ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 538 56:519.25

ОБ ЭНЕРГИИ КВАНТОВ В ЛАГРАНЖЕВЫХ СИСТЕМАХ С ФЛУКТУИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

М. Н. Кром, Н. С. Степанов

Для лагранжевой системы с параметрами, плавно флуктуирующими во времени и пространстве, исследуется связь коэффициентов кинетического уравнения, определяющего изменение спектра волн в импульсном пространстве, с законом дисперсии и статистическими характеристиками параметров. Рассмотрены некоторые конкретные примеры

Изменение усредненных характеристик волновых полей в средах с плавными пространственно-временными флуктуациями параметров исследовалось в работах [1–5] (в частности, рассматривался вопрос о среднем потоке энергии при классическом описании полей [1–3] или средней частоты квантов — при квантовом описании [4, 5]). Одним из основных результатов этих работ является вывод о том, что знак эффекта (увеличение или уменьшение средней энергии волны) при заданных флуктуациях среды существенно зависит от закона дисперсии и, вообще говоря, от статистической структуры флуктуаций параметров (от степени анизотропии их корреляционной функции). Однако конкретные расчеты были проведены лишь в малоугловом приближении для двух моделей сред — недиспергирующего диэлектрика с переменным показателем преломления и изотропной плазмы с флуктуирующей электронной концентрацией.

Вполне естественно было бы попытаться выяснить общие закономерности, присущие произвольной диспергирующей среде с флуктуирующими параметрами. Строго говоря, в рамках феноменологического подхода это в принципе невозможно, поскольку при заданных макроскопических параметрах среды $p(\boldsymbol{r}, t)$ материальные уравнения, а значит, и энергетические соотношения могут быть различными в зависимости от конкретного механизма временных вариаций параметров. Иными словами, разделение нестационарных (параметрических) систем на консервативные и диссипативные становится в значительной степени условным (см., например, [6–8]). Тем не менее можно выделить важный класс «лагранжевых» систем (т е описываемых лагранжианом), для которых однозначная связь средней энергии распространяющихся волн со статистическими характеристиками и законом дисперсии среды должна существовать. Это следует из того, что для лагранжевых систем число квантов в волновом пакете является адиабатическим инвариантом [6–9], так что флуктуации амплитуды и мгновенной частоты волн оказываются связанными, а последние однозначно определяются макроскопическими параметрами среды. Особенно четко наличие такой связи видно при использовании «усредненного» вариационного принципа, впервые предложенного Уиземом [9]: одна и та же дисперсионная функция $G(\omega, \boldsymbol{k}, p)$ (см. ниже) определяет как усредненный лагранжиан (а вместе с ним и энергетические характеристики волн), так и дисперсионное уравнение $G(\omega, \boldsymbol{k}, p)=0$, откуда следуют уравнения переноса для волновой частоты ω и волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Поэтому коэффициенты кинетического уравнения, описывающего изменение спектра волнового поля, должны как-то выражаться через функцию $G(\omega, \boldsymbol{k}, p)$. Выяснению указанной зависимости для определенного класса лагранжевых систем и посвящена, в первую очередь, настоящая работа.

Рассмотрим линейную волновую систему, лагранжиан которой представляет собой квадратичную форму обобщенных координат q^α $(\alpha = 1, 2, \ldots, N)$ и их временных $q_t^\alpha = \partial q^\alpha / \partial t$ и пространственных производных до второго порядка включительно, $q_i^\alpha = \partial q^\alpha / \partial x_i$, $q_{ij}^\alpha = \partial^2 q^\alpha / \partial x_i \partial x_j$ $(i, j = 1,2,3)$:

$$L = \sum_\alpha [a_{00} (q^\alpha)^2 + a_{ij} q_i^\alpha q_j^\alpha + a_{44} (q_t^\alpha)^2 + a_{i4} q_i^\alpha q_t^\alpha + a_{ij}^1 (q_{.j}^\alpha)^2 + a_{.j0} q_{ij}^\alpha q^\alpha]. \quad (1)$$

Для плоской гармонической волны с амплитудой A усредненный лагранжиан L связан с дисперсионной функцией $G(\omega, \boldsymbol{k}, p)$ соотношением $\mathrm{L} = (1/2)\, G(\omega, \boldsymbol{k}, p) A^2$ [9], причем для лагранжиана (1) имеем

$$G(\omega, \boldsymbol{k}, p) = a_{00} + a_{ij} k_i k_j + a_{44} \omega^2 - a_{4i} k_i \omega + a_{ij}^1 k_i^2 k_j^2 - a_{ij0} k_i k_j. \quad (2)$$

Переходя далее к квантовой терминологии, систему, описываемую лагранжианом (1), представим как совокупность квазичастиц (квантов) с некоторой функцией распределения в пространстве импульсов $f_{\boldsymbol{k}}$ (напомним, что на классическом языке это соответствует случаю полной хаотичности фаз). Для вычисления взаимодействия квазичастиц с флуктуациями среды используем квантовомеханическую теорию возмущений. Будем считать, что коэффициенты в (1) зависят от некоторого плавно флуктуирующего параметра $p(\boldsymbol{r}, t) = p_0 + p_1(\boldsymbol{r}, t)$, причем $\langle p_1 \rangle = 0$, $|p_1| \ll p_0$. Перейдем от лагранжиана (1) к гамильтониану $\mathrm{H} = \sum_\alpha (\partial L / \partial q_t^\alpha) q_t^\alpha - L$, разложим $\mathrm{H}(p)$ в ряд по p_1 и ограничимся первой степенью p_1: $\mathrm{H}(p) = \mathrm{H}_0 + \mathrm{H}_1 = \mathrm{H}(p_0) + (\partial \mathrm{H} / \partial p)_{p=p_0} p_1$ (при наличии нескольких независимо флуктуирующих параметров подразумевается сумма по ним). Первый член этой суммы — невозмущенный гамильтониан. Полный невозмущенный гамильтониан системы (для поля в единичном объеме) равен

$$H_0 = \int \mathrm{H}(p_0)\, dv.$$

Слагаемое $\mathrm{H}_1 = (\partial \mathrm{H} / \partial p)_{p=p_0} p_1$ — поправка, определяющая взаимодействие поля с флуктуациями среды. Далее для нахождения вероятностей переходов частиц в $\boldsymbol{k}$-пространстве под воздействием возмущения H_1 поступим аналогично с работами [4, 5].

Разложим q^α в ряд по бегущим волнам:

$$q^\alpha = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{1}{\sqrt{G_\omega}} [a_{\boldsymbol{k}}^\alpha \exp(i\boldsymbol{kr} - i\omega_{\boldsymbol{k}} t) + a_{\boldsymbol{k}}^{\alpha *} \exp(-i\boldsymbol{kr} + i\omega_{\boldsymbol{k}} t)]. \quad (3)$$

Как и в [5], нормирующие множители в (3) выбраны так, чтобы при переходе к операторам $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\alpha$ и $\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\alpha +}$ совпадали с операторами уничтожения и рождения частиц, т. е. удовлетворяли соотношениям

$$n_{\boldsymbol{k}}^\alpha - 1 |\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\alpha| n_{\boldsymbol{k}}^\alpha = \sqrt{n_{\boldsymbol{k}}^\alpha}, \quad n_{\boldsymbol{k}}^\alpha |\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\alpha +}| n_{\boldsymbol{k}}^\alpha - 1 = \sqrt{n_{\boldsymbol{k}}^\alpha}.$$

Невозмущенный гамильтониан системы тогда приводится к виду

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{k}, \alpha} \hbar \omega_{\boldsymbol{k}} (\hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\alpha \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\alpha +} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^{\alpha +} \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\alpha)$$

с собственными значениями $H_{0n}=\sum_{k,\alpha}(n_k^\alpha+1/2)\hbar\omega_k$. Разложим $p_1(\boldsymbol{r},\ t)$ также в четырехмерный ряд:

$$p_1(\boldsymbol{r},\ t)=\sum_{\varkappa,\Omega}\{p(\varkappa,\ \Omega)\exp[i(\varkappa\boldsymbol{r}-\Omega t)]+p^*(\varkappa,\ \Omega)\exp[-i(\varkappa\boldsymbol{r}-\Omega t)]\}. \quad (4)$$

Будем считать, что для всех характерных частот в спектре флуктуаций параметра $p(\varkappa,\ \Omega)$ имеют место неравенства

$$|\Omega|\ll\omega_k,\quad |\varkappa|\ll|\boldsymbol{k}|, \quad (5)$$

т. е. флуктуации среды достаточно медленные. Условия (5) приводят к тому, что в гамильтониане взаимодействия $\hat{H}_1=\int(\partial\hat{\mathrm{H}}/\partial p)_{p=p_0}p_1 dv$ останутся лишь члены, описывающие процессы рассеяния на флуктуациях среды (типа $\boldsymbol{k}\rightleftarrows\boldsymbol{k}\pm\varkappa$), вероятности которых оказываются равными

$$W_{k\rightleftarrows k\pm\varkappa}\approx F(\omega,\ \boldsymbol{k})|p(\varkappa,\ \Omega)|^2\delta(\omega_k-\omega_{k\pm\varkappa}-\Omega), \quad (6)$$

где

$$F(\omega,\ \boldsymbol{k})=2\pi\left(\frac{\omega G_{\omega p_0}-G_{p_0}}{G_\omega}\right)^2,\quad G_{\omega p_0}=\frac{\partial^2 G_0}{\partial\omega\partial p_0},\quad G_{p_0}=\frac{\partial G_0}{\partial p_0},$$

$$G_\omega=\frac{\partial G_0}{\partial\omega},\quad G_0=G(\omega,\ \boldsymbol{k},\ p_0).$$

Для достаточно плавной (в масштабе $\varkappa$) функции распределения частиц в $\boldsymbol{k}$-пространстве f_k при условии (5) кинетическое уравнение сводится к диффузионному виду:

$$\frac{\partial f_k}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial k_i}\left(D_{ij}\frac{\partial f_k}{\partial k_j}\right), \quad (7)$$

причем $D_{ij}=F(\omega,\ \boldsymbol{k})\int\varkappa_i\varkappa_j u(\varkappa,\ \Omega)\delta(\omega_k-\omega_{k-\varkappa}-\Omega)d\varkappa d\Omega$. Здесь $F(\omega,\ \boldsymbol{k})$ определяется дисперсионными свойствами среды, $u(\varkappa,\ \Omega)\sim\sim|p(\varkappa,\ \Omega)|^2$ — спектр мощности пульсаций $p_1(\boldsymbol{r},\ t)$.

Уравнение (7) позволяет исследовать изменение спектра и его усредненных характеристик, обусловленное рассеянием частиц на флуктуациях среды с известным спектром $u(\varkappa,\ \Omega)$. Так, для средней частоты квантов $\langle\omega_k\rangle$, используя (7), легко получить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\omega_k\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial k_i}\left(D_{ij}\frac{\partial\omega_k}{\partial k_j}\right)\right\rangle. \quad (8)$$

Поскольку общее число частиц сохраняется, то знак $\partial\langle\omega_k\rangle/\partial t$ указывает, возрастает или убывает полная энергия волны в результате взаимодействия с флуктуирующей средой.

В частности, для изотропной среды $(G_0(\omega,\boldsymbol{k},p_0)=G_0(\omega,|\boldsymbol{k}|,p_0))$ и для изотропного спектра флуктуаций $p_1(u(\varkappa,\Omega)=u(|\varkappa|,\Omega))$ вычисления дают

$$\frac{\partial\langle\omega_k\rangle}{\partial t}=\left\langle\frac{4\pi}{V^2}\left[2F\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial k}\right)+\frac{\partial F}{\partial k}\right]\int_0^\infty\varkappa d\varkappa\int_0^{V\varkappa}\Omega^2 u(\varkappa,\ \Omega)\,d\Omega+\right.$$
$$\left.+4\pi F\frac{\partial V}{\partial k}\int_0^\infty\varkappa^4 u(\varkappa,\ V\varkappa)d\varkappa\right\rangle, \quad (9)$$

где $V=\partial\omega/\partial k$ — групповая скорость волны. Из формулы (9) следует, что для среды без дисперсий ($\partial V/\partial k=0$) средняя частота возрастает.

Для случая изотропной турбулентности в статье [5] было исследовано изменение средней частоты фотонов при распространении в недиспергирующем диэлектрике и холодной бесстолкновительной плазме. При этом использовалось малоугловое приближение, а в формулах (12) и (21) были допущены неточности. Рассмотрим здесь эти два примера без ограничения малоугловым приближением*.

1) Для диэлектрика $G_0=\varepsilon_0\omega^2-c^2k^2$, $p_0=\varepsilon_0$ и формула (9) дает такой результат: $\dfrac{\partial\langle\omega_k\rangle}{\partial t}=\dfrac{8\pi^2}{c\varepsilon_0^{3/2}}\langle\omega_k\rangle\int\limits_0^\infty \varkappa d\varkappa\int\limits_0^{\varkappa c/\sqrt{\varepsilon_0}}\Omega^2 u(\varkappa,\Omega)\,d\Omega$. Средняя частота будет расти по закону

$$\langle\omega_k\rangle=\langle\omega_{k0}\rangle e^{\gamma t},\quad \gamma=\frac{8\pi^2}{c\varepsilon_0^{3/2}}\int\limits_0^\infty \varkappa d\varkappa\int\limits_0^{\varkappa c/\sqrt{\varepsilon_0}}\Omega^2 u(\varkappa,\Omega)\,d\Omega, \tag{10}$$

так что $\gamma>0$ при любом спектре $u(\varkappa,\Omega)$.

2) Для плазмы $G_0=\omega^2-c^2k^2-\omega_0^2$ ($\omega_0^2=(4\pi e^2/m)N_0$, e, m — заряд и масса электрона), $p_0=N_0$, в результате

$$\frac{\partial\langle\omega_k\rangle}{\partial t}=\frac{32\pi^4e^4c^2}{m^2}\omega_0^2\left\langle\frac{1}{\omega_k^5}\int\limits_0^\infty \varkappa^4 u\left(\varkappa,\frac{c^2k}{\omega}\varkappa\right)d\varkappa\right\rangle. \tag{11}$$

Так как правая часть этого равенства положительна, то здесь также происходит возрастание средней частоты. Итак, в результате взаимодействия электромагнитной волны с флуктуациями диэлектрика или плазмы энергия волны возрастает, если спектр флуктуаций изотропный. Эти выводы совпадают с результатами, полученными при классическом рассмотрении в приближении геометрической оптики [3].

В качестве третьего примера рассмотрим задачу о рассеянии капиллярно-гравитационных волн на мелкой воде ($kh\ll 1$, h — глубина), на заданном случайном низкочастотном волнении. Именно в этом случае лагранжиан содержит вторые производные от обобщенных координат, предусмотренные в (1), а дисперсионное уравнение соответственно имеет вид $\omega^2=\alpha k^2+\beta k^4$, где $\alpha=gh$, $\beta=Th/\rho$ (T — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность, g — ускорение свободного падения). Поскольку здесь задача двумерная, формула (9) непосредственно не приложима. Считая для низкочастотных флуктуаций $\Omega^2=\alpha\varkappa^2$, а спектр $u(\varkappa,\Omega)=u(\varkappa)\delta(|\Omega|-\sqrt{\alpha}\varkappa)$, из (8) нетрудно получить

$$\frac{\partial\langle\omega_k\rangle}{\partial t}=\frac{2\pi g}{h_0}\left\langle\left[\frac{\omega^2}{kV\sqrt{V^2-g^2h_0^2}}+\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{\omega^2}{V\sqrt{V^2-g^2h_0^2}}\right)\right]\right\rangle\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \varkappa^2 u(\varkappa)\,d\varkappa.$$

* В случае электромагнитной волны обобщенными координатами являются компоненты векторного потенциала. Подобно тому, как это сделано, например, у Вентцеля [10], введем вектор q (q^1, q^2, q^3) и разложим его по бегущим плоским волнам с волновыми векторами k и единичными векторами l^σ ($\sigma=1,2$), указывающими направление поляризации. Тогда $\hat{a}_k^\sigma$ и $\hat{a}_k^{\sigma+}$ будут, соответственно, операторами уничтожения и рождения фотонов с импульсами $\hbar k$ и поляризациями l^σ.

Правая часть последнего выражения положительна, так что средняя частота капиллярно-гравитационных волн на мелкой воде в результате рассеяния на низкочастотных волнах также монотонно повышается.

Чтобы выяснить роль анизотропии спектра флуктуаций $p_1(\boldsymbol{r}, t)$, рассмотрим конкретный пример спектра

$$u(\boldsymbol{\varkappa}, \Omega) = \frac{L_x L_\perp^2 T}{16\pi^2} \langle p_1^2 \rangle \exp\left[-\frac{1}{4} (L_x^2 \varkappa_x^2 + L_\perp^2 \varkappa_\perp^2 + T^2 \Omega^2) \right],$$

где L_x и $L_\perp$ — масштабы корреляции по некоторому выделенному направлению x и перпендикулярно к нему, T — временной масштаб. Подставляя $u(\boldsymbol{\varkappa}, \Omega)$ в уравнение (8), получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \langle \omega_k \rangle}{\partial t} = \frac{L_x L_\perp T}{\sqrt{\pi}} \langle p_1^2 \rangle \Big\langle [L_x^2 L_\perp^2 k^2 + V^2 T^2 (L_\perp^2 k_x^2 + L_x^2 k_\perp^2)]^{-3/2} \times \\
\times \left\{ (L_\perp^2 + 2L_x^2) k^2 V F + (L_\perp^2 k_x^2 + L_x^2 k_\perp^2) k^2 \frac{\partial}{\partial k} \left(\frac{FV}{k} \right) - \right. \\
- \frac{3FV^2T^2}{L_\perp^2 L_x^2 k^2 + V^2 T^2 (L_\perp^2 k_x^2 + L_x^2 k_\perp^2)} \Big[k_x^2 k_\perp^2 (L_\perp^2 - L_x^2)^2 V + \\
\left. + \frac{\partial V}{\partial k} k (L_\perp^2 k_x^2 + L_x^2 k_\perp^2)^2 \Big] \right\} \Big\rangle .
\end{gathered} \tag{12}$$

В зависимости от вида $F(\omega, \boldsymbol{k})$ и соотношения между L_x и $L_\perp$ знак правой части в (12) может быть как положительным, так и отрицательным. В изотропном же пределе ($L_x = L_\perp = L$), естественно, (12) для диэлектрика переходит в (10), причем

$$\gamma = 2\sqrt{\pi}\, c^2 L T \langle \varepsilon_1^2 \rangle / \varepsilon_0^{3/2} (\varepsilon_0 L^2 + c^2 T^2)^{3/2},$$

а для плазмы соотношение (11) принимает вид

$$\frac{\partial \langle \omega_k \rangle}{\partial t} = \frac{24\pi^{5/2} c^2 e^4 \omega_0^2 \langle N_1^2 \rangle}{m^2} \left\langle \frac{L^3 T}{\omega_k^5 [L^2 + c^2 T^2 (1 - \omega_0^2/\omega_k^2)]^{5/2}} \right\rangle .$$

Интересно сравнить скорости изменения средней частоты квантов в этих средах при одинаковых значениях дисперсии ε. Отношение производных $(\partial/\partial t) \langle \omega_k \rangle$ в плазме и диэлектрике при $\omega_0 \ll \omega$ порядка $(\omega_0/\omega)^2 [L^2/(L^2 + c^2 T^2)]$, т. е. в плазме эффект энергообмена с волной много слабее, особенно при условии $L \ll cT$. При $\omega_0 \to \omega$ и $L \gg cT$ эффекты в обеих средах будут одного порядка.

Для сопоставления (12) с результатами, полученными в приближении геометрической оптики для анизотропных флуктуаций [3], рассмотрим малоугловое приближение, считая, что ось x соответствует направлению пучка ($k_x \approx k$).

1) Пусть $L_\perp \gg L_x$ (одномерный случай) и $VT \gg L_x$. Тогда знак $(\partial/\partial t) \langle \omega_k \rangle$ совпадает со знаком выражения $V(\partial F/\partial k) - 2F(\partial V/\partial k)$. Для диэлектрика этот знак положительный, для плазмы — отрицательный. Для диэлектрика остается в силе формула (10), только γ вдвое меньше, чем в изотропном случае ($L = L_x$). В плазме знак энергообмена меняется и эффект сильнее, чем в изотропном случае, в $(2/3)(\omega^2/\omega_0^2)(V^2 T^2/L_x^2)$ раз.

2) Пусть $L_\perp \ll L_x$, тогда знак $(\partial/\partial t) \langle \omega_k \rangle$ совпадает со знаком V, т. е. положителен и для диэлектрика и для плазмы. В плазме энер-

гия волны нарастает, как и в изотропном случае ($L=L_x$), но эффект намного сильнее (как $V^2T^2/L_{\perp}^2$) при $VT \gg L_x$.

В качественном отношении полученные выше конкретные выводы совпадают с результатами геометрооптического приближения [1–3], однако преимущество использованного в работе квантовомеханического метода возмущений, кроме простоты вывода кинетического уравнения, заключается в том, что при этом нет ограничений на величину амплитудных флуктуаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гавриленко В. Г., Степанов Н. С.— Изв. вузов — Радиофизика, 1973, **16**, № 1, с. 69.
2. Гурбатов С. Н., Саичев А. И. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 9, с. 1359.
3. Гавриленко В. Г., Кром М. Н, Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1977, **20**, № 8, с. 1181.
4. Красильников В. А., Павлов В И — ЖЭТФ, 1975, **68**, № 5, с. 1797.
5. Гавриленко В. Г., Кром М. Н, Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 9, с. 1254.
6. Островский Л. А, Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, **14**, № 4, с. 489.
7. Kravtsov Yu. A., Ostrovskiy L. A., Stepanov N S — Proc. IEEE, 1974, **62**, № 11, p. 1492.
8 Степанов Н. С. — Изв. вузов — Радиофизика, 1976, **19**, № 7, с. 960.
9 Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны — М: Мир, 1977.
10 Вентцель Г. Введение в квантовую теорию волновых полей. — М.—Л: ОГИЗ — Гостехиздат, 1947.

Горьковский государственный
университет

Поступила в редакцию
2 сентября 1982 г,
в окончательном варианте
24 мая 1983 г.

ENERGY OF QUANTA IN LAGRANGE SYSTEMS WITH FLUCTUATING PARAMETERS

M. N. Krom, N. S. Stepanov

The relation of coefficients of the kinetic equation determining changing the wave spectrum in momentum space with the law of dispersion and statistical characteristics of parameters is investigated for the Lagrange system with parameters slow fluctuating in space and time. Some specific examples are discussed.