

для которого существует точное решение радиального уравнения внутри неоднородности и, следовательно, точное решение задачи рассеяния. Результаты вычислений дифференциального сечения рассеяния  $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$  по точным и приближенным

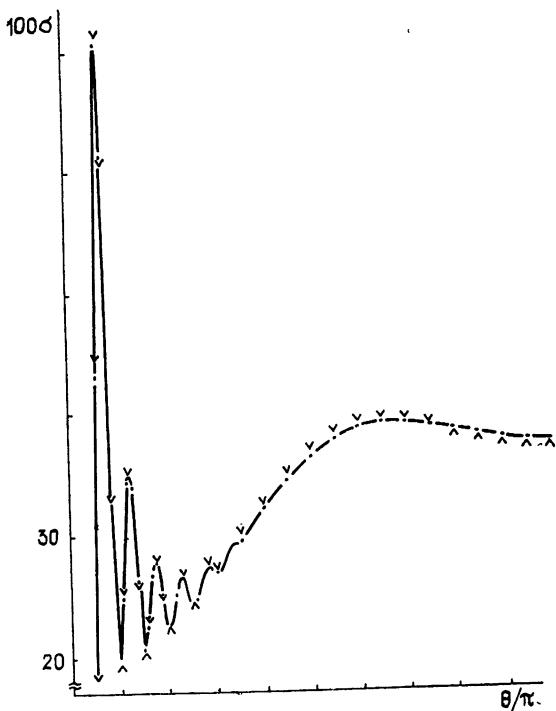


Рис. 1.

формулам для  $\alpha = 2,5$ ,  $\kappa = 20,5$  совпали во всем интервале углов рассеяния с точностью не ниже 4%. Эти результаты представлены на рис. 1, где штрихпунктирная кривая соответствует точному решению, а галочки — приближенному. В области характерного максимума  $\sigma$  вблизи малых углов рассеяния, не показанной на рисунке, кривые практически совпадают.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Демин А В — Труды МЭИ, 1979, вып 431, с 47
2. Крепак В Н, Назаренко Л А, Якименко И П. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 11, с 2225
3. Орлов Ю. И., Демин А В — Труды МЭИ, 1980, вып 497, с 23
4. Боровиков В А, Кинбер Б. Е Геометрическая теория дифракции — М.: Связь, 1978.

Поступила в редакцию  
6 января 1983 г.

УДК 621.384.614

#### ОСОБЕННОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ В КОМПЕНСИРОВАННОМ ЭЛЕКТРОННОМ КОЛЬЦЕ

B. F. Вейнгардт, B. P. Григорьев

Несмотря на значительное число опубликованных работ, посвященных неустойчивости отрицательной массы (НОМ), впервые рассмотренной в [1, 2] применительно к циклическим электронным ускорителям, исследования по данной тематике не теряют своей актуальности. Необходимость продолжения подобных исследований в настоящее время продиктована недостаточной изученностью коллективных эффектов в компенсированных электронных кольцах, использование которых предполагается в уста-

новках по коллективному ускорению ионов и длительному удержанию горячей плазмы. Наличие ионного компонента в электронном пучке обеспечивает нейтрализацию его пространственного заряда, в результате чего наиболее существенным оказывается взаимодействие электронов с собственным полем кольцевого тока. Это приводит к резкому увеличению бетатронных колебаний частиц и заметно сказывается на движении электронов в азимутальном направлении вследствие увеличения продольной эффективной массы электронов  $M_a$  [3]. Поэтому даже при рассмотрении высокочастотной нестабильности типа НОМ, развивающейся на частотах, кратных частоте обращения пучка, когда возмущения в ионном компоненте сравнительно малы, наличие ионов может существенно повлиять на развитие неустойчивости через зависимость равновесных параметров электронного пучка от степени его зарядовой нейтрализации  $f$ . В условиях сильной компенсации заряда пучка ( $f \lesssim 1$ ), например, когда резко возрастает продольная эффективная масса электронов, нельзя достичь стабилизации НОМ введением конечного разброса электронов  $\Delta P_\theta$  по азимутальному импульсу. Но если учесть, что влияние ионов на массу поперечного движения электронов гораздо слабее, чем на продольную эффективную массу частиц  $M_a$  (оно определяется незначительным изменением радиальной составляющей собственного электрического поля кольца  $E_r$ ), то можно ожидать, что при определенных условиях стабилизация данной неустойчивости все же возможна из-за дисперсии поперечных скоростей электронов, связанной с нелинейностью их бетатронных колебаний.

Рассмотрим устойчивость электронно-ионного кольца, циркулирующего в цилиндрической камере круглого сечения радиуса  $R_c$  и высоты  $h$ , изготовленной из металла. Используя подход, развитый в работе [4], представим дисперсионное уравнение для НОМ в электронно-ионном кольце в следующем виде:

$$1 - \delta \lambda_0^2 f^{-1} g_{1e} \bar{J}_{1e}^{(0)} = 0, \quad (1)$$

где

$$\delta = f(m_i/m_e), \quad \lambda_0^2 = 2\pi e^2 \bar{n}_e (m_i \Omega_{0e}^2)^{-1},$$

$$\bar{J}_{1e}^{(0)} = (2\pi)^3 \Omega_{0e}^2 N_e^{-1} \int \frac{f_e^0}{(\omega - n \Omega_e^{\text{эфф}})^2} d\Gamma_{ae} dP_\theta, \quad (2)$$

$m_\alpha$  — полная (релятивистская) масса частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = e$  — электроны,  $\sigma = i$  — ионы),  $m_{0\alpha}$ ,  $\gamma_{0\alpha} = (1 - \beta_{0\alpha}^2)^{-1/2}$  — ее масса покоя и релятивистский фактор массы равновесной частицы,  $\beta_{0\alpha} = v_{0\alpha}/c$  — безразмерная азимутальная скорость равновесной частицы сорта  $\alpha$ , отнесенная к скорости света в вакууме  $c$ ,  $N_e$ ,  $\bar{n}_e$  — полное число и средняя плотность электронов пучка,  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  — номер азимутальной гармоники,  $\omega$  — частота возмущения,  $\Omega_e^{\text{эфф}}$ ,  $\Omega_{0e}$  — азимутальные угловые скорости произвольного и равновесного электрона,  $\omega_{re}$ ,  $\omega_{ze}$  — полные частоты радиальных и аксиальных бетатронных колебаний электронов,

$$g_{1e} = (n^2/2) \beta_{0e}^2 K(b_r b_z/R^2) S_1 (2\pi)^{-3} \quad (3)$$

— фактор, определяющий импедансные свойства камеры, нагруженной пучком,  $b_r, b_z, R$  — характерные размеры малого поперечного сечения и равновесный радиус кольца,

$$K = \frac{1}{\beta_{0e}^2} \left( \frac{1}{\gamma_{0e}^2} - \frac{1}{\gamma_{re}^2} \right) + O\left(\frac{I}{I_A}\right)$$

— коэффициент, определяющий автофазирующие свойства системы ( $|K| \sim \gamma_{0e}^{-2}$ ),  $\gamma_{re} = \Omega_{rc}/\Omega_{0e}$  — число линейных радиальных колебаний за оборот,  $I$  — ток пучка ( $A$ ),  $I_A = 17 \cdot 10^3 \beta_{0e} \gamma_{0e}$  ( $A$ ) — ток Альфвена,

$$S_1 = (4\pi)^2 \frac{R}{\pi h} \sum_{m,s} \frac{\epsilon_m |I_0^m|^2 |I_{1,0}^s|^2}{(\mu_{ns}^2 + k_z^2 R_c^2) J_{n+1}^2(\mu_{ns})} \quad (4)$$

— множитель, определяющий зависимость потенциальной составляющей полей возмущения кольца от геометрии системы,  $k_z = m\pi/h$ ,  $\chi_{ns} = \mu_{ns}/R_c$  — аксиальное и радиальное волновые числа собственных функций цилиндрической камеры,  $\mu_{ns}$  — нули функций Бесселя первого рода порядка  $n, s = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1/2, & m = 0 \\ 1, & m \neq 0 \end{cases}$$

$$|I_0^m|^2 = J_0^2(k_z b_z),$$

$$|I_{1,0}^s|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_n \left( z_{ns} R \left[ 1 + \frac{b_r}{R} \sin \Psi_{re} \right] \right) d\Psi_{re} \right|^2,$$

$\Psi_{re} = (\omega_{re} t + \text{const})$  — фаза радиальных бетатронных колебаний электрона,  $t$  — текущее время,  $f_e^0$  — равновесное распределение электронов в азимутально-однородном кольцевом пучке

Численное исследование множителей  $g_{1e}$  (3) показало, что в приближении «тонкого» пучка ( $b_r, z/R \ll 1$ ) они слабо зависят от его поперечных размеров  $b_r, z$ . Характерные зависимости этих множителей от равновесного радиуса  $R$  и относительных размеров камеры  $R_c/h$  для различных азимутальных гармоник  $n$  показаны на рис. 1, 2. Из приведенных рисунков видно, что по мере приближения боковой или торцевых стенок камеры к пучку значение геометрического фактора  $g_{1e}$  уменьшается, что объясняется экранированием собственных полей пучка проводящими поверхностями камеры

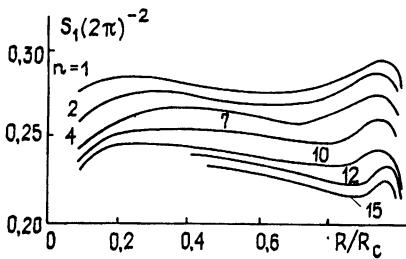


Рис. 1.

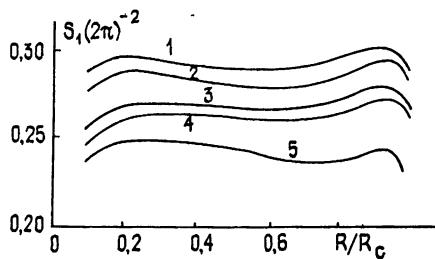


Рис. 2.

Рис. 1. Зависимость функций  $S_1$  от номера азимутальной гармоники и равновесного радиуса пучка  $R_c/h = 3$ ,  $b_{r,z}/R = 0,1$ .

Рис. 2. Зависимость функций  $S_1$  от равновесного радиуса пучка для различных азимутальных гармоник и высот камеры  $b_{r,z}/R = 0,1$ ; 1 — ( $n = 1$ ;  $R_c/h = 1,5$ ); 2 — (1; 3); 3 — (5; 1,5); 4 — (5; 3); 5 — (10; 3)

Соответствующие распределения  $f_e^0$  для каждого сорта частиц в электронно-ионном кольце с энергетическим разбросом подробно изучены в работе [5] на примере распределений вида

$$f_e^0 = \frac{n_e R}{2\pi m_{0e} \gamma_{0e}} \frac{\Delta_{\theta e}}{[(\Delta P_{\theta e})^2 + \Delta_{\theta e}^2]} \delta [H_e - \hat{H}_e - \Omega_{0e} (\Delta P_{\theta e} - \Delta \hat{P}_{\theta e})], \quad (5)$$

где  $H_e$ ,  $\Delta P_{\theta e} = (P_{\theta e} - P_{\theta e}^0)$  — гамильтониан и разброс электронов по азимутальному каноническому импульсу относительно равновесного значения  $P_{\theta e}^0$ , величина  $\Delta_{\theta e} = \text{const}$  имеет смысл полуширины разброса частиц  $\Delta P_{\theta e}$ .

Вычисление дисперсионного интеграла (2) по распределениям типа (5) (с учетом правил обхода полюса Ландау в знаменателе подынтегрального выражения) дает следующий результат:

$$\bar{J}_{1e}^{(0)} = [(\nu - \nu_{1e})(\nu - \nu_{2e})]^{-1}, \quad (6)$$

где

$$\nu = \omega/\Omega_{0e},$$

$$\nu_{1e} = n \left( 1 - i \frac{\beta_{0e}^2 |K| \Delta_{\theta e}}{m_{0e} \gamma_{0e} \Omega_{0e} R^2} + Q_{re} \frac{b_r^2}{R^2} \right),$$

$$\nu_{2e} = n \left( 1 - i \frac{\beta_{0e}^2 |K| \Delta_{\theta e}}{m_{0e} \gamma_{0e} \Omega_{0e} R^2} + Q_{ze} \frac{b_z^2}{R^2} \right),$$

$Q_{re}$ ,  $Q_{ze}$  — коэффициенты, определяющие величины поправок к частотам азимутального обращения неравновесных электронов, обусловленных нелинейной зависимостью  $\Omega_e^{\text{ЭФ}}$  от амплитуды бетатронных колебаний частиц  $a_{re}$ ,  $a_{ze}$  в электронном компоненте кольца. Явные зависимости коэффициентов  $Q_{re}$ ,  $Q_{ze}$ , выраженные через поля и их

производные на равновесной орбите ( $r=R$ ,  $z=h/2$ ), приведены в [5]. Используя (6), найдем решение исходного дисперсионного уравнения

$$\nu = \frac{\nu_{1e} + \nu_{2e}}{2} \pm \left[ \left( \frac{\nu_{1e} - \nu_{2e}}{2} \right)^2 + \frac{\delta \lambda_0^2}{f} g_{1e} \right]^{1/2}, \quad (7)$$

откуда следует, что при  $K < 0$  возможно развитие НОМ на неустойчивой ветви колебаний, которой соответствует знак (+) в формуле (7). Условия стабилизации данной неустойчивости определяются неравенством

$$\frac{\delta \lambda_0^2}{f} \frac{g_{1e}}{n^2} \leq \left( \frac{\beta_{0e}^2 K \Delta_{0e}}{m_{0e} \gamma_{0e} \Omega_{0e} R^2} \right)^2 + \left( Q_{re} \frac{b_r^2}{R^2} - Q_{ze} \frac{b_z^2}{R^2} \right)^2 \frac{1}{4}. \quad (8)$$

Знак равенства в (8) соответствует пороговым параметрам системы

Первое слагаемое в правой части полученного неравенства обусловлено стабилизирующим влиянием разброса  $\Delta P_{\theta e}$ . Природа данного явления, детально исследованного в одномерной кинетической теории НОМ [6], объясняется известным механизмом затухания Ландау. Наличие второго слагаемого в правой части (8) объясняется эффектом «дополнительного» перемешивания частиц в фазовом пространстве пучка, связанного с нелинейностью азимутальных угловых скоростей электронов  $\Omega_e^{\text{эфф}}$ , вносимой бетатронными колебаниями частиц

В классических электронных циклических ускорителях (цихротронах, бетатронах) первое из указанных слагаемых обычно значительно преобладает над вторым. Другими словами, нелинейность азимутальных угловых скоростей электронов  $\Omega_e^{\text{эфф}}$  по амплитудам бетатронных колебаний  $a_{re}$ ,  $a_{ze}$  слабо сказывается на пороговых параметрах классических ускорителей. В электронно-ионных кольцах, наоборот, из-за перехода системы в жесткофокусирующий режим в результате воздействия собственных полей кольца  $|K| \ll 1$ , поэтому стабилизация НОМ за счет разброса электронов по азимутальным импульсам  $\Delta P_{\theta e}$  представляется практически невозможной. Основным (определенным критическими параметрами системы) в данном случае является второе слагаемое в правой части (8), обусловленное нелинейными поправками к азимутальной частоте обращения электронов. Действительно, из количественных оценок для коэффициентов  $Q_{re}$ ,  $Q_{ze}$  при релятивистских значениях энергии электронов ( $\gamma_{0e}^2 \gg 1$ ) и  $b_r \approx b_z$  следует, что в окрестностях критической точки  $K=0$

$$\left| Q_{re} \frac{b_r^2}{R^2} - Q_{ze} \frac{b_z^2}{R^2} \right| \sim \frac{b_{r,z}^2}{2R^2} \gg \frac{\beta_{0e}^2 |K| \Delta_{0e}}{m_{0e} \gamma_{0e} \Omega_{0e} R^2}.$$

Таким образом, результаты исследования НОМ в компенсированных электронных кольцах, в отличие от аналогичных результатов теории циклических ускорителей [1, 2, 6], свидетельствуют о возможности стабилизации данной неустойчивости вблизи критической точки за счет нелинейности азимутальных угловых скоростей электронов  $\Omega_e^{\text{эфф}}$  по амплитудам бетатронных колебаний в равновесном состоянии кольца. Для стабилизации НОМ при этом желательно использовать камеры с минимально допустимым соотношением их характерных размеров  $h/R_c$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- 1 Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Устойчивость заряженного пучка в накопительных системах — М: Атомная энергия, 1957, 7, с 549
- 2 Nielsen C., Sessler A., Sytow K. — Proc Internat conf on high energy accelerators and instruments Geneva, 1959, p 239. (Перевод в сб Накопление релятивистских частиц — М: Госатомиздат, 1963, с 133)
- 3 Диденко А. Н., Григорьев В. П., Усов Ю. П. Мощные электронные пучки и их применение — М: Атомиздат, 1977, с 277
- 4 Вейнгардт В. Ф., Григорьев В. П. Статья депонирована в ВИНИТИ, рег. № 3136-82
- 5 Григорьев В. П., Вейнгардт В. Ф. — Изв вузов — Физика, 1979, № 11, с 29
6. Лебедев А. Н. — ЖТФ, 1967, 37, с 1652.

Томский политехнический  
институт

Поступила в редакцию  
19 июля 1982 г.,  
в окончательном варианте  
27 января 1983 г