ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 621.372.826 : 621.396.677.85

СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПРОДОЛЬНО НАМАГНИЧЕННЫХ ФЕРРИТОВЫХ СТЕРЖНЕЙ*

В. М. Крехтунов, А. В. Лавров

Исследуются электромагнитные волны двумерно-периодической решетки параллельных прямоугольных продольно намагниченных ферритовых стержней. Предполагается, что все стержни идентичны и располагаются в узлах косоугольной сетки. Решение краевой задачи построено методом Галеркина. Численно исследована сходимость решения и рассчитаны зависимости коэффициентов распространения низших волн от геометрических параметров решетки стержней и характеристик гиромагнитной среды.

В связи с использованием открытых гиромагнитных структур для построения излучающих систем многоэлементных фазированных антенных решеток представляет интерес исследование характеристик собственных волн системы гиромагнитных стержней с учетом связи между ними.

Для анализа решеток круглых стержней эффективен метод частичных областей. Так, в [1] этим методом в трактовке работы [2] рассмотрена решетка круглых слоистых продольно намагниченных стержней. В [3] по методике, разработанной в [2] и [4], исследована периодическая решетка, содержащая в ячейке несколько круглых стержней, отличающихся параметрами гиромагнитной среды.

Использование проекционного метода [5] дает возможность свести задачу о собственных волнах решетки гиромагнитных стержней к известной алгебраической форме [6] для произвольной формы поперечного сечения стержней. В [7] сообщается о разработке этим же методом алгоритма нахождения собственных волн прямоугольного волновода с граничными условиями Флоке, заполненного намагниченным ферритом.

В данной работе для двумерно-периодической решетки прямоугольных продольно намагниченных стержней дается развитие проекционного алгоритма, предложенного в [8] для анализа решетки прямоугольных диэлектрических стержней.

Постановка и алгебраизация задачи. На рис. 1 показана исследуемая структура, однородная вдоль оси $0z$ и периодическая в поперечной плоскости. Предполагается, что ферритовые стержни идентичны, однородно намагничены вдоль оси $0z$ и окружены однородной изотропной средой с проницаемостями ε_0 и μ_0. Ферритовая среда описывается диэлектрической проницаемостью ε_1 и тензором магнитной проницаемости

$$\mu = \mu_0 \begin{vmatrix} \mu_1 & -j\mu_2 & 0 \\ j\mu_2 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

* Работа доложена на VIII Всесоюзном симпозиуме по дифракции и распространению волн (Львов, 1981 г.).

Исследование собственных электромагнитных волн в рассматриваемой структуре сводится к решению уравнения

$$L_H^{\mu} \boldsymbol{H}_\perp = p^2 k^2 \boldsymbol{H}_\perp ,$$

где $p = \beta/k$ — коэффициент распространения волны, β — продольное волновое число, $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, ω — частота гармонических колебаний, $\boldsymbol{H}_\perp$ — поперечный вектор напряженности магнитного поля, удовлетворяющего условию квазипериодичности Флоке:

$$\boldsymbol{H}_\perp (x_1 + d_1,\ y_1 + d_2) = \boldsymbol{H}_\perp (x_1,\ y_1) \exp\left[-j(\psi_1 + \psi_2)\right], \quad (1)$$

где $-\dfrac{d_1}{2} \leqslant x_1 \leqslant \dfrac{d_1}{2}$, $-\dfrac{d_2}{2} \leqslant y_1 \leqslant \dfrac{d_2}{2}$, ψ_1 и ψ_2 — набеги фазы поля на периодах структуры, задаваемые в интервалах $-\pi \leqslant \psi_1 \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant \psi_2 \leqslant \pi$.

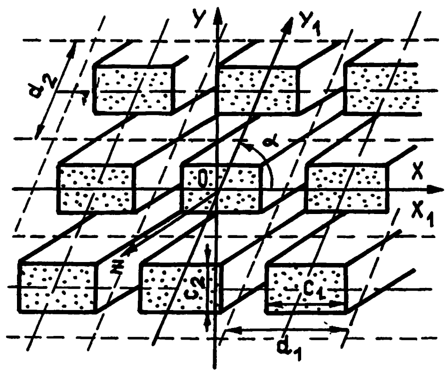

Рис. 1.

Элементы дифференциального оператора L_H^{μ} определяются выражениями

$$L^{(11)} = \mu_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - j\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} + \left(2\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - j\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + j\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x^2} - j\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y} + k^2\varepsilon\mu_1,$$

$$L^{(12)} = j\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (\mu_1 - 1)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + 2j\frac{\partial\mu_2}{\partial x} + \frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\mu_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial y} + j\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x^2} + jk^2\varepsilon\mu_2, \quad (2)$$

$$L^{(21)} = -j\mu_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\mu_1 - 1)\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} + \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - 2j\frac{\partial\mu_2}{\partial y} + \frac{\partial\mu_1}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\mu_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2\mu_1}{\partial x\,\partial y} - j\frac{\partial^2\mu_2}{\partial y^2} - jk^2\varepsilon\mu_2,$$

$$L^{(22)} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mu_1\frac{\partial^2}{\partial y^2} + j\mu_2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} - \left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} - j\frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(2\frac{\partial\mu_1}{\partial y} + j\frac{\partial\mu_2}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^2\mu_1}{\partial y^2} + j\frac{\partial^2\mu_2}{\partial x\,\partial y} + k^2\varepsilon\mu_1.$$

Искомое поле в области элементарной ячейки S_0 периодической структуры представим в виде*

$$\boldsymbol{H}_\perp(x,\ y) = \sum_{l=1}^{2}\ \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\ \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{ln_1n_2} f_{ln_1n_2}, \quad (3)$$

* Волновой множитель $\exp[j(\omega t - \beta z)]$ опущен.

где $\{f_{ln_1n_2}\}$ — полная в области S_0 ортонормированная система векторных функций, удовлетворяющих условию (1) и определяемых выражениями

$$f_{1n_1n_2} = (k_{n_1} x_0 + k_{n_1n_2} y_0) f_{n_1n_2} / \left(\sqrt{S_0}\, k_{rn_1n_2}\right),$$

$$f_{2n_1n_2} = (-k_{n_1n_2} x_0 + k_{n_1} y_0) f_{n_1n_2} / \left(\sqrt{S_0}\, k_{rn_1n_2}\right),$$

$$f_{n_1n_2} = \exp\left[-j(k_{n_1} x + k_{n_1n_2} y)\right], \quad S_0 = d_1 d_2 \sin\alpha,$$

$$k_{rn_1n_2} = \sqrt{k_{n_1}^2 + k_{n_1n_2}^2}, \quad k_{n_1} = (2\pi n_1 + \psi_1)/d_1,$$

$$k_{n_1n_2} = (2\pi n_2 + \psi_2)/(d_2 \sin\alpha) - (2\pi n_1 + \psi_1)/(d_1 \operatorname{tg}\alpha).$$

После выполнения процедуры проектирования по Галеркину задача нахождения полей и постоянных распространения волн сводится к решению проблемы собственных значений

$$MV = p^2 V,$$

где элементы матрицы M определяются выражениями

$$M^{(ll)}_{m_1m_2n_1n_2} = \left(L_H^{\mu} f_{ln_1n_2},\ f_{lm_1m_2}\right). \tag{4}$$

Из (4) с учетом (2) и (3) после тождественных преобразований для элементов матрицы $M^{(ll)}_{m_1m_2n_1n_2}$ находим

$$M^{(11)}_{m_1m_2n_1n_2} = \left(1 - \chi_{rn}^2\right)\delta_{mn} + I_{mn}\left\{\left[\varepsilon_r - 1 - (\mu_1 - 1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\chi_{rm}^2 - \varepsilon_r\right)\right] q_1 + (\mu_1 - 1)\varphi_1 - j\mu_2\left[\left(\chi_{rm}^2 - \varepsilon_r\right) q_2 + \varkappa_1\right]\right\},$$

$$M^{(12)}_{m_1m_2n_1n_2} = I_{mn}\left\{(\varepsilon_r - 1) q_2 - (\mu_1 - 1)\left[\left(\chi_{rm}^2 - \varepsilon_r\right) q_2 + \varkappa_1\right] +\right.$$
$$\left. + j\mu_2\left[\left(\chi_{rm}^2 - \varepsilon_r\right) q_1 - \varphi_1\right] - 2\tilde{\varepsilon}\,\chi_{rn}^2 q_2\right\},$$

$$M^{(21)}_{m_1m_2n_1n_2} = -I_{mn}\left\{(\varepsilon_r - 1) q_2 - (\mu_1 - 1)\left[\varkappa_2 - \varepsilon_r q_2\right] - j\mu_2(\varphi_2 + \varepsilon_r q_1)\right\},$$

$$M^{(22)}_{m_1m_2n_1n_2} = \left(1 - \chi_{rn}^2\right)\delta_{mn} + I_{mn}\left\{(\varepsilon_r - 1) q_1 + (\mu_1 - 1)\times\right.$$
$$\left.\times(\varphi_2 + \varepsilon_r q_1) - j\mu_2\left[\varkappa_2 - \varepsilon_r q_2\right] - 2\tilde{\varepsilon}\,\chi_{rn}^2\left(q_1 - \chi_{rm}^2\right)\right\}.$$

В выражениях для $M^{(ll)}_{m_1m_2n_1n_2}$ обозначено

$$\chi_{rn} = \sqrt{\chi_{n_1}^2 + \chi_{n_1n_2}^2}, \quad \chi_{n_1} = k_{n_1}/k, \quad \chi_{n_1n_2} = k_{n_1n_2}/k,$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1/\varepsilon_0, \quad \tilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_0),$$

$$q_1 = \chi_{n_1}\chi_{m_1} + \chi_{n_1n_2}\chi_{m_1m_2}, \quad q_2 = \chi_{n_1}\chi_{m_1m_2} - \chi_{m_1}\chi_{n_1n_2},$$

$$\varkappa_{1(2)} = 2\left(g_{1(2)}^2 \chi_{n_1n_2}\chi_{m_1} - g_{2(1)}^2 \chi_{n_1}\chi_{m_1m_2}\right),$$

$$g_1 = \chi_{n_1} - \chi_{m_1}, \quad g_2 = \chi_{n_1n_2} - \chi_{m_1m_2},$$

$$\varphi_{1(2)} = 2\left(g_{1(2)}^2 \tilde{\chi}_{n_1}\tilde{\chi}_{m_1} + g_{2(1)}^2 \tilde{\chi}_{n_1n_2}\tilde{\chi}_{m_1m_2}\right),$$

$$\tilde{\chi}_{n_1} = \chi_{n_1}/\chi_{rn}, \quad \tilde{\chi}_{n_1n_2} = \chi_{n_1n_2}/\chi_{rn},$$

$$I_{mn} = \frac{c_1 c_2}{S_0} \frac{\sin u_1}{u_1} \frac{\sin u_2}{u_2},$$

$$u_1 = 0{,}5\, c_1 (k_{n_1} - k_{m_1}), \quad u_2 = 0{,}5\, c_2 (k_{n_1 n_2} - k_{m_1 m_2}),$$

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m_1 = n_1, \quad m_2 = n_2 \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}.$$

Анализ решения и численные результаты. Вычислительный алгоритм, построенный на основе решения краевой задачи, реализован в виде программы на алгоритмическом языке ФОРТРАН для ЭВМ типа ЕС1040. При этом использована программа решения проблемы собственных значений по методу Якоби с понижением нормы для комплексной матрицы, описанная в [10] на АЛГОЛе. Рассчитывались значения коэффициентов распространения собственных волн $p_\nu^{(N_1, N_2)}$, где ν — номер волны типа HE_ν при условии расположения всех волн структуры в порядке убывания значений p_ν^2, $N_{1(2)}$—целое число, характеризующее количество собственных функций, учитываемых в представлении поля (3). При $N_1 = N_2 = \overline{N}$ учитывается $\overline{N_0} = (2N + 1)^2$ собственных функций, матрица M имеет порядок $2\overline{N}_0$ и в процессе расчетов находятся характеристики $2N_0$ низших собственных волн как распространяющихся, так и затухающих.

С целью проверки правильности функционирования программы для ЭВМ и анализа эффективности построенного решения рассмотрен ряд частных случаев исследуемой структуры, допускающих точное решение задачи в аналитически замкнутом виде или изученных другими методами.

1) При $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 0$ исследуемая периодическая гиромагнитная структура вырождается в решетку прямоугольных диэлектрических стержней, изученную в [8]. Во всех случаях численные результаты по разработанному алгоритму совпадают с результатами расчетов по формулам работы [8].

2) В случае $d_{1(2)} = \text{const}$ и $c_{1(2)} = 0$ решетка гиромагнитных стержней вырождается в однородную среду с параметрами ε_0 и μ_0. При этом рассчитываемые значения p_ν точно совпадают с коэффициентами распространения волн в однородном изотропном канале Флоке.

3) При $c_1 = d_1$ и $c_2 = d_2 \sin \alpha$ исследуемая периодическая структура вырождается в однородную ферритовую среду, намагниченную в направлении оси $0z$. В этом случае рассчитанные значения p_ν точно совпадают с коэффициентами распространения волн в однородном гиромагнитном канале Флоке.

При других значениях параметров исследуемой структуры заключение о точности расчета можно сделать лишь на основе численного анализа сходимости решений, полученных при различных значениях N. В качестве примера в таблице для двух структур с различными параметрами приведены численные значения $p_\nu^{(N)}$, найденные для нескольких низших типов волн. Расчет выполнен для решетки стержней с параметрами $d_1 = d_2 = d$, $\varepsilon_r = 10$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0{,}1$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$. При $d = 0{,}3\lambda$ принято $\alpha = 90°$, $c_1 = c_2 = 0{,}2\lambda$.

В таблице знак минус у значений p_ν свидетельствует о том, что соответствующая волна — затухающая, т. е. $p_\nu^2 < 0$. При $d = 0{,}5\lambda$ приведены результаты расчета для решетки с параметрами $\alpha = 60°$, $c_1 = 0{,}3\lambda$, $c_2 = c_1 \sin \alpha$. Проведенные численные исследования сходимости решения показывают, что точность расчета значений p_ν увеличивается с уменьшением периода структуры, диэлектрической проницаемости стержней, параметра μ_2 и отношения $(S_0 - S_1)/S_0$. Форма элементарной ячейки структуры и параметры ψ_1, ψ_2 мало влияют на сходимость решения.

Таблица

d/λ	ν	$p_\nu^{(N)}$			
		$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0,3	1	2,333	2,118	2,220	2,205
	2	2,134	1,735	1,896	1,884
	3		−0,796	−1,500	−1,450
	4		−0,834	−1,565	−1,524
	5		−2,075	−2,172	−2,169
	6		−2,533	−2,564	−2,561
0,5	1	2,145	2,522	2,564	2,524
	2	1,970	2,107	2,176	2,128
	3		1,338	1,364	1,377
	4		1,045	0,999	1,121
	5		0,768	0,823	0,866

На рис. 2 показаны рассчитанные зависимости $p_\nu(c_1/\lambda)$ для структуры с параметрами $d = 0{,}5\lambda$, $\alpha = 60°$, $c_2 = c_1 \sin\alpha$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $\mu_2 = 0{,}1$. Как видно из приведенных данных, с увеличением сечения

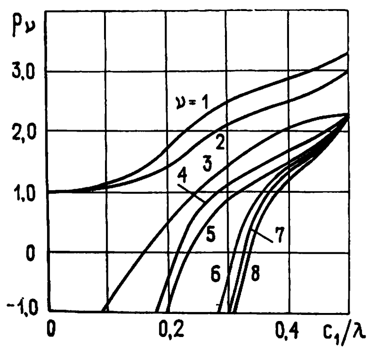

Рис. 2.

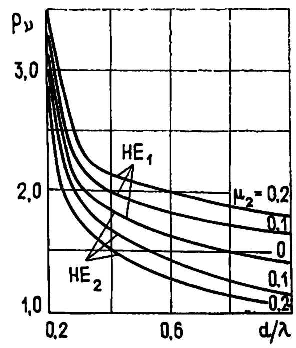

Рис. 3.

ферритовых стержней коэффициенты распространения всех изученных волн увеличиваются. При $S_1 \to S_0$ волны типов HE_1 и HE_2 вырождаются в плоские кругополяризованные волны, распространяющиеся в однородной гиромагнитной среде. Их коэффициенты распространения точно совпадают с рассчитанными по известной формуле

$$p_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_r(\mu_1 \pm \mu_2)}.$$

Изменение коэффициентов распространения низших волн типов HE_1 и HE_2 в зависимости от периода структуры иллюстрируется графиками рис. 3, рассчитанными при $\alpha=90°$, $c_1=c_2=0{,}2\lambda$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $\mu_2=0{,}1$; 0,2. Здесь же для сравнения показаны зависимости $p_\nu(d/\lambda)$ для решетки диэлектрических стержней ($\mu_2=0$). С ростом значений μ_2 увеличивается различие значений коэффициентов распространения двух низших волн решетки. Во всех случаях с ростом d/λ

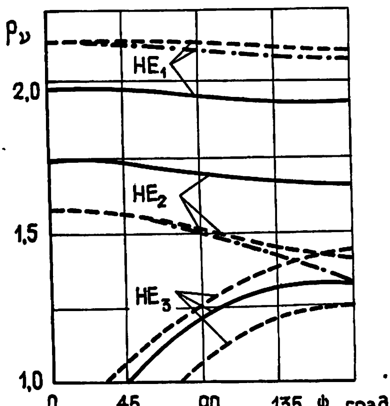

Рис. 4.

значения p_ν асимптотически стремятся к значениям p соответствующих типов волн одиночного открытого прямоугольного гиромагнитного волновода.

На рис. 4 показаны зависимости $p_\nu(\psi_1)$ для трех низших типов волн, рассчитанные при $\psi_2=0$ для структуры с параметрами $d=0{,}5\lambda$, $\alpha = 90°$, $\mu_2 = 0{,}05$. Размеры поперечного сечения стержней при неизменной их площади $S_1=0{,}05\lambda^2$ приняты равными: $c_1=0{,}15\lambda$, $c_2=0{,}33\lambda$ (штриховые линии), $c_1 = 0{,}33\lambda$, $c_2 = 0{,}15\lambda$ (штрихпунктирные линии), $c_1=c_2=\sqrt{S_1}$ (сплошные линии). Как видно из приведенных графиков зависимости $p_\nu(\psi_1)$, при неизменных параметрах S_1 и μ_2 свойства периодической решетки прямоугольных гиромагнитных стержней существенным образом зависят от соотношения размеров поперечного сечения c_1 и c_2.

---

1. Построенное решение краевой задачи может быть обобщено на случай более сложных периодических структур, содержащих в одной ячейке систему прямоугольных гиромагнитных стержней, отличающихся размерами поперечного сечения и параметрами среды.

2. Разработанный вычислительный алгоритм может быть также использован для приближенного расчета коэффициентов распространения низших собственных волн прямоугольного продольно намагниченного ферритового стержня, теория которого до настоящего времени не разработана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крехтунов В. М. В кн.: V Международная конференция по гиромагнитной электронике и электродинамике. Вильнюс.— Т. 1.— М.: 1980, с. 142.
2. Веселов Г. И., Крехтунов В. М.— Радиотехника, 1970, **25**, № 8, с. 52.
3. Авдеев С. М., Бей Н .А., Мазаник С. М.— Радиотехника и электроника, 1982, **27**, № 1, с. 46.
4. Веселов Г. И., Крехтунов В. М.— Радиотехника и электроника, 1969, **14**, № 8, с. 1399.
5. Никольский В. В. В кн.: Прикладная электродинамика. Сборник научно-методических статей, вып. 1.— М.: Высшая школа, 1977, с. 4.
6. Никольский В. В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики.— М.: Наука, 1967.
7. Феоктистов В. Г. В кн.: Прикладная электродинамика. Сборник научно-методических статей, вып. 2.— М.: Высшая школа, 1978, с. 120.
8. Крехтунов В. М., Тюлин В. А.— Изв. вузов — Радиофизика, 1981, **24**, № 5, с. 621.
9. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток.— М.: Мир, 1974.
10. Уилкинсон, Райнш. Сборник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра./Пер. с англ. под ред. Ю. И. Топчеева. — М.: Машиностроение, 1976.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию 5 мая 1982 г.

EIGENWAVES OF A PERIODIC ARRAY OF RECTANGULAR LONGITUDINALLY MAGNETIZED FERRITE RODS

V. M. Krekhtunov, A. V. Lavrov

Electromagnetic waves are investigated of a two-dimensionally periodic array of parallel rectangular longitudinally magnetized ferrite rods. It is assumed that all rods are identical and located in junctions of an oblique-angled array. The solution of the boundary problem is build by the Galerkin method. The solution convergence is numerically investigated and dependences have been calculated of the propagation coefficients of lower waves from geometrical parameters of the array, rods and characteristics of the gyromagnetic medium.