ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 12 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 538.56 : 519.25

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ФОТОННОГО ШУМА НА АДАПТИВНУЮ ОПТИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ С ДАТЧИКОМ ГАРТМАНА

А. Н. Богатуров

Рассмотрена теоретическая модель адаптивной оптической системы с одним элементом измерения наклона в виде гартмановского датчика с учетом фотонного шума. Получены выражения для числа Штреля и оценки потока фотонов, необходимого для получения в системе заданного числа Штреля.

В последнее время значительное внимание уделяется теоретическому и экспериментальному исследованию и созданию адаптивных оптических систем АОС, способных компенсировать в реальном времени фазовые искажения принимаемого поля при астрономических наблюдениях. Практический интерес при применении АОС в астрономии представляет вопрос о минимальной яркости небесных объектов, для которых еще целесообразно использование адаптивных методов. В силу способа получения информации о параметрах принимаемого поля — фотодетектирования — такая минимальная яркость будет определяться воздействием на работу АОС фотонного шума, обусловленного квантовой природой света. Общее рассмотрение и определение возможного выигрыша, обеспечиваемого применением АОС, с учетом фотонного шума было проведено в работах [1,2].

Как правило, адаптивная система АОС включает в себя систему измерений параметров принимаемого поля, фазовый корректор и электронный блок, который преобразует выходные данные от системы измерения в сигналы управления фазовым корректором. При теоретическом рассмотрении возможностей АОС в условиях влияния фотонного шума определяющим элементом адаптивной системы является система измерений параметров принимаемого поля. В настоящее время предложенные конструкции для реализации систем измерения фазовых искажений принимаемого поля основываются либо на интерферометрах различных типов, либо на системах с датчиками Гартмана [3]. В работе [2] на основе общего анализа АОС было проведено частное рассмотрение систем с интерферометрическим измерением разности фаз при определяющем влиянии фотонного шума. В силу этого в данной работе будет проведено рассмотрение АОС с датчиком Гартмана. Отметим, что целью работы является не рассмотрение конкретной практической системы, а создание теоретической модели, позволяющей в простой форме учесть влияние шума фотонов, и определение на основе данной модели возможностей применения АОС с датчиком Гартмана. Поэтому в разд. 1, посвященном описанию модели, будем пренебрегать факторами, которые приводят к ухудшению работы АОС, но, в принципе, являются технически устранимыми в отличие от фотонного шума. В разд. 2 будет проведено рассмотрение данной системы при наличии собственных шумов системы и регистрации системой измерения одновременно с сигналом постороннего независимого фона.

1. Датчик гартмановского типа представляет собой систему, состоящую из фокусирующей линзы и набора фотодетекторов, расположенных в фокальной плоскости линзы. Изменение принимаемого поля на апертуре линзы приводит к изменениям вероятностей фотоотсчетов в различных фотодетекторах, поэтому фотоотсчеты детекторов, полученные за время детектирования, можно использовать для оценки изменения принимаемого поля. Поскольку задача состоит в определении предельных возможностей АОС, будем полагать, что измерения проводятся идеальным датчиком гартмановского типа. Это означает, что на выходе датчика после процесса измерения регистрируется общее число фотонов n за время измерения и набор $\{\boldsymbol{r}_i\}$ $(i=1, \ldots, n)$ пространственных координат прихода в фокальную плоскость каждого зарегистрированного фотона. Такова наиболее полная информация, которую можно получить в данной измерительной системе, если за время измерения не происходит существенных изменений распределения интенсивности в фокальной плоскости. В дальнейшем считаем, что суммарное время компенсации, в которое входят времена детектирования, вычисления коррекции и отклика корректора, меньше времени когерентности интенсивности в фокальной плоскости линзы, поэтому не будем учитывать временных соотношений. Прямые измерения времени когерентности для изображений звезд показали [4], что характерные значения этой величины лежат в интервале $5 \div 10$ *мс*, в то время как времена обработки информации и отклика корректора составляют обычно доли миллисекунд [5]. Поэтому следствием сделанного предположения о соотношении времен компенсации и когерентности является ограничение сверху времени измерения системы на уровне единиц миллисекунд

Датчики Гартмана предполагается применять в АОС для измерений наклона фазового фронта на апертуре линзы [3], так как при достаточно малом диаметре линзы именно изменения наклона будут вносить основной вклад в фазовые искажения принимаемого поля на апертуре линзы. Поэтому, исходя из практического предназначения датчика Гартмана, будем полагать, что принимаемое поле есть плоская волна с флуктуирующим наклоном фазового фронта. Возможные флуктуации интенсивности принимаемого излучения будем учитывать в виде не зависимых от наклона фазового фронта флуктуаций интегральной по апертуре линзы интенсивности. При сделанных предположениях о флуктуациях принимаемого поля в отсутствие компенсации мгновенная интенсивность в фокальной плоскости линзы в безразмерных переменных будет иметь следующий вид:

$$J(\boldsymbol{r}) = \nu I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}) = \frac{\nu}{(2\pi)^2}\iint d^2x_1 d^2x_2 U(\boldsymbol{x}_1) U(\boldsymbol{x}_2) \exp\{i(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k})\}. \tag{1}$$

Безразмерные переменные $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}$, ν связаны с физическими параметрами следующим образом:

$$\boldsymbol{r} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f}}\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{x} = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda f}}\boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{k} = \sqrt{\frac{\lambda f}{2\pi}}\Delta\boldsymbol{k}, \quad \nu = \eta T N. \tag{2}$$

Здесь λ — длина волны, f — фокусное расстояние линзы, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{\rho}$ — координаты в фокальной плоскости и на апертуре линзы, $\Delta\boldsymbol{k}$ — флуктуирующая часть волнового вектора, обусловливающая изменение наклона фазового фронта, η — эффективность датчика Гартмана, T — время измерения, N — число фотонов, проходящих через апертуру линзы в единицу времени. При этом ν — среднее число фотоотсчетов, регистрируемых датчиком Гартмана за время измерения при заданном N. Так как N пропорционально интегральной интенсивности, то в общем случае ν является случайной величиной, не зависимой от случайного вектора $\boldsymbol{k}$.

В формуле (1) амплитудный коэффициент пропускания линзы нормирован следующим образом:

$$\int d^2xU^2(\boldsymbol{x}) = 1. \tag{3}$$

В силу этого функция $I(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет условию

$$\int d^2rI(\boldsymbol{r}) = 1. \tag{4}$$

С учетом нормировки (4) $I(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k}) = W(\boldsymbol{r}|\boldsymbol{k})$ есть условная плотность распределения вероятностей координат прохождения через фокальную плоскость линзы фотона, прошедшего через апертуру линзы, при заданном $\boldsymbol{k}$.

При наличии фазовой коррекции для мгновенной интенсивности в фокальной плоскости линзы имеем следующее выражение:

$$J(\boldsymbol{r}) = \frac{\nu}{(2\pi)^2}\iint d^2x_1d^2x_2U(\boldsymbol{x}_1)\,U(\boldsymbol{x}_2)\times$$
$$\times\exp\left[i(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{k})+i(g(\boldsymbol{x}_1)-g(\boldsymbol{x}_2))\right], \tag{5}$$

где $g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}|n, \{\boldsymbol{r}_l\})$ — функция, определяющая действие фазового корректора.

Работу АОС принято оценивать по числу Штреля [6], равному в нашем случае отношению скомпенсированной интенсивности к интенсивности в отсутствие фазовых искажений в центре фокальной плоскости, т. е.

$$F = \langle J(0)\rangle/\bar{\nu}I(0), \tag{6}$$

где $\bar{\nu}=\langle\nu\rangle_\nu$. Для проведения усреднения в формуле (6) определим совместную плотность распределения вероятностей случайных величин, характеризующих систему ν, $\boldsymbol{k}$, n, $\{\boldsymbol{r}_l\}$:

$$W(\nu, \boldsymbol{k}, n, \{\boldsymbol{r}_l\}) =$$
$$= W(\nu)W(\boldsymbol{k}|\nu)\,W(n|\boldsymbol{k}, \nu)\,W(\{\boldsymbol{r}_l\}|\nu, \boldsymbol{k}, n). \tag{7}$$

Так как ν и $\boldsymbol{k}$ считаем независимыми, то $W(\boldsymbol{k}|\nu) = W(\boldsymbol{k})$. Компоненты случайного вектора $\boldsymbol{k}$ будем считать гауссовыми и независимыми, т. е.

$$W(\boldsymbol{k}) = (\pi\sigma^2)^{-1}\exp(-k^2\sigma^{-2}), \tag{8}$$

$W(n|\nu,\boldsymbol{k})$ — вероятность регистрации за время измерения всеми детекторами, составляющими датчик Гартмана, n фотонов при заданных ν и $\boldsymbol{k}$. Набор детекторов в фокальной плоскости можно рассматривать как один детектор, и так как изменение наклона фазового фронта приводит лишь к изменению положения распределения интенсивности в фокальной плоскости, но не изменяет суммарной интенсивности, регистрируемой датчиком, то

$$W(n|\nu, \boldsymbol{k}) = W(n|\nu) = (\nu^n/n!)\,e^{-\nu}. \tag{9}$$

В силу того, что фотоотсчеты в элементарных фотодетекторах при заданном векторе наклона $\boldsymbol{k}$ независимы, имеем

$$W(\{\boldsymbol{r}_l\}|\nu, \boldsymbol{k}, n) = \prod_{l=1}^{n} W(\boldsymbol{r}_l|\boldsymbol{k}) = \prod_{l=1}^{n} I(\boldsymbol{r}_l-\boldsymbol{k}). \tag{10}$$

В дальнейшем будем использовать гауссов амплитудный коэффициент пропускания $U(\boldsymbol{x}) = \sqrt{d^2\pi^{-1}}\exp(-d^2x^2/2)$, откуда для неискаженного распределения интенсивности в фокальной плоскости получаем

$$I(\boldsymbol{r}) = (\pi d^2)^{-1}\exp(-r^2/d^2). \qquad (11)$$

Объединяя (8) — (11), находим, что

$$W(\nu, \boldsymbol{k}, n, \{\boldsymbol{r}_i\}) = W(\nu)W(\boldsymbol{k})\times \\ \times\frac{\nu^n}{n!}e^{-\nu}\frac{1}{(\pi d^2)^n}\exp\left[-\frac{1}{d^2}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{k})^2\right]. \qquad (12)$$

Определим оптимальную фазовую коррекцию $g(\boldsymbol{x}|n, \{\boldsymbol{r}_i\})$ из условия экстремума числа Штреля:

$$\delta F/\delta g(\boldsymbol{x}|n, \{\boldsymbol{r}_i\}) = 0. \qquad (13)$$

Используя (12), из уравнения (13) находим, что

$$g(\boldsymbol{x}|n, \{\boldsymbol{r}_i\}) = (n+\alpha)^{-1}\left(\boldsymbol{x}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i\right), \qquad (14)$$

где

$$\alpha = \frac{d^2}{\sigma^2} = \left[\frac{\int d^2\rho\, U^2(\rho)\langle(\rho\Delta\boldsymbol{k})^2\rangle}{\int d^2\rho U^2(\rho)}\right]^{-1},$$

т. е. α — величина, обратная усредненной по апертуре линзы дисперсии фазовых флуктуаций принимаемого поля.

При оптимальной коррекции (14) для числа Штреля получим

$$F = 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle\nu^{n+1}e^{-\nu}\rangle_\nu}{\bar{\nu}\, n!\,(n+1+\alpha)} = \\ = 1 - \frac{1}{\bar{\nu}}\int_0^1(1-z)^\alpha\langle\nu e^{-\nu z}\rangle_\nu\, dz. \qquad (15)$$

При экспоненциальном распределении ν, т. е. при $W(\nu) = \bar{\nu}^{-1}\exp(-\nu/\bar{\nu})$, в случае, когда смещение распределения интенсивности в фокальной плоскости за счет флуктуаций наклона значительно больше ширины неискаженной интенсивности, т. е. при $\alpha=0$, из (15) получаем

$$F = 1-(1+\bar{\nu})^{-1}. \qquad (16)$$

Используем выражение (16) для оценки возможностей данной адаптивной системы. Пусть считается, что система работает удовлетворительно, если $F\geqslant 1-q$. В этом случае, зная соотношение между астрономической звездной величиной m и яркостью для видимой области спектра [7],

$$B = A\cdot 10^{-m/2,5} = (4\cdot 10^6)\cdot 10^{-m/2,5}\ \textit{фотон}\cdot\textit{см}^{-2}\cdot\textit{с}^{-1}, \qquad (17)$$

из (16) получаем, что для удовлетворительной работы системы необходимо, чтобы

$$m \leqslant 2,5\lg[\eta TAS\, q\,(1-q)^{-1}], \qquad (18)$$

где S — площадь апертуры линзы. Например, для линзы диаметром 5 *см* при $\eta=0{,}1$, $T=1$ *мс*, $q=0{,}1$ из (18) находим, что система может обеспечить выполнение неравенства $F\geqslant 0{,}9$ только при $m\leqslant 7{,}35$.

Из вида оптимальной коррекции (14) следует, что необходимыми измеряемыми параметрами в данной модели являются не n и $\{\boldsymbol{r}_i\}$, а n и $\boldsymbol{z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i$ — центр тяжести фотоотсчетов, зарегистрированных за одно измерение, так как $g(\boldsymbol{x})=n(n+\alpha)^{-1}(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z})$. Использование параметра α в определении оптимальной коррекции (14) отражает наличие априорной информации о флуктуациях принимаемого поля. Если же такая информация отсутствует, то разумно за оценку наклона принять центр тяжести фотоотсчетов, т. е. применять коррекцию вида $g(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z})$. В этом случае

$$F=\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{\langle \nu e^{-\nu}\rangle_\nu}{\bar{\nu}}+1-\frac{1-\langle e^{-\nu}\rangle_\nu}{\bar{\nu}}. \qquad (19)$$

При этом, если применение коррекции в виде (14) всегда приводит к улучшению качества работы системы, то при $\alpha>1$ компенсация наклона в виде $g(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{x}\boldsymbol{z})$ в некотором диапазоне средних чисел фотоотсчетов приводит к уменьшению числа Штреля по сравнению с его значением в отсутствие компенсации. Такое уменьшение будет максимально при применении компенсации в отсутствие флуктуаций наклона. Например, при отсутствии флуктуаций интегральной интенсивности максимальное ухудшение равно 30% при $\nu=1{,}8$, а при экспоненциальном распределении ν оно достигает 25% при $\bar{\nu}=1$. Такое уменьшение числа Штреля при $\alpha<1$ и при малых значениях ν объясняется тем, что в этом случае флуктуации случайного вектора $\boldsymbol{z}$ определяются в основном шириной распределения интенсивности в фокальной плоскости, а не смещением интенсивности при изменении наклона фазового фронта. В (14) это учитывается путем введения параметра α в коэффициент пропорциональности между $g(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{z}$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда измерительный датчик помимо интенсивности сигнала регистрирует также независимый фон с плотностью распределения координат фотоотсчетов в плоскости фотодетекторов $\Phi(\boldsymbol{r})$. Выберем $\Phi(\boldsymbol{r})$ в виде

$$\Phi(\boldsymbol{r})=(\pi\Omega^2)^{-1}\exp(-r^2/\Omega^2). \qquad (20)$$

Выражение (20) можно рассматривать как аппроксимацию конечного датчика площадью $\pi\Omega^2$ с равномерно распределенным по площади фоном. Естественно, что для возможности проведения точных измерений необходимо, чтобы на площади датчика укладывались бы наиболее вероятные изменения распределения интенсивности сигнала, т. е. необходимо, чтобы выполнялось условие $\Omega^2\geqslant d^2+\sigma^2$.

Пусть s — среднее число фоновых фотоотсчетов за один период измерения и $W(s)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины s.

Полагая, что априорная информация о поле отсутствует, будем считать, что система измерения определяет только центр тяжести координат фотоотсчетов $\boldsymbol{z}$. Поэтому функция, характеризующая действие корректора наклона, будет иметь следующий вид: $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\varepsilon})$, где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — случайный вектор ошибок системы, определяемый ошибками измерения, шумами системы обработки информации, неточностями отработки корректора. Флуктуации случайного вектора $\boldsymbol{\varepsilon}$ считаем гауссовыми с дисперсией $\langle\varepsilon^2\rangle$.

Для совместной плотности вероятностей случайных величин, характеризующих систему, аналогично разд. 1 имеем

$$W(\nu,\ s,\ \boldsymbol{k},\ n,\ \{\boldsymbol{r}_i\},\ \varepsilon) = W(\nu)\,W(s)\,W(\boldsymbol{k})\,W(\varepsilon)\times \\ \times \frac{e^{-\nu-s}}{n!}\prod_{i=1}^{n}\{\nu I(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{k})+s\Phi(\boldsymbol{r}_i)\}. \tag{21}$$

Отсюда для числа Штреля получаем следующее выражение:

$$F = \frac{\langle\nu e^{-\nu-s}\rangle_{\nu,s}}{\overline{\nu}(1+(\sigma^2+\langle\varepsilon^2\rangle)d^{-2})} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}\frac{\langle\nu^{n-l+1}s^l e^{-\nu-s}\rangle_{\nu,s}}{\overline{\nu}\,l!\,(n-l)!}\times \\ \times\left[1+\frac{\langle\varepsilon^2\rangle}{d^2}+\frac{(n-l)}{n^2}+\frac{\Omega^2 l+\sigma^2 l^2}{d^2n^2}\right]^{-1}. \tag{22}$$

Из (22) следует, что максимально достижимое значение числа Штреля при $\nu\to\infty$ в данном случае равно $[1+\langle\varepsilon^2\rangle d^{-2}]^{-1}$, где $\langle\varepsilon^2\rangle d^{-2}$ — усредненная по апертуре линзы дисперсия фазовых флуктуаций, обусловленных ошибками системы.

При отсутствии флуктуаций интегральных интенсивностей сигнала и фона и при достаточно большом значении величины $(\nu+s)$ для F приближенно можно записать

$$F\approx\left[1+\frac{\langle\varepsilon^2\rangle}{d^2}+\frac{\nu+s\Omega^2d^{-2}+s^2\sigma^2d^{-2}}{(\nu+s)^2}\right]^{-1}. \tag{23}$$

Из (22) и (23) следует, что, как и в разд. 1, применение коррекции наклона по центру тяжести фотоотсчетов в некотором диапазоне среднего числа сигнальных фотоотсчетов ν приводит к ухудшению качества работы оптической системы. Приравнивая (23) числу Штреля в отсутствие коррекции, находим, что улучшение возможно, если

$$\nu\geqslant s\left[\sqrt{\left(\frac{s_1}{s}\right)^2+2s_1\left(\frac{\sigma^2}{d^2}+\frac{\Omega^2-d^2}{sd^2}\right)}-1\right]+s_1, \tag{24}$$

где введено обозначение $s_1=d^2/2(\sigma^2-\langle\varepsilon^2\rangle)$.

Если, как и в разд. 1, полагать, что система работает удовлетворительно, когда $F\geqslant(1-q)\ [1+\langle\varepsilon^2\rangle d^{-2}]^{-1}$, то из (23) получим следующее ограничение на поток фотонов принимаемого излучения:

$$\nu\geqslant s\left[\sqrt{\left(\frac{s_2}{s}\right)^2+2s_2\left(\frac{\sigma^2}{d^2}+\frac{\Omega^2-d^2}{sd^2}\right)}-1\right]+s_2, \tag{25}$$

где $s^2=(1-q)\ (2q)^{-1}d^2\ (d^2+\langle\varepsilon^2\rangle)^{-1}$.

Используем формулы (24) и (25) при $s=10$, $\alpha=1$, $\langle\varepsilon^2\rangle/\sigma^2=0{,}25$, $\Omega^2=d^2+\sigma^2$. Тогда получим, что в данном случае система может обеспечить выигрыш только при $\nu\geqslant2{,}8$. Полагая $q=0{,}1$, найдем, что выполнение условия $0{,}72\leqslant F\leqslant0{,}8$ возможно, если $\nu\geqslant21{,}7$, иными словами, используя данные из численного примера разд. 1 для звездных объектов с $m\leqslant6{,}4$.

В заключение выделим основные результаты, полученные в работе.

Рассмотренная модель позволила в простой форме учесть влияние шума фотонов на систему измерения наклона в виде гартмановского датчика. Основными предположениями, определяющими модель, являются выбор гауссовой линзы и измерение центра тяжести координат фотоотсчетов в фокальной плоскости линзы.

Формулы (22), (23), (25) позволяют проводить оценки качества работы системы числа Штреля и потока фотонов, необходимого для получения заданного качества работы системы. В силу определенной идеализации модели такие оценки будут предельными для практически реализуемых систем, например квадрантного детектора. Возможные оценки астрономических звездных величин, полученные из формулы (25) для одного датчика, будут являться по крайней мере необходимыми для многокомпонентной системы с тем же значением числа Штреля

Автор выражает благодарность В. И. Татарскому за поддержку в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dyson F. J.— J. Opt. Soc. Am., 1975, **65**, № 5, p. 551.
2. Татарский В. И.— Изв. вузов — Радиофизика 1982, **25**, № 8, с 882; **25**, № 9, с. 1018.
3 Харди Дж. У. — ТИИЭР, 1978, **66**, № 6, с. 31.
4. Buffington A. et al. — J. Opt. Soc. Am., 1977, **67**, p. 304.
5. Buffington A. et al — J. Opt. Soc. Am, 1977, **67**, p. 298.
6. Борн М, Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1973, с. 425.
7 Allen C. W. Astrophysical Quantities. — New York: Oxford U. P., 1964, p. 191.

Институт физики атмосферы
АН СССР

Поступила в редакцию
6 августа 1982 г,
после доработки
13 июня 1983 г.

THEORETICAL MODEL FOR ESTIMATION OF PHOTON NOISE INFLUENCE ON ADAPTIVE OPTICAL SYSTEM WITH HARTMANN SENSOR

A. N. Bogaturov

Theoretical model of adaptive optical system with one Hartmann sensor used as an element of tilt measurement is considered taking photon noise into account. There are given expressions for Strehl radio and for photon flux necessary for obtaining the given Strehl radio.