ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 538.56 : 519.25

О СТРУКТУРЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ГАУССОВЫМ СЛУЧАЙНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ И ВЫХОДНОЙ КООРДИНАТОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Н. Малахов, О. В. Музычук

Получено обобщение известной формулы Фуруцу — Новикова на совместные кумулянты, описывающие статистические связи высших порядков между гауссовым процессом и его функционалами Исследован характер статистических связей между дельта-коррелированным случайным воздействием и выходной координатой динамической системы n-го порядка. Показано, в частности, что в случае аддитивного шума имеются лишь корреляционные связи, а высшие совместные кумулянты равны нулю

При отыскании вероятностных характеристик динамических систем, находящихся под воздействием случайных сил любой физической природы, возникает, как известно, проблема размыкания статистических средних, содержащих случайное воздействие и некоторые функции выходной координаты (векторы состояний системы). Для получения одномоментных характеристик вектора состояний $\boldsymbol{x}$ достаточно установить закон размыкания средних вида $\langle\alpha(t)Z_t(\boldsymbol{x})\rangle$, где $\alpha(t)$ — случайная сила с заданными вероятностными характеристиками, $Z(\boldsymbol{x})$ — некоторая функция выходной координаты. При необходимости более детального описания, например при отыскании многомоментных характеристик, требуется нахождение статистических связей высших порядков, описываемых совместными кумулянтами*

$$\langle\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_s), \boldsymbol{x}(t_1), \ldots, \boldsymbol{x}(t_n)\rangle,$$

или, в общем случае,

$$\langle\alpha(t_1), \ldots, \alpha(t_s), Z_1(\boldsymbol{x}), \ldots, Z_n(\boldsymbol{x})\rangle, \tag{1}$$

где Z_i — некоторые функции $\boldsymbol{x}(t_i)$ (функционалы случайного воздействия $\alpha(t)$), $s, n=1, 2, \ldots$ Для случая гауссова процесса $\alpha(t)$ такие кумулянты, в принципе, можно найти на основе известной формулы Фуруцу — Новикова [1, 2] и некоторых ее обобщений, полученных ниже. Если, к тому же, процесс $\alpha(t)$ можно полагать дельта-коррелированным, то в ряде случаев удается получить конкретные результаты.

1. Формула Фуруцу — Новикова для совместных кумулянтов. Получим обобщение формулы Фуруцу — Новикова на совместные кумулянты вида (1). Пусть $\alpha(t)$ — гауссов случайный процесс с нулевым средним значением и заданной корреляционной функцией:

$$\langle\alpha(t_1)\alpha(t_2)\rangle=B_\alpha(t_1, t_2),$$

* Здесь и ниже пользуемся обозначениями совместных кумулянтов в форме кумулянтных скобок, введенных в [3]

$$\langle \underbrace{Y, \ldots, Y}_{s}, \underbrace{Z, \ldots, Z}_{n}\rangle \equiv \langle Y,^{[s]} Z,^{[n]}\rangle.$$

$Z_i(\boldsymbol{x})$ — некоторые функции вектора состояния динамической системы. Для размыкания совместных корреляций воспользуемся формулой Фуруцу — Новикова

$$\langle \alpha(t)\, Z_1(\boldsymbol{x})\rangle = \int B_\alpha(t,\tau)\, \frac{\delta Z_1(\boldsymbol{x})}{\delta\alpha(\tau)}\, d\tau, \tag{2}$$

где вариационная производная представляет собой

$$\frac{\delta Z_1(\boldsymbol{x})}{\delta\alpha(\tau)} = \frac{\partial Z_1}{\partial x_i}\, \frac{\delta x_i(t)}{\delta\alpha(\tau)}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование). Введем для сокращения записи оператор

$$\check{F}_\alpha = \int d\tau\, B_\alpha(t,\tau)\, \frac{\delta}{\delta\alpha(\tau)}\,.$$

Тогда формула (2) примет вид

$$\langle \alpha Z_1\rangle = \langle \check{F}_\alpha Z_1\rangle\,. \tag{2a}$$

Для совместного момента случайной силы и функций вектора состояния порядка $n+1$ на основании (2а) имеем

$$\langle \alpha Z_1 \ldots Z_n\rangle = \langle \check{F}_\alpha\, (Z_1 \ldots Z_n)\rangle\,, \tag{3}$$

причем отметим, что действие оператора $\check{F}_\alpha$ подобно действию обычного оператора дифференцирования:

$$\check{F}_\alpha (Z_1 \ldots Z_n) = n\{Z_1 \ldots Z_{i-1}\, (\check{F}_\alpha Z_i)\, Z_{i+1} \ldots Z_n\}_i\,. \tag{4}$$

Здесь $n\{\ldots\}_i$ — скобка симметризации по индексу i, содержащая n членов. С учетом (4) формулу (3) запишем в виде

$$\langle \alpha Z^n\rangle = \langle \check{F}_\alpha Z^n\rangle = n\langle Z^{n-1}\, \check{F}_\alpha Z\rangle\,, \tag{3a}$$

понимая теперь под n мультииндекс.

Покажем, что для совместного кумулянта порядка $n+1$ справедлива подобная формула, а именно:

$$\langle \alpha,\, Z,^{[n]}\rangle = n\, \langle Z,^{[n-1]}\, \check{F}_\alpha Z\rangle \equiv \langle \check{F}_\alpha\ (Z,^{[n]})\rangle. \tag{5}$$

Как известно [3], для совместного момента совокупности любых случайных переменных $\{Y, Z\}$ имеет место кумулянтное разложение

$$\langle YZ^m\rangle = \langle Y,\, Z,^{[m]}\rangle + \sum_{k=1}^{m} C_m^k\, \langle Z^k\rangle\, \langle Y,\, Z,^{[m-k]}\rangle. \tag{6}$$

Предположим, что для совместных кумулянтов вида $\langle \alpha, Z,^{[m]}\rangle$ при $m \leqslant n-1$ формула (5) справедлива. Используя (3а), (6) и сделанное предположение, преобразуем совместный кумулянт:

$$\langle \alpha,\, Z,^{[n]}\rangle = \langle \alpha Z^n\rangle - \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, \langle Z^k\rangle\, \langle \alpha,\, Z,^{[n-k]}\rangle = n\, \langle Z^{n-1}\, \check{F}_\alpha Z\rangle -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} C_n^k\, (n-k)\, \langle Z^k\rangle\, \langle Z,^{[n-k-1]}\, \check{F}_\alpha Z\rangle =$$

$$= n\left(\langle Z^{n-1}\check{F}_\alpha Z\rangle - \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k}\langle Z^k\rangle\langle Z,^{[n-1-k]}\check{F}_\alpha Z\rangle\right).$$

Сравнивая с формулой (6), заметим, что выражение в скобках есть кумулянт вида $\langle Z,^{[n-1]}\check{F}_\alpha Z\rangle$. Таким образом, соотношение (5) доказано для произвольного n.

Поскольку n может быть мультииндексом, из (5) следует, что

$$\langle\alpha, Y,^{[s-1]}Z,^{[n]}\rangle = (s-1)\langle Z,^{[n]}Y,^{[s-2]}\check{F}_\alpha Y\rangle + n\langle Y,^{[s-1]}Z,^{[n-1]}\check{F}_\alpha Z\rangle, \tag{6a}$$

где Y и Z — произвольные функционалы процесса $\alpha(t)$. Положим здесь $Y\equiv\alpha$. Результат действия оператора $\check{F}_\alpha$ на процесс $\alpha(t)$ представляет собой детерминированную величину

$$\check{F}_\alpha\,\alpha(t_1) = \int B_\alpha(t,\tau)\,\delta(t_1-\tau)\,d\tau = B_\alpha(t,t_1),$$

поэтому первая кумулянтная скобка в (6а) обращается в нуль*, и мы приходим к соотношению

$$\langle\alpha,^{[s]}Z,^{[n]}\rangle = n\langle\alpha,^{[s-1]}Z,^{[n-1]}\check{F}_\alpha Z\rangle \equiv \langle\alpha,^{[s-1]}\check{F}_\alpha(Z,^{[n]})\rangle. \tag{7}$$

По существу это рекуррентная формула понижения порядка кумулянтной скобки. Многократно применяя (7), получим операторную формулу

$$\langle\alpha,^{[s]}Z,^{[n]}\rangle = \langle\check{F}_\alpha^s(Z,^{[n]})\rangle. \tag{8}$$

Здесь $\check{F}_\alpha^s$ означает s-кратное применение оператора $\check{F}_\alpha$ внутри кумулянтной скобки (однократное его применение показано в формулах (5), (7)). Индексы, входящие в (8), могут пониматься как мультииндексы. В частности, при $s=1$ (8) переходит в формулу (5), при $n=1$ — в полезное соотношение**

$$\langle\alpha,^{[s]}Z\rangle = \langle\check{F}_\alpha^s Z\rangle = \int d\tau_1 B_\alpha(t,\tau_1)\ldots\int d\tau_s B_\alpha(t,\tau_s)\left\langle\frac{\delta^s Z}{\delta\alpha(\tau_1)\ldots\delta\alpha(\tau_s)}\right\rangle$$

и, наконец, при $s=n=1$ — в формулу Фуруцу — Новикова.

Отметим, что из (8) «устранением запятых» нельзя прийти к подобной формуле для смешанных моментов, как это имело место выше (ср. (3а) и (5)). Разложение моментов имеет существенно более сложный вид, в частности,

$$\langle\alpha^s Z\rangle = \langle\check{F}_\alpha^s Z\rangle + \langle\alpha^2\rangle\sum_{k=1}^{s} C_{s'}^{2k}(2k-1)!!\,\langle\check{F}_\alpha^{s-2k}Z\rangle,$$

где $s'=s/2$ — для четных s и $s'=(s-1)/2$ — для нечетных.

Формула (8) и ее частные случаи допускают предельный переход к дельта-коррелированному процессу $\alpha(t)$, а эта идеализация, как известно, принципиально важна для аналитического решения широкого круга физических задач [4]. В то же время в разложении совместных моментов такой предельный переход формально недопустим, так как при этом $\langle\alpha^2\rangle$ обращается в бесконечность.

---

* Основным свойством кумулянтных скобок является обращение их в нуль, если хотя бы один аргумент статистически независим от остальных или детерминирован [3].

** Отсюда вытекает адекватность функционального [4] и кумулянтного [5, 6] подходов к анализу стохастических систем.

2. Статистическая связь случайного воздействия и выходной координаты. Рассмотрим стохастическую систему порядка N, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями вида

$$dx_k/dt = f_k(\boldsymbol{x}) + \alpha(t)\, g_k(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор состояния системы, f_k, g_k — детерминированные функции, $\alpha(t)$ — гауссов дельта-коррелированный процесс с

$$\langle\alpha(t)\rangle = 0, \quad B_\alpha(t_1, t_2) = 2D\,\delta(t_1 - t_2)\,.$$

Используя полученные соотношения, попытаемся ответить на вопрос о статистической связи случайной силы и выходной координаты $\boldsymbol{x}$ в совпадающие моменты времени. Пусть $Z(\boldsymbol{x})$ — детерминированная функция вектора $\boldsymbol{x}(t)$. Тогда

$$\check{F}_\alpha Z = 2D \int d\tau\, \delta(t-\tau) \frac{\partial Z}{\partial x_k} \frac{\delta x_k(t)}{\delta\alpha(\tau)} = Dg_k(\boldsymbol{x}) \frac{\partial Z}{\partial x_k}\,.$$

Следовательно,

$$\check{F}_\alpha^s Z = (Dg(\boldsymbol{x})\,\partial/\partial\boldsymbol{x})^s Z, \tag{10}$$

где для краткости обозначено

$$\left(g(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^s = g_{k_1}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \ldots g_{k_s}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial x_{k_s}}\,, \quad s = 1, 2, \ldots$$

(здесь и ниже по повторяющимся индексам предполагается суммирование).

Для совместной корреляции на основании (2) и (10) находим

$$\langle\alpha(t)\, Z(\boldsymbol{x})\rangle = D\,\langle g_k(\boldsymbol{x})\,\partial Z(\boldsymbol{x})/\partial x_k\rangle. \tag{11}$$

Эта формула широко используется для получения замкнутых уравнений для одномоментных характеристик выходной координаты [4].

Для совместного кумулянта порядка $n+1$ получим

$$\langle\alpha, Z_1, \ldots, Z_n\rangle = Dn\,\{\langle Z_1, \ldots, Z_{i-1}, g_j\partial Z_i/\partial x_j, Z_{i+1}, \ldots, Z_n\}_i \tag{12}$$

(здесь и ниже значения всех переменных берутся в момент времени t), $\{\ldots\}_i$ — скобка симметризации по индексу i. Если в (12) положить $Z_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, придем к выражению для совместных кумулянтов совокупности $\{\boldsymbol{x}, \alpha\}$ порядка $n+1$:

$$\langle\alpha, x_1, \ldots, x_n\rangle = Dn\,\{\langle x_1, \ldots, x_{i-1}, g_i(\boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n\rangle\}_i. \tag{13}$$

В частности, для одномерной системы

$$\langle\alpha, x,^{[n]}\rangle = Dn\,\langle x,^{[n-1]} g(x)\rangle\,. \tag{13a}$$

Соответствующие выражения для совместных моментов имеют аналогичный вид, достаточно «убрать запятые».

Для отыскания высших статистических связей между $\boldsymbol{x}$ и α приведем операторную формулу, вытекающую из (8), (10):

$$\langle\alpha,^{[s]} Z_1, \ldots, Z_n\rangle = D^s\,\langle(g(\boldsymbol{x})\,\partial/\partial\boldsymbol{x})^s (Z_1, \ldots, Z_n)\rangle. \tag{14}$$

Практически, однако, удобнее пользоваться следующей «рекуррентной» формулой:

$$\begin{aligned}\langle\alpha,^{[s]} Z_1, \ldots, Z_n\rangle &= D\,\langle\alpha,^{[s-1]} (g(\boldsymbol{x})\,\partial/\partial\boldsymbol{x})(Z_1, \ldots, Z_n)\rangle = \\ &= Dn\,\{\langle\alpha,^{[s-1]} Z_1, \ldots, Z_{i-1}, g_j\,\partial Z_i/\partial x_j, Z_{i+1}, \ldots, Z_n\rangle\}_i.\end{aligned} \tag{15}$$

Положив здесь $Z_i(\boldsymbol{x}) = x_i$, придем к формуле понижения порядка (по α) совместных кумулянтов совокупности $\{\boldsymbol{x}, \alpha\}$:

$$\langle \alpha,^{[s]} x_1, \ldots, x_n \rangle = Dn \,\{\langle \alpha,^{[s-1]} x_1, \ldots, x_{i-1}, g_i(\boldsymbol{x}), x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle\}_i,$$
$$s = 2, 3, \ldots \qquad (15a)$$

Из приведенных выражений видно, что структура статистических связей совокупности $\{\boldsymbol{x}, \alpha\}$ определяется только видом функций $g_k(\boldsymbol{x})$ в уравнениях (9) и не зависит от функций f_k (вид функций $f_h(\boldsymbol{x})$ определяет вероятностное распределение вектора состояний $\boldsymbol{x}(t)$). Рассмотрим далее два важных частных случая.

а) Система с «простым» параметрическим воздействием. Положим в уравнениях (9) $g_k(\boldsymbol{x}) = b_{kj}x_j$, где b_{kj} — детерминированные функции времени или константы. При этом на основании (13) получим

$$\langle \alpha, x_1, \ldots, x_n \rangle = D_n \{b_{kj} \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle\}_i . \qquad (16)$$

Таким образом, здесь совместные кумулянты $n+1$-го порядка выражаются через линейную комбинацию кумулянтов вектора состояния порядка n. Нетрудно видеть, что и кумулянты порядка $n+s$ могут быть выражены аналогично. В частности, для одномерной стохастической системы, описываемой уравнением

$$dx/dt = f(x) + b\,\alpha(t)x,$$

находим*

$$\langle \alpha,^{[s]} x,^{[n]} \rangle = (Dbn)^s \langle x,^{[n]} \rangle. \qquad (17)$$

б) Система с аддитивным случайным воздействием. Положим в уравнениях (9) $g_k(\boldsymbol{x}) = b_k = \mathrm{const}$. Тогда кумулянтные скобки, содержащие g_k в качестве аргумента, обращаются в нуль, и мы приходим к соотношению

$$\langle \alpha, x_m \rangle = \langle \alpha x_m \rangle = b_m D, \quad \langle \alpha,^{[s]} x_{k_1}, \ldots, x_{k_n} \rangle = 0, \quad sn > 1. \qquad (18)$$

Таким образом, аддитивный гауссов шум связан с выходной координатой только корреляционными (гауссовыми) связями, а статистические связи высших порядков, описываемые старшими совместными кумулянтами, отсутствуют (для линейных систем это хорошо известно, см., например, [7]). При этом вероятностное распределение самого вектора $\boldsymbol{x}(t)$, конечно, не является нормальным, если хотя бы одна из функций $f_k(\boldsymbol{x})$ нелинейна. Отсутствие связей высших порядков между случайной силой и выходной координатой напоминает известную гипотезу Миллионщикова [8]. Как показано выше, она является вполне обоснованной лишь для совместных статистических связей указанной совокупности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Furutsu K. — J Res NBS, 1963, **D-67**, № 3, p 303.
2. Новиков Е А. — ЖЭТФ, 1964, **47**, вып. 5 (11), с. 1919.
3. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов и их преобразований. — М: Сов радио, 1978.
4. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. — М: Наука, 1980
5. Малахов А. Н., Музычук О. В, Позументов И Е. — Изв вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1279.

* Кумулянты выходной координаты могут быть найдены, если удается решить уравнение Фоккера — Планка для плотности вероятности $W(x, t)$. В одномерном случае последнее имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)\,W - Db^2 x \frac{\partial}{\partial x} xW\right].$$

6. Музычук О. В — Изв. вузов — Радиофизика, 1979, 22, № 10. с. 1246
7. Ахманов С А, Дьяков Ю Е, Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1981.
8 Миллионщиков М. Д. — ДАН СССР, 1941, 32, № 9, с. 611.

Горьковский государственный университет

Поступила в редакцию 2 ноября 1982 г

THE STRUCTURE OF STATISTICAL RELATIONS BETWEEN A RANDOM GAUSSIAN ACTION AND THE STOCHASTIC SYSTEM OUTPUT COORDINATE

A. N. Malakhov, O. V. Muzychuk

The generalization of well-known Furutsu — Novicov relation for mutual cumulants, which describe higher statistical relations between Gaussian process and its functionals, have been obtained The behaviour of statistic relations between the delta-correlated randon influence and the *n*-th order stochastic system output coordinate was investigated It is shown in particular that in the case of the additive noise there are only correlative relations, higher mutual cumulants are equal to zero.

ИНСТРУКЦИЯ ПО СОСТАВЛЕНИЮ РЕФЕРАТОВ

1. В реферате кратко излагается основное содержание статьи. Реферат должен дать читателю представление о характере освещаемой работы, оригинальности постановки вопроса, методике проведения исследования и его основных результатов.

2. Реферату должно предшествовать библиографическое описание в следующем виде· название статьи, фамилия и инициалы автора, название журнала, где помещается статья Текст реферата начинается непосредственно с изложения существа работы без повторения заголовка. Форма изложения материала не обязательно должна повторять форму изложения оригинальной статьи

3. Если оригинал содержит большое количество цифровых данных, их следует обобщить и систематизировать

4 Средний объем реферата 1,5—2 страницы машинописного текста, отпечатанного через два интервала на белой писчей бумаге обычного формата (30×21) в двух экземплярах с полем 4 *см* с левой стороны.

5. Таблицы, схемы, графики и пр. могут быть включены в том случае, если они отражают основное содержание работы или сокращают текст реферата. Сообщение о наличии в реферируемой работе таблиц, схем, графиков, фотографий, карт, рисунков необходимо давать в конце реферата. Например, табл 2, илл. 10.

6. Формулы приводятся только в том случае, если они необходимы для понимания статьи. Громоздкие математические выражения помещать не следует. Формулы следует вписывать четко, не изменяя принятых в оригинале обозначений величин. Формулы и буквенные обозначения вписываются **черными чернилами во второй экземпляр.** Вписывание формул и буквенных обозначений, а также исправление замеченных опечаток **в первом экземпляре не делается.**

7. В конце реферата в квадратных скобках указывается название учреждения или предприятия, в котором автор реферируемой работы (если эти данные приводятся в статье) провел работу. Подпись автора и дату написания реферата следует ставить в левом нижнем углу на обоих экземплярах реферата.
