ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 1 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 534.12

О НЕКОНТАКТНОМ ИЗМЕРЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ВИБРИРУЮЩИХ МЕМБРАН И ПЛАСТИН

Р. А. Дудник, А. Э. Екимов

Предложен алгоритм определения параметров вибрирующих мембран и пластин по характеристикам поля излучения в зоне Фраунгофера. Алгоритм основан на использовании критериев подобия задачи о колебаниях пластин и мембран в упругой среде. Определяемыми параметрами являются: для мембран — длина и отношение натяжения к плотности единицы поверхности; для пластин — длина, толщина, отношение цилиндрической жесткости к плотности единицы поверхности и тип граничных условий по периметру пластины.

Известны решения задачи об излучении различных вибрирующих механических систем [1–3]. Представляет интерес, например в гидрокаустике, решение обратной задачи — определение параметров механических систем по характеристикам излученного акустического поля. На принципиальную возможность решения обратной задачи для колеблющейся струны указывал Рэлей [1]. Основная трудность в решении обратной задачи состоит в том, что заранее неизвестен вид излучающей системы (например, мембрана, пластина, оболочка), тип граничных условий (свободный край, шарнирное опирание, закрепление). Поэтому необходим критерий, позволяющий предварительно установить вид колеблющейся системы и тип граничных условий по периметру системы, а затем определить конкретные значения параметров для данного вида излучающей системы.

Проиллюстрируем возможность построения такого критерия в решении обратной задачи для простейших моделей механических систем вида мембрана и пластина. Ограничимся для определенности плоской задачей об излучении вибрирующих мембран и пластин, закрепленных в акустически жестком экране. Пусть экран установлен в плоскости $z=0$, длина системы вдоль оси x равна a, толщина d; система излучает в полупространстве $z \geqslant 0$; мембрана совершает поперечные, тонкая пластина — изгибные колебания.

Рассматриваемым системам в зависимости от их конкретных параметров и типа закрепления по периметру соответствуют определенные значения собственных частот ω_q и собственных форм колебаний $\psi_q(x)$ [1–4]. Например, для мембраны с закрепленными краями

$$\omega_q = \sqrt{\frac{T_0}{m_s}}\frac{q\pi}{a}, \qquad \psi_q(x) = \frac{q\pi x}{a}, \tag{1}$$

где q — номер формы колебаний мембраны, T_0, m_s — натяжение и масса единицы площади мембраны. Для пластины с шарнирно-опертыми краями

$$\omega_q = \sqrt{\frac{D}{m_s}}\left(\frac{q\pi}{a}\right)^2, \qquad \psi_q(x) = \sin\frac{q\pi x}{a}, \tag{2}$$

где $D = Ed^3/(12(1-\nu^2))$, $m_s = \rho d$ — цилиндрическая жесткость и масса единицы площади; E, ν, ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины. Для пластины, оба края которой свободны,

$$\omega_q = \sqrt{\frac{D}{m_s}}\left(\frac{\xi_q}{a}\right)^2,$$

$$\psi_q(x) = (\cos\xi - \operatorname{ch}\xi)\left(\cos\frac{\xi x}{a} + \operatorname{ch}\frac{\xi x}{a}\right) + (\sin\xi + \operatorname{sh}\xi)\left(\sin\frac{\xi x}{a} + \operatorname{sh}\frac{\xi x}{a}\right), \tag{3}$$

где ξ_q являются корнями дисперсионного уравнения $\operatorname{ch}\xi^{(1)}\cos\xi^{(1)} = 1$, т. е. $\xi_1 = 4{,}730$, $\xi_2 = 7{,}853$, $\xi_3 = 10{,}996$, $\xi_4 = 14{,}137$, $\xi_5 = 17{,}278$; значения корней с номерами $q \geqslant 6$ оцениваются с помощью соотношения $\xi_q^{(1)} = (2q+1)\pi/2$. Для пластины, у которой оба края защемлены, собственные частоты совпадают с (3). Для пластины, у которой один край свободен, а другой защемлен, собственные частоты ω_q определяются соотношениями типа (3), где ξ_q удовлетворяют другому дисперсионному соотношению $\cos\xi^{(2)}\operatorname{ch}\xi^{(2)} = -1$, т. е. $\xi_1 = 1{,}875$, $\xi_2 = 4{,}694$, $\xi_3 = 7{,}855$, $\xi_4 = 10{,}996$, $\xi_5 = 14{,}137$, а значения корней с номерами $q \geqslant 6$ оцениваются с помощью соотношения $\xi_q^{(2)} = (2q-1)\pi/2$.

Согласно (1)—(3), различным моделям механических систем в зависимости от их параметров соответствуют различные значения собственных частот. Однако характер распределения частот в спектре зависит только от вида колебательной системы и типа граничных условий по ее периметру. В качестве иллюстрации в табл. 1 представлены безразмерные спектры собственных частот рассматриваемых систем:

$$\gamma_q = \omega_q/\omega_1, \tag{4}$$

где ω_1 — частота низшей формы колебаний системы.

При $q \geqslant 6$ для моделей пластин: с защемленными (или свободными) краями и один край защемлен, другой — свободен, безразмерные спектры γ_q определяются согласно (3) следующими соотношениями:

— для моделей пластин с защемленными (или свободными) краями

$$\gamma_q^{(3)} = (2q+1)^2 \cdot 0{,}111, \tag{5а}$$

— для моделей пластин с одним защемленным и другим свободным краями

$$\gamma_q^{(4)} = (2q-1)^2 \cdot 0{,}75. \tag{5б}$$

Таблица 1

i	Вид системы	q: 1	2	3	4	5	6	ω_1
1	Мембрана	1	2	3	4	5	6	$\sqrt{\frac{T_0}{m_s}}\frac{\pi}{a}$
2	Пластина с шарнирно-опертыми краями	1	4	9	16	25	36	$\sqrt{\frac{D}{m_s}}\left(\frac{\pi}{a}\right)^2$
3	Пластина с защемленными краями	1	2,75	5,35	8,89	13,3	18,8	$\sqrt{\frac{D}{m_s}}\left(\frac{\xi_1^{(1)}}{a}\right)^2$
4	Пластина с защемленными и свободными краями	1	6,26	17,6	34,3	56	85,3	$\sqrt{\frac{D}{m_s}}\left(\frac{\xi_1^{(2)}}{a}\right)^2$

Отметим, что безразмерный спектр собственных частот мембраны эквидистантен, а у пластины с шарнирно-опертыми краями распределен, как квадрат натуральных чисел (см. (1), (2)), т. е.

$$\gamma_q^{(1)} = q, \qquad \gamma_q^{(2)} = q^2. \tag{6}$$

Эта особенность спектра связана с влиянием дисперсии изгибных волн в пластине (см. (5а), (5б)). Здесь $i = 1 \div 4$ устанавливает связь спектра $\gamma_q^{(i)}$ с номером рассматриваемой системы, указанным в табл. 1.

Таким образом, из табл. 1 и соотношений (5а), (5б), (6) следует, что каждому виду рассматриваемой распределенной колебательной системы конечных размеров соответствует определенный характер безразмерного спектра собственных частот. Спектр $\gamma_q^{(i)}$ является критерием подобия задачи о колебании распределенных ограниченных систем, так как значения $\gamma_q^{(i)}$ не зависят от параметров данной конкретной системы, от ее линейных размеров и свойств материала системы. Поэтому спектр $\gamma_q^{(i)}$ может быть использован в решении обратной задачи — по характеру спектра собственных частот $\gamma_q^{(i)}$ можно установить вид излучающей системы и тип граничных условий по периметру системы.

Очевидно, что возможность решения обратной задачи зависит от способа возбуждения колебательной системы, поскольку для успешного определения параметров системы необходимо получить ее излучение на нескольких собственных частотах. В принципе, это можно реализовать либо при активной локации системы акустическим сигналом с изменяющейся частотой, либо при возбуждении системы «внутренними» силами с достаточно широким частотным спектром. В этих случаях можно ожидать наиболее интенсивного излучения на нескольких резонансных частотах системы при

$$\omega = \omega_q, \quad q = n, m, l, \ldots \tag{7}$$

Отметим, что максимум поля излучения в зоне Фраунгофера для каждой формы колебаний с фиксированным номером определяется условием [2, 3]

$$\sin \Theta_q = b_q C / a\omega. \tag{8}$$

Здесь $q = n, m, l$ — неизвестные номера форм колебаний системы, вид и параметры которой необходимо определить, ω — частота вынужденных колебаний, Θ_q — угол между нормалью к системе (осью z) и максимумом диаграммы направленности излучения q-й формы; значения b_q равны: $b_q = q\pi$ — для мембраны и $b_q = q\pi$, $b_q^{(3)} = \xi_q^{(1)}$, $b_q^{(4)} = \xi_q^{(2)}$ — для пластины с различными типами граничных условий в соответствии с обозначениями табл. 1 и выражением (3); C — скорость звуковой волны в окружающей среде.

Предположим, что удалось определить характеристики поля излучения некоторой вибрирующей системы: известны несколько частот ω_q (7) и направлений Θ_q (8), на которые приходятся максимумы излучения.

Предлагается следующий алгоритм обработки частотного ω_q и пространственного Θ_q спектров излучения неизвестной системы с целью определения вида излучающей системы, типа граничных условий, линейных размеров и параметров материала системы.

1) По отношению экспериментально измеренных частот ω_q или углов Θ_q определяется характер безразмерного спектра $\gamma_q^{(i)}$, что позволяет однозначно установить вид излучающей системы, а если частоты соответствуют низшим формам колебаний,— то и тип граничных условий (см. табл. 1).

2) Методом подбора определяются номера n, m, l возбужденных резонансных форм колебаний (7) и находится значение наименьшего делителя в спектре $\gamma_q^{(l)}$ (4), т. е определяется ω_1 — частота низшей формы колебаний системы.

3) По значениям углов Θ_q (8) или по их отношению определяется длина системы a, а затем по известной ω_1 находится отношение $\sqrt{T_0/m_s} = \omega_1 a/\pi$ — для мембраны и отношение $\sqrt{D/m_s}$ — для пластины с различными граничными условиями: либо $\sqrt{D/m_s} = \omega_1 a^2/\pi^2$, либо $\sqrt{D/m_s} = \omega_1 a^2/\xi_1^2$ (см. табл. 1).

4) По известному значению $\sqrt{D/m_s}$ с помощью соотношения $\sqrt{D/m_s} = d\sqrt{E/12(1-\nu^2)\rho}$ определяется толщина пластины d. При этом используются табличные значения E, ν, ρ — параметров пластин, зависящих от материала (например, сталь, алюминий, латунь), и отношение E/ρ определяется однозначно.

Отметим, что в случае возбуждения системы монохроматической силой условие (7) может не выполняться, однако по экспериментально измеренным значениям углов Θ_q с помощью условия (8) возможно определение длины системы a. При этом по отношению синусов углов Θ_q можно определить тип граничных условий для пластины. В качестве примера было проведено определение длины пластины a по экспериментальным результатам измерения пространственной структуры поля излучения пластины, представленным в табл. 5 [2]. По отношению синусов углов Θ_q методом подбора найдены номера форм колебаний пластины: значения q лежат в интервале $q=29\div36$. При таких высоких номерах не удается однозначно определить тип граничных условий по пространственному спектру поля излучения пластины. Однако с учетом значения частоты монохроматического излучения $f=967$ *кГц* из соотношения (8) находим, что длина системы $a = 30{,}2$ *мм*. Этот результат хорошо соответствует реальной системе (с погрешностью порядка $\sim 1\%$), так как в экспериментах использовалась пластина длиной $a = 30$ *мм*.

Таким образом, на примере простейших механических систем — мембран и тонких пластин — проиллюстрирована принципиальная возможность решения обратной задачи о нахождении параметров излучающей системы по характеристикам акустического поля излучения в зоне Фраунгофера и предложен алгоритм ее решения. Представляет интерес получение аналогичных алгоритмов решения обратной задачи для двумерных мембран и пластин, пластин с кривизной, оболочек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей. Теория звука.— М.: Гостехиздат, т. 1, 1955.
2. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинками и оболочками в жидкости.— М.: изд. АН СССР, 1955.
3. Шендеров Е. Л. Волновые задачи гидроакустики.— Л.: изд. Судостроение, 1972.
4. Вибрация в технике. Т. 1. Справочник.— М.: изд. Машиностроение, 1979.

Институт прикладной физики
АН СССР

Поступила в редакцию
14 апреля 1982 г.

NONCONTACT MEASUREMENT OF PARAMETERS OF VIBRATING MEMBRANES AND PLATES

R. A. Dudnik, A. E. Ekimov

An algoritm is suggested for the definition of vibrating membrane and plate parameters over the radiating field characteristics in the Fraunhofer zone. The algorithm is based on the use of the similarity criterion of the problem on oscillations of plates and membranes in an elastic medium. Determinable parameters are: for membranes — the length and the relation between the tension and the density of the surface unit; for plates — the length, depth, the relation between the cylindrical stiffness and the density of the surface unit and the type of the boundary conditions over the plate perimeter.