнительные слагаемые, обусловленные возможностью появления скачка в текущий момент времени t.

4. Чтобы система уравнений (13), (15) стала замкнутой, необходимо определить апостериорную плотность вероятности появления скачка в момент $\tau = t$ $W_\tau(t, t)$ и условную плотность вероятности распределения $\boldsymbol{x}$ в этот же момент времени $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/t; t)$.

Найдем сначала выражения для функций $W_\tau(\tau, t)$ и $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau; t)$ при произвольном τ. Интегрируя уравнение (6) по $\boldsymbol{x}$, получим уравнение для плотности вероятности $W_\tau(\tau, t)$:

$$\begin{gathered}
\partial W_\tau(\tau, t)/\partial t = [G(\tau, t) - \langle G(\tau, t)\rangle_\tau]\, W_\tau(\tau, t), \quad t \geqslant 0, \\
W_\tau(\tau, t)|_{t=0} = P_\tau(\tau),
\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}
G(\tau, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\, W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau; t)\, d\boldsymbol{x} \equiv \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x/\tau}, \\
\langle G(\tau, t)\rangle_\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau, t)\, W_\tau(\tau, t)\, d\tau \equiv \langle F(\boldsymbol{x}, \tau, t)\rangle_{x\tau}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Подставляя (14) в (6) и используя (17), найдем уравнение и для условной плотности вероятности $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)$:

$$\frac{\partial W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)}{\partial t} = LW_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t) + [F(\boldsymbol{x},\ \tau,\ t) - \langle F(\boldsymbol{x},\ \tau,\ t)\rangle_{x/\tau}]\, W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t), \quad t \geqslant 0. \tag{19}$$

Начальное условие к уравнению (19) находится из (7):

$$W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)|_{t=0} = P_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau) = P_{x\tau}(\boldsymbol{x},\ \tau)/P_\tau(\tau).$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая независимых начальных распределений вектора состояния $\boldsymbol{x}$ и момента переключения τ*:

$$P_{x\tau}(\boldsymbol{x},\ \tau) = P_x(\boldsymbol{x})\, P_\tau(\tau).$$

Тогда начальное условие к уравнению (19) не будет зависеть от τ:

$$W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)|_{t=0} = P_x(\boldsymbol{x}). \tag{20}$$

Рассмотрим решение (19) при $t \leqslant \tau$. Учитывая (5), (8), уравнение (19) можно записать в виде

$$\frac{\partial W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)}{\partial t} = L_0 W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t) + [F_0(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_0(\boldsymbol{x},t)\rangle_{x/\tau}]\, W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau, \tag{21}$$

с начальным условием (20). Поскольку оператор $L_0(\cdot)$ и функция $F_0(\boldsymbol{x},\ t)$ в (21) и начальное условие (20) не зависят от τ, то и решение этого уравнения не будет зависеть от τ.

Сравним уравнение (21) для условной плотности вероятности $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau,\ t)$ с первым уравнением (15) для функции $W_0(\boldsymbol{x},\ t)$. Заметим, что начальные условия (16) для системы (15) и (13) с учетом априорной независимости распределений $\boldsymbol{x}$, τ принимают вид

$$W_{0,1}(\boldsymbol{x},\ t)|_{t=0} = P_x(\boldsymbol{x}), \quad p_1(t)|_{t=0} = \int\limits_{-\infty}^{0} P_\tau(\tau)\, d\tau. \tag{22}$$

Следовательно, функции $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t)$ и $W_0(\boldsymbol{x},\ t)$ совпадают в начальный момент времени $t=0$ (см. (20), (22)). Поскольку решение уравнения (21) не зависит от τ при любых $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то, сопоставляя первое уравнение системы (15) с (21), делаем вывод, что

$$W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/\tau;\ t) \equiv W_0(\boldsymbol{x},\ t), \quad 0 \leqslant t \leqslant \tau.$$

Таким образом, искомая условная плотность вероятности $W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/t;\ t)$ при всех $t \geqslant 0$ равна

$$W_{x/\tau}(\boldsymbol{x}/t;\ t) = W_0(\boldsymbol{x},\ t). \tag{23}$$

Уравнение для вспомогательной плотности вероятности $W_0(\boldsymbol{x},\ t)$ с учетом (23) при этом примет более простой вид:

$$\frac{\partial W_0(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} = L_0 W_0(\boldsymbol{x},\ t) + [F_0(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_0]\, W_0(\boldsymbol{x},\ t), \quad t \geqslant 0. \tag{24}$$

Решение уравнения (17) для $W_\tau(\tau,\ t)$ можно записать следующим образом:

---

* Заметим, что апостериорные значения $\boldsymbol{x}$ и τ при этом остаются статистически зависимыми.

$$W_\tau(\tau,\ t) = P_\tau(\tau)\exp\left\{\int\limits_0^t [G(\tau,\ t') - \langle G(\tau,\ t')\rangle_\tau]\,dt'\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{25}$$

При нахождении значения функции $W_\tau(\tau,\ t)$ в точке $\tau = t$ учтем, что для $t \geqslant t'$ выполняются соотношения (см. (18), (23), (8))

$$G(t,\ t') = \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_{x/\tau} = \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_0,$$

$$\langle G(\tau,\ t')\rangle_\tau = \langle F(\boldsymbol{x},\ \tau,\ t')\rangle_{x\tau} = p_0(t')\langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_0 + \\ + p_1(t')\langle F_1(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_1.$$

Подставляя эти выражения в (25), получим

$$\begin{gathered} W_\tau(t,\ t) = P_\tau(t)\,e^{-z(t)}, \quad t \geqslant 0, \\ z(t) = \int\limits_0^t p_1(t')\,[\langle F_1(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_1 - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t')\rangle_0]\,dt'. \end{gathered} \tag{26}$$

Систему уравнений (13), (15) теперь можно записать в виде

$$\begin{gathered} dp_1/dt = P_\tau(t)\,e^{-z} + p_1(1 - p_1)\,[\langle F_1(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_1 - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_0], \\ dz/dt = p_1\,[\langle F_1(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_1 - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_0], \\ \frac{\partial W_0(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} = L_0 W_0(\boldsymbol{x},\ t) + [F_0(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_0(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_0]\,W_0(\boldsymbol{x},\ t), \quad t \geqslant 0, \\ \frac{\partial W_1(\boldsymbol{x},\ t)}{\partial t} = L_1 W_1(\boldsymbol{x},\ t) + [F_1(\boldsymbol{x},\ t) - \langle F_1(\boldsymbol{x},\ t)\rangle_1]\,W_1(\boldsymbol{x},\ t) + \\ + [P_\tau(t)\,e^{-z}/p_1]\,[W_0(\boldsymbol{x},\ t) - W_1(\boldsymbol{x},\ t)] \end{gathered} \tag{27}$$

с начальными условиями (22) и $z(t)|_{t=0} = 0$.

Уравнения (27) решают поставленную задачу оптимальной нелинейной оценки вектора состояния $\boldsymbol{x}$. Действительно, используя равенство (11), оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ вектора состояния $\boldsymbol{x}(t)$ можно представить в виде суммы двух элементарных оценок $\hat{\boldsymbol{x}}_{0,1}(t)$, являющихся математическими ожиданиями вспомогательных плотностей вероятности $W_{0,1}(\boldsymbol{x},\ t)$:

$$\begin{gathered} \hat{\boldsymbol{x}}(t) = [1 - p_1(t)]\,\hat{\boldsymbol{x}}_0(t) + p_1(t)\,\hat{\boldsymbol{x}}_1(t) = \\ = [1 - p_1(t)]\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} W_0(\boldsymbol{x},\ t)\,d\boldsymbol{x} + p_1(t)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{x} W_1(\boldsymbol{x},\ t)\,d\boldsymbol{x}. \end{gathered} \tag{28}$$

Интересно отметить, что из решения уравнения (27) нельзя найти оптимальную оценку $\hat{\tau}$ времени скачка τ в любой текущий момент времени t, поскольку из (26), (27) нам будут известны значения апостериорной плотности вероятности $W_\tau(\tau,\ t)$ лишь для $\tau = t$. Однако, используя равенства (9), несложно увидеть, что в момент времени t_0, при котором

$$p_1(t_0) = 1/2,$$

выполняется соотношение

$$\int\limits_{-\infty}^{t_0} W_\tau(\tau,\ t_0)\,d\tau = \int\limits_{t_0}^{\infty} W_\tau(\tau,\ t_0)\,d\tau.$$

Отсюда непосредственно следует, что момент времени t_0 является оптимальной медианной оценкой времени переключения:

$$\hat{\tau}_{\text{мед}} = t_0.$$

Для уточнения оценки времени переключения $\hat{\tau}_{\text{мед}}$ при $t > t_0$ необходимо решать значительно более сложное уравнение (17) для $W_\tau(\tau, t)$.

5. В качестве примера рассмотрим систему оптимального измерения величины скачка частоты синусоидального сигнала в неизвестный априори момент времени τ. Считаем, что принимаемый сигнал имеет вид

$$y(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t + n(t), & t \leqslant \tau \\ A \sin (\omega_0 + \Omega) t + n(t), & t > \tau \end{cases}. \tag{29}$$

Здесь A, ω_0 — известные амплитуда и частота, $n(t)$ — белый гауссов шум с интенсивностью $N_0/2$, Ω — неизвестный скачок частоты, возникающий в неизвестный априори момент времени τ. Считаем, что в начальный момент времени $t=0$ заданы априорные плотности вероятности $P_\tau(\tau)$, $P_\Omega(\Omega)$.

Известно (см., например, [5]), что схемы, реализующие квазиоптимальную оценку Ω для системы без «скачков», представляют собой различные модификации ФАПЧ.

В принятых ранее обозначениях имеем

$$\begin{gathered} x(t) = \Omega = \text{const}, \quad s_0(\Omega, t) = A \sin \omega_0 t = s_0(t), \\ s_1(\Omega, t) = A \sin(\omega_0 + \Omega) t, \\ F_0(t) = \frac{2y(t) s_0(t) - s_0^2(t)}{N_0}, \quad F_1(\Omega, t) = \frac{2y(t) s_1(\Omega, t) - s_1^2(\Omega, t)}{N_0}. \end{gathered} \tag{30}$$

Так как Ω не меняется со временем, то $L_0(\cdot) = L_1(\cdot) = 0$. Подставляя (30) в уравнения (27), несложно получить

$$\begin{gathered} dp_1/dt = P_\tau(t) e^{-z} + p_1(1 - p_1)[\langle F_1(\Omega, t)\rangle_1 - F_0(t)], \\ dz/dt = p_1 [\langle F_1(\Omega, t)\rangle_1 - F_0(t)], \\ W_0(\Omega, t) = P_\Omega(\Omega), \\ \frac{\partial W_1(\Omega, t)}{\partial t} = \frac{P_\tau(t) e^{-z}}{p_1} [P_\Omega(\Omega) - W_1(\Omega, t)] + \\ + [F_1(\Omega, t) - \langle F_1(\Omega, t)\rangle_1] W_1(\Omega, t). \end{gathered} \tag{31}$$

Используя гауссово приближение для функций $W_0(\Omega, t)$, $W_1(\Omega, t)$ и метод усреднения по времени [2], из (31) получим следующую систему уравнений*:

$$\begin{gathered} \frac{dp_1}{dt} = P_\tau(t) e^{-z} + \frac{2A}{N_0} p_1(1 - p_1) y(t) [\sin(\omega_0 + \hat{\Omega}_1) t - \sin \omega_0 t], \\ \frac{dz}{dt} = \frac{2A}{N_0} p_1 y(t) [\sin(\omega_0 + \hat{\Omega}_1) t - \sin \omega_0 t]; \end{gathered} \tag{32}$$

* Заметим, что апостериорная плотность вероятности $W_\Omega(\Omega, t)$ при этом представляется суммой двух взвешенных гауссовых плотностей $W_0(\Omega, t)$ и $W_1(\Omega, t)$ (см. (11)) и является существенно негауссовой.

$$\frac{d\Omega_1}{dt} = \frac{P_\tau(t)e^{-z}}{p_1}(\hat{\Omega}_0 - \hat{\Omega}_1) + \frac{2A}{N_0}K_1 y(t)\cos(\omega_0 + \hat{\Omega}_1)t,$$
$$\frac{dK_1}{dt} = \frac{P_\tau(t)e^{-z}}{p_1}[(\hat{\Omega}_0 - \hat{\Omega}_1)^2 + K_0 - K_1] - \frac{A^2}{N_0}K_1^2, \quad t \geqslant 0. \tag{33}$$

Здесь $\hat{\Omega}_1(t)$, $K_1(t)$ — среднее значение и дисперсия распределения $W_1(\Omega, t)$, $\hat{\Omega}_0$, K_0 — среднее и дисперсия известного априорного распределения $P_\Omega(\Omega)$.

Начальные условия к (32), (33) легко получаются из (22) и имеют вид

$$\hat{\Omega}_1(t)|_{t=0} = \hat{\Omega}_0, \quad K_1(t)|_{t=0} = K_0, \quad p_1(t)|_{t=0} = \int_{-\infty}^{0} P_\tau(\tau)\,d\tau, \quad z(t)|_{t=0} = 0. \tag{34}$$

Искомая оценка $\hat{\Omega}$, согласно (28), находится с помощью выражения

$$\hat{\Omega}(t) = [1 - p_1(t)]\,\hat{\Omega}_0 + p_1(t)\hat{\Omega}_1(t). \tag{35}$$

Отметим, что для рассматриваемого примера оценка частоты $\hat{\Omega}_0$ не нужна, $\hat{\Omega}_0 = \Omega_0$, так как до скачка точно известно значение частоты ω_0.

Из уравнений (32)—(35) несложно получить и структурную схему для оценки скачка частоты $\hat{\Omega}$. Качественно опишем ее работу. Схему оптимальной оценки скачка частоты можно условно разделить на две взаимосвязанные части: блок «обнаружения» скачка, описываемый уравнениями (32), и собственно блок оценки частоты, описываемый уравнениями (33). Обнаружение скачка происходит путем сравнения (корреляционной обработки) принимаемого сигнала $y(t)$ с двумя гармоническими сигналами опорного генератора с известной частотой $\sin\omega_0 t$ и перестраиваемого генератора $\sin(\omega_0 + \hat{\Omega}_1)t$. На основании этой обработки формируется апостериорная вероятность скачка частоты $p_1(t)$ и коэффициент

$$\mu(t) = P_\tau(t)e^{-z(t)}/p_1(t) \equiv W_\tau(t, t)\Big/\int_{-\infty}^{t} W_\tau(\tau, t)\,d\tau,$$

регулирующий работу блока оценивания.

До изменения частоты в сигнале блок обнаружения вырабатывает значение вероятности $p_1(t)$, близкое к нулю (схема обнаружения находится в устойчивом стационарном состоянии $p_1(t) \approx 0$). При этом оценка частоты $\hat{\Omega}_1(t)$ и ее дисперсия $K_1(t)$ поддерживаются на уровнях, близких к априорным Ω_0 и K_0 (это происходит за счет большого коэффициента $\mu(t) \sim 1/p_1(t)$ перед первыми членами в уравнениях (33)). Искомая оценка $\hat{\Omega}$, вырабатываемая всей схемой, в силу (35) остается также близкой к Ω_0.

После скачка частоты в сигнале $y(t)$ оценка частоты $\hat{\Omega}_1$ в силу (33) несколько изменяется в сторону к истинному значению, что приводит к быстрому увеличению $p_1(t)$ от нуля до единицы (схема обнаружения «опрокидывается» к другому стационарному состоянию $p_1(t) \approx 1$, которое становится устойчивым). Показатель $z(t)$ при этом быстро возрастает, так что $\mu(t) \to 0$. Слагаемые, пропорциональные разностям $(\hat{\Omega}_0 - \hat{\Omega}_1)$ и $(\hat{K}_0 - \hat{K}_1)$, в правых частях уравнений (33) зануляются, и блок оценивания начинает работать, как обычная система ФАПЧ.

В заключение отметим, что уравнения оптимальной нелинейной фильтрации (27), (28), (22), найденные в настоящей работе с помощью введения двух вспомогательных оценивателей, дают текущую оценку состояния объекта в реальном масштабе времени и позволяют получить медианную оценку момента скачка. При этом по сравнению с известными алгоритмами (см., например, [6]) значительно уменьшаются вычислительные трудности, так как сокращается число решаемых уравнений и отпадает необходимость запоминания реализации процесса $y(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стратонович Р. Л. Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления.— М.: Гос. ун-т, 1966.
2. Тихонов В. И., Кульман Н. К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов.— М.: Сов. радио, 1975.
3. Тихонов В. И., Харисов В. Н., Смирнов В. А.— Радиотехника и электроника, 1978, 23, № 7, с. 1441.
4. Тихонов В. И., Ершов Л. А.— Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 3. с. 551.
5. Тихонов В. И., Ефименко В. С.— Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 4, с. 765.
6. Гришин Ю. П., Катиков В. М.— Зарубежная радиоэлектроника, 1977, № 6, с. 3.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 9 марта 1982 г.

OPTIMAL NONLINEAR ESTIMATION OF THE SIGNALS WITH JUMP-LIKE VARIATIONS OF THEIR PARAMETERS

A. A. Mal'tsev, A. M. Silaev

By methods of the theory of conditional Markov processes a problem is solved of the synthesis of the optimal nonlinear system for estimation of the signals with jump-like variations of their parameters. For the a posteriori probability of the jump appearance and the auxiliary conditional probability densities a system of the differential equations has been obtained. It permits one to find the current estimation of the signals. As an example, a system is considered for the estimation of the value of the random jump of the frequency of the sinusoidal signal received at the background of additive white Gaussian noise.