Затухающую функцию $F(t)$ можно аппроксимировать гауссовой функцией

$$F(t) = e^{-(1/2)\sigma^2 t^2}, \qquad \sigma^2 = \frac{\mathrm{Sp}\left(\left[H_d^x\ H_d^{(2)}\right]\left[H_d^x H_d^{-2}\right]\right)}{4\,\mathrm{Sp}\left(H_d^{(2)} H_d^{(-2)}\right)}.$$

В связи с тем, что в работе [3] не приведено аналитическое выражение для времени затухания дипольного сигнала, мы проведем численное сравнение выражения (3) с экспериментальными данными [2] и результатами работы [3] Для вычисления величин $\delta$ и $\sigma$ можно воспользоваться известными значениями решеточных сумм для $CaF_2$ [8] Как видно из рис 1, построенный с помощью (3) график гораздо лучше согласуется с экспериментальными данными, чем график, полученный в работе [3].

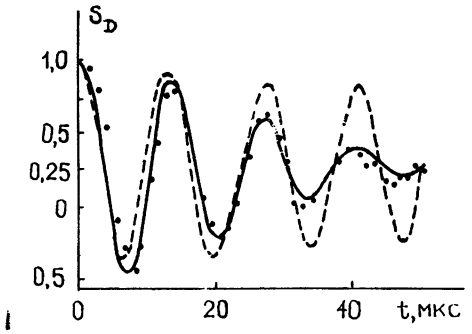


Рис. 1. Зависимость дипольного сигнала от времени. Точки—экспериментальные значения [2], пунктирная линия—результат, полученный в [3], сплошная линия построена по (3),

Отметим еще, что выражение, аналогичное (3), но без учета сдвига частоты $\delta$, было получено ранее в [6] с помощью метода канонических преобразований.

## ЛИТЕРАТУРА


1 Хеберлен У., Меринг М. ЯМР высокого разрешения в твердых телах. — М.: Мир. 1980.
2. Jeener J., Du Bois R., Broekaert P.— Phys. Rev., 1965, **A139**, № 6, p. 1959.
3 Deininghaus U., Mehring M.— Phys Rev., 1981, **B24**, № 9, p. 4945
4. Боголюбов Н Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.· Наука, 1974.
5 Буишвили Л. Л, Менабде М Г. — ЖЭТФ, 1979, **77**, № 6, с. 2435, ТМФ, 1980, **44**, № 3, с. 414.
6 Гольдман М. Спиновая температура и ЯМР в твердых телах. — М.:: Мир, 1972.
7. Буишвили Л Л, Малазония Д В, Менабде М. Г. — ТМФ, 1982, **51**, № 2, с. 299
8. Demco D., Tegenfeld J., Waught J. S.— Phys. Rev., 1975, **B11**, № 11, p 4133.



Тбилисский государственный университет



Поступила в редакцию 9 марта 1983 г.


---


УДК 538 574.4


# О РАССЕЯНИИ ВОЛН НА РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОМ ЦИЛИНДРЕ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ РАЗРЫВОМ ГРАДИЕНТА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НА ГРАНИЦЕ


*А. В. Мороз, З. И. Фейзулин*


Как известно [1], двумерная задача рассеяния плоской волны на радиально неоднородном цилиндре допускает разделение переменных и может быть сведена к нахождению радиальных функций, удовлетворяющих радиальному волновому уравнению, и суммированию ряда Фурье, коэффициенты которого вычисляются по этим функциям. Для решения радиального уравнения используют численные методы [2]. Однако если радиус цилиндра $a$ велик по сравнению с длиной волны $\bar{\lambda}=k_0^{-1}(\bar{\lambda}=\lambda/2\pi)$, где $k_0$ — волновое число в свободном пространстве, то применение численных методов наталкивается на известные трудности, и при решении радиального уравнения прибегают к асимптотическим методам.

В работе [1] решение радиального уравнения внутри неоднородности строится на основе асимптотики Эйри, затем на границе $r=a$ производится сшивка этого решения с точным решением радиального уравнения вне неоднородности, что позволяет однозначно найти радиальные функции во всем пространстве. В работе [3] наряду с указанным рассматривается также метод, основанный на ВКБ-решении радиального уравнения. Точность определения амплитуды рассеяния с помощью данных методов оказывается весьма чувствительной к величине разрыва градиента $\varepsilon$ на границе неоднородности — с увеличением разрыва точность падает. Причина этого заключается в «нерегулярном» поведении коэффициентов Фурье амплитуды рассеяния с номерами $m \sim \varkappa = k_0 a$. Характер этой «нерегулярности» будет указан ниже. Для улучшения сходимости ряда Фурье в [3] используется формула суммирования Пуассона. Однако для первого метода процедура суммирования по Пуассону оказывается довольно громоздкой из-за необходимости вычисления интегралов со сложным подынтегральным выражением, а второй метод, даже с учетом формулы Пуассона, применим, как отмечают сами авторы, лишь для небольших разрывов градиента $\varepsilon$. В данной работе предлагается методика расчета амплитуды рассеяния, которая применима при больших разрывах градиента $\varepsilon$, обладает высокой точностью и не требует привлечения процедуры суммирования по Пуассону.

**Исходные соотношения.** Пусть ось $z$ прямоугольной декартовой системы координат направлена вдоль оси цилиндра, а ось $x$ — в направлении распространения падающей волны. Для падающей волны, поляризованной вдоль оси $z$, единственная отличная от нуля $z$-компонента $U$ полного поля удовлетворяет уравнению Гельмгольца, которое в безразмерных переменных $x/a$, .., обозначенных теми же буквами, что и исходные размерные переменные, имеет вид

$$(\Delta + \varkappa^2 \varepsilon) U = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon = 1$ при $r \geqslant 1$, $\varkappa \gg 1$. Пусть $r, \theta$ — полярные координаты точки наблюдения $\boldsymbol{r}$. Тогда рассеянное поле $U_s(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r}) - U_0(\boldsymbol{r})$, где $U_0(\boldsymbol{r}) = \exp(i\varkappa r \cos\theta)$ — поле падающей волны, при $r \to \infty$ имеет вид расходящейся цилиндрической волны

$$U_s(r, \theta) = f(\theta)\, e^{i\varkappa r}/\sqrt{r},$$

и задача состоит в нахождении амплитуды рассеяния $f(\theta)$.

Переменные в уравнении (1) разделяются. Из симметрии задачи ясно, что решение имеет вид

$$U(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} R_m(r) \cos m\theta,$$

где радиальные функции $R_m(r)$ удовлетворяют радиальному уравнению (штрих — символ дифференцирования):

$$R_m'' + (1/r) R_m' + (\varkappa^2 \varepsilon - m^2/r^2) R_m = 0. \tag{2}$$

Учитывая, что решение уравнения (2) вне неоднородности можно найти в явном виде, и используя условие излучения и граничное условие при $r=1$, приходим к следующему выражению для амплитуды рассеяния:

$$f(\theta) = -\sqrt{\frac{8}{\pi\varkappa}}\, e^{-i\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m} \frac{(m - \xi_m) J_m(\varkappa) - \varkappa J_{m+1}(\varkappa)}{(m - \xi_m) H_m^{(1)}(\varkappa) - \varkappa H_{m+1}^{(1)}(\varkappa)} \cos m\theta, \tag{3}$$

где $J_\nu$, $H_\nu^{(1)}$ — функции Бесселя и Ганкеля, $\gamma_m = \begin{cases} 2, & m = 0 \\ 1, & m \geqslant 1 \end{cases}$, $\xi_m = R_m'(1-0) \times [R_m(1-0)]^{-1}$. Для нахождения величин $\xi_m$ рассмотрим уравнение (2) внутри неоднородности.

**Методика приближенного вычисления амплитуды рассеяния.** Из асимптотической теории дифракции [4] известно, что асимптотика Эйри неприменима в области пересечения каустики и границы «свет — тень». В рассматриваемой задаче своеобразный аналог границы «свет — тень» возникает на границе неоднородности, поэтому асимптотикой Эйри нельзя непосредственно пользоваться для нахождения $\xi_m$ при $m \sim \varkappa$, когда точки поворота (каустики) лежат вблизи границы. Учитывая это обстоятельство, будем использовать асимптотику Эйри не всюду внутри неоднородности, а лишь при $r \leqslant r_к = 1 - \Lambda$, где $\Lambda \sim \varkappa^{-2/3}$ — ширина прикаустической зоны для точки поворота, лежащей вблизи границы (фактически в работе берется значение $\Lambda = 0{,}8\, \varkappa^{-2/3}$). Для построения же радиальных функций на малом интервале $(r_к, 1)$ следует воспользоваться другими методами. Мы применим здесь известный метод,

основанный на замене непрерывной неоднородной среды кусочно-однородной [2] Именно, разобьем интервал ($r_к$, 1) на слои, в каждом на которых диэлектрическая проницаемость считается постоянной и радиальное уравнение допускает точное решение На границах слоев (в точках $r_i$, $i=\overline{0,\ k}$) «сошьем» логарифмические производные радиальных функций

$$\eta_m^l = \frac{\left(R_m^{l+1}\right)'(r_l)}{R_m^{l+1}(r_l)} = \frac{\left(R_m^l\right)'(r_l)}{R_m^l(r_l)},$$

где $R_m^l(r)$ и $\left(R_m^l\right)'(r)$ — радиальная функция и ее производная в $l$-м слое, причем нулевой слой соответствует области вне неоднородности, а $k+1$-й «слой» — области внутри круга с радиусом $r_к$ Тогда величины $\xi_m$, входящие в (3), будут равны

$$\xi_m = \eta_m^0. \tag{4}$$

Формулы пересчета для $\eta_m^l$ легко выводятся и могут быть представлены в виде

$$\eta_m^{l-1} = \varkappa_l \left(\eta_m^l T_1 + \varkappa_l T_2\right)/\left(\eta_m^l T_3 + \varkappa_l T_4\right), \tag{5}$$

где

$$T_1 = (m/\varkappa_l r_{l-1})\, P_1 - P_2,$$

$$T_2 = -\frac{m^2}{\varkappa_l^2 r_l r_{l-1}} P_1 + \frac{m}{\varkappa_l r_l} P_2 + \frac{m}{\varkappa_l r_{l-1}} P_3 - P_4, \qquad T_3 = P_1,$$

$$T_4 = -(m/\varkappa_l r_l)\, P_1 + P_3,$$

$$P_1 = J_m(\varkappa_l r_l)\, Y_m(\varkappa_l r_{l-1}) - Y_m(\varkappa_l r_l)\, J_m(\varkappa_l r_{l-1}),$$

$$P_2 = J_m(\varkappa_l r_l)\, Y_{m+1}(\varkappa_l r_{l-1}) - Y_m(\varkappa_l r_l)\, J_{m+1}(\varkappa_l r_{l-1}),$$

$$P_3 = J_{m+1}(\varkappa_l r_l)\, Y_m(\varkappa_l r_{l-1}) - Y_{m+1}(\varkappa_l r_l)\, J_m(\varkappa_l r_{l-1}),$$

$$P_4 = J_{m+1}(\varkappa_l r_l)\, Y_{m+1}(\varkappa_l r_{l-1}) - Y_{m+1}(\varkappa_l r_l)\, J_{m+1}(\varkappa_l r_{l-1}),$$

$\varkappa_l = \varkappa\sqrt{\varepsilon(r_l)}$, $J_\nu$ и $Y_\nu$ — функции Бесселя и Неймана, $l = \overline{1,\ k}$ Что касается величины $\eta_m^k$, то для нее можно получить следующее выражение·

$$\eta_m^k = \begin{cases} -\dfrac{(\varepsilon_к' r_к + 2\varepsilon_к) r_к}{4(\varepsilon_к r_к^2 - m^2/\varkappa^2)} + \dfrac{\varkappa\sqrt{\varepsilon_к r_к^2 - m^2/\varkappa^2}}{r_к}\left(\dfrac{1}{6\tau_к} + \dfrac{J_{-2/3}(\tau_к) - J_{2/3}(\tau_к)}{J_{-1/3}(\tau_к) + J_{1/3}(\tau_к)}\right), \\ \qquad r_п < r_к, \\ \dfrac{(\varepsilon_к' r_к + 2\varepsilon_к) r_к}{4(m^2/\varkappa^2 - \varepsilon_к r_к^2)} - \dfrac{\varkappa\sqrt{m^2/\varkappa^2 - \varepsilon_к r_к^2}}{r_к}\left(\dfrac{1}{6 s_к} - \dfrac{K_{2/3}(s_к)}{K_{1/3}(s_к)}\right), \\ \qquad r_п > r_к, \end{cases} \tag{6}$$

где $\varepsilon_к = \varepsilon(r_к)$, $\varepsilon'(r_к) = d\varepsilon(r_к)/dr$, $\tau_к = \varkappa\int\limits_{r_п}^{r_к}\sqrt{\varepsilon(r)\, r^2 - m^2/\varkappa^2}\, dr/r$,

$s_к = \varkappa\int\limits_{r_к}^{r_п}\sqrt{m^2/\varkappa^2 - \varepsilon(r)\, r^2}\, dr/r$, $r_п$ — радиус точки поворота, удовлетворяющий уравнению $\varepsilon(r_п)\, r_п^2 = m^2/\varkappa^2$, $K_\nu$ — функция Макдональда. Точность вычислений по формулам (3)—(6) зависит, в частности, от количества слоев в переходной области ($r_к$, 1). В нашей работе это число выбиралось равным 10

С целью проверки описанной здесь приближенной методики нами был рассмотрен специальный профиль диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} 1 - \alpha(r^{-2} - 1), & r < 1 \\ 1, & r \geqslant 1 \end{cases},$$

для которого существует точное решение радиального уравнения внутри неоднородности и, следовательно, точное решение задачи рассеяния Результаты вычислений дифференциального сечения рассеяния $\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2$ по точным и приближенным

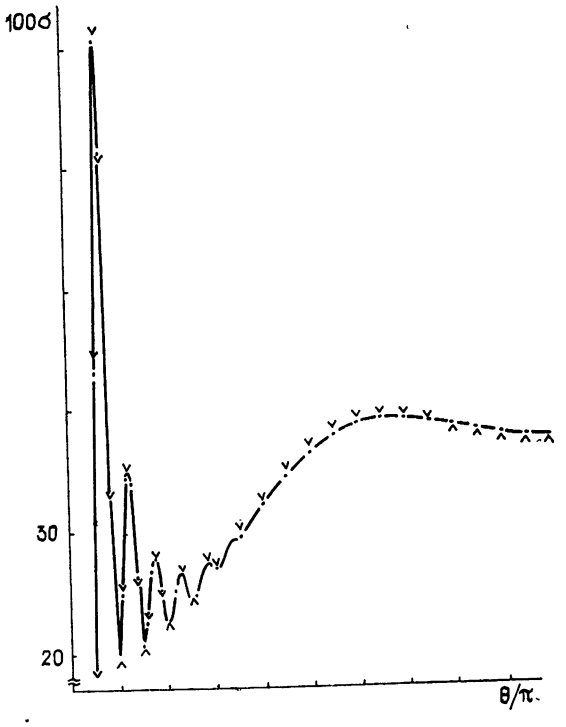


Рис. 1.

формулам для $\alpha = 2{,}5$, $\varkappa = 20{,}5$ совпали во всем интервале углов рассеяния с точностью не ниже 4% Эти результаты представлены на рис. 1, где штрихпунктирная кривая соответствует точному решению, а галочки — приближенному. В области характерного максимума $\sigma$ вблизи малых углов рассеяния, не показанной на рисунке, кривые практически совпадают.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Демин А В — Труды МЭИ, 1979, вып 431, с 47
2 Крепак В Н, Назаренко Л А, Якименко И П. — Радиотехника и электроника, 1973, 18, № 11, с 2225
3. Орлов Ю. И, Демин А В — Труды МЭИ, 1980, вып 497, с 23
4 Боровиков В А, Кинбер Б. Е Геометрическая теория дифракции — М.: Связь, 1978.



Поступлна в редакцию
6 января 1983 г.


---


УДК 621 384 614


# ОСОБЕННОСТИ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ МАССЫ В КОМПЕНСИРОВАННОМ ЭЛЕКТРОННОМ КОЛЬЦЕ


*В. Ф. Вейнгардт, В. П. Григорьев*


Несмотря на значительное число опубликованных работ, посвященных неустойчивости отрицательной массы (НОМ), впервые рассмотренной в [1, 2] применительно к циклическим электронным ускорителям, исследования по данной тематике не теряют своей актуальности. Необходимость продолжения подобных исследований в настоящее время продиктована недостаточной изученностью коллективных эффектов в компенсированных электронных кольцах, использование которых предполагается в уста-