ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 12 *РАДИОФИЗИКА* *1983*

УДК 538 574.530 18

О РЕЗОНАНСНОМ ВОЗБУЖДЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ ВОЛН

Ю. Р. Вайнберг, Б. И. Меерсон, П. В. Сасоров

Исследовано воздействие внешнего волнового возмущения на диспергирующие среды в том случае, когда в спектре возмущения имеются гармоники, удовлетворяющие дисперсионному соотношению линейных волн данной среды. Построена теория возмущений, основанная на методе многих масштабов и описывающая резонансное усиление индуцированной волны и эффекты нелинейного насыщения этого усиления для случаев четырех известных нелинейных уравнений Аналитические результаты сравниваются с результатами численных расчетов для возмущенного уравнения Кортевега — де Вриза

Процессы распространения нелинейных волн в диспергирующих средах привлекают к себе большое внимание исследователей. Применение метода обратной задачи теории рассеяния (см., например, [1]) позволило получить аналитические решения основных нелинейных уравнений, описывающих распространение и эволюцию волн в различных физических средах [2]. Одним из направлений исследований нелинейных волн является разработка различных методов теории возмущений, которые призваны дать приближенное решение задачи в том случае, когда уравнение нелинейных волн содержит малые «возмущающие» члены. В этой работе мы развиваем теорию возмущений, описывающую возбуждение волн в нелинейных диспергирующих средах под действием внешнего волнового возмущения в предположении, что спектр последнего содержит гармоники, частота и волновой вектор которых удовлетворяют определенному резонансному условию, зависящему от свойств среды.

В разд. 1 мы излагаем общую постановку задачи, а также ее решение в случае воздействия внешнего возмущения на среды, описываемые синус-уравнением Гордона. Разд. 2 содержит аналогичные результаты для сред, описываемых нелинейным уравнением Шредингера и модифицированным уравнением Кортевега — де Вриза. В разд. 3 соответствующая задача решается для уравнения Кортевега — де Вриза. Для этого же случая проведено численное решение уравнения, и его результаты сопоставляются с теоретическими расчетами. Аналитические результаты, полученные для всех четырех рассматриваемых уравнений, оказываются весьма близкими, что свидетельствует об универсальности исследуемого процесса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОГО СИНУС-УРАВНЕНИЯ ГОРДОНА

Пусть нелинейные диспергирующие волны в одномерной идеальной среде описываются уравнением в частных производных

$$L(u) + N(u) = 0, \tag{1}$$

где u — отклонение колеблющейся физической величины от положения равновесия, L — линейный оператор, содержащий, вообще говоря, саму функцию u и ее производные по координате x и времени t, N — нелинейный оператор, содержащий функцию u и ее производные по x. В отношении оператора N мы, во-первых, делаем естественное предположение о его аналитичности (другими словами, функция $N(u)$ является аналитической функцией u и ее производных по x). Во-вторых, мы считаем, что N не содержит линейной по u части (в противоположном случае эту часть можно отнести к оператору L).

Линейные волны, распространяющиеся в рассматриваемой системе, описываются линеаризованным уравнением $L(u) = 0$. Его решение методом Фурье приводит к некоторому дисперсионному уравнению $\Omega = \Omega(\varkappa)$, характеризующему линейные свойства среды (здесь $\varkappa$ — волновое число, а Ω — частота линейной волны) Предположим теперь, что на рассматриваемую среду действует малое внешнее возмущение в виде бегущей волны (для простоты будем считать ее монохроматической) с частотой ω и волновым числом k. Уравнение, описывающее такое воздействие, имеет вид

$$L(u) + N(u) = \varepsilon \sin(\omega t - kx), \tag{2}$$

где параметр ε характеризует интенсивность возмущения.

Интересуясь возбуждением волн от нулевого уровня, мы можем на начальной стадии процесса пренебречь нелинейным членом $N(u)$. В этом случае уравнение (2), вообще говоря, имеет решение в виде бегущей волны с постоянной амплитудой, описывающее вынужденные колебания среды под действием внешнего возмущения. Частота и волновое число этой «индуцированной» волны равны соответственно ω и k, а ее амплитуда определяется величинами ω, k и ε. Если соотношение между ω и k произвольно, амплитуда вынужденной волны относительно мала (пропорциональна ε). Однако в том случае, когда ω и k удовлетворяют дисперсионному соотношению для линейных волн данной среды, т. е. при $\omega = \Omega(k)$, решения в виде бегущей волны с постоянной амплитудой не существует. В этом случае правильное решение описывает линейный рост амплитуды бегущей волны со временем. Это явление имеет характер резонанса и аналогично воздействию синусоидального возмущения на гармонический осциллятор в случае совпадения частоты возмущения с собственной частотой осциллятора.

Резонансное нарастание волны должно прекратиться вследствие вступления в игру нелинейных эффектов. В случае идеальной среды можно ожидать, что «насыщение неустойчивости» имеет динамический характер, как и в случае резонансной раскачки нелинейного осциллятора без затухания. Если интенсивность внешнего возмущения ε достаточно мала, можно построить приближенное аналитическое решение задачи, рассматривая нелинейный член $N(u)$ по теории возмущений. Тогда стабилизация роста амплитуды волны сопровождается генерацией небольшого числа высших гармоник. Этим вопросам, в основном, и посвящена настоящая работа.

В качестве первого примера мы рассмотрим воздействие монохроматического возмущения на среды, описываемые синус-уравнением Гордона. Соответствующее уравнение имеет вид

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \varepsilon \sin(\omega t - kx). \tag{3}$$

В данном случае $L(u) = u_{tt} - u_{xx} + u$, $N(u) = \sin u - u$.

Дисперсионное соотношение для линеаризованного уравнения $L(u) = 0$ имеет вид $\Omega^2 = \varkappa^2 + 1$. Пусть ω и k удовлетворяют этому же дисперсионному соотношению, т. е $\omega = (k^2+1)^{1/2}$ (для определенности мы рассматриваем волны, бегущие вправо). В этом случае решение линеаризованного уравнения

$$L(u) = \varepsilon \sin\left[(k^2+1)^{1/2} t - kx\right] \tag{4}$$

с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$u_l = -[\varepsilon t/2(k^2+1)^{1/2}] \cos\left[(k^2+1)^{1/2} t - kx\right], \tag{5}$$

т. е. происходит резонансная раскачка бегущей волны — амплитуда волны линейно растет со временем. С ростом амплитуды волны в игру вступает хорошо известный нелинейный эффект — генерация высших гармоник, которая останавливает рост волны. Для описания этого процесса вернемся к уравнению (3), которое можно переписать в виде

$$u_{tt} - u_{xx} + u = u^3/6 - \varepsilon \sin[kx - (k^2+1)^{1/2} t], \tag{6}$$

где мы предположили, что при $\varepsilon \ll 1$ ограничение резонанса происходит в области $u \ll 1$ (это предположение подтверждается результатами).

Вид решения (5) линеаризованного уравнения позволяет предположить, что при $\varepsilon \ll 1$ решение нелинейной задачи (6) содержит «быструю» зависимость от переменной $\xi = x - (1+k^{-2})^{1/2} t$ и «медленную» зависимость от t. Переходя к новым переменным ξ, t и опуская производную второго порядка по медленному времени t, получаем

$$u_{\xi\xi} + k^2 u = (k^2/6) u^3 - k^2 \varepsilon \sin k\xi + 2k(k^2+1)^{1/2} u_{\xi t}. \tag{7}$$

Все члены, стоящие в правой части, при $\varepsilon \ll 1$ являются малыми возмущениями. Уравнение нулевого приближения имеет вид $u^{(0)}_{\xi\xi} + k^2 u^{(0)} = 0$, а его общее решение

$$u^{(0)} = a_0 \cos(k\xi + \varphi_0), \tag{8}$$

где a_0 и φ_0 — произвольные постоянные (амплитуда и фаза).

В первом приближении мы ищем решение уравнения (7) в виде

$$u^{(1)}(\xi, t) = a(t) \cos(k\xi + \varphi(t)) + g(\xi, a, \varphi), \quad g \ll a \ll 1. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получаем

$$\begin{gathered} g_{\xi\xi} + k^2 g = -k^2 \varepsilon \sin k\xi + (k^2/6) a^3 [(3/4) \cos(k\xi + \varphi) + \\ + (1/4) \cos(3k\xi + 3\varphi)] - 2k^2 (k^2+1)^{1/2} a_t \sin(k\xi + \varphi) - \\ - 2k^2 (k^2+1)^{1/2} a \varphi_t \cos(k\xi + \varphi), \end{gathered} \tag{10}$$

где a_t и φ_t означает производные соответствующих величин по времени.

Для того чтобы функция g не содержала неограниченно растущих по ξ членов (см. условие (9)), необходимо и достаточно, чтобы в правой части уравнения (10) не было синусов и косинусов $k\xi$. Это приводит к двум уравнениям для a_t и φ_t:

$$a_t = -[\varepsilon/2(k^2+1)^{1/2}] \cos\varphi; \tag{11}$$

$$\varphi_t = [1/2a(k^2+1)^{1/2}] (\varepsilon \sin\varphi + a^3/8). \tag{12}$$

Первый интеграл системы (11), (12) имеет вид

$$(a^4/32) + \varepsilon a \sin\varphi = \text{const}. \tag{13}$$

Уравнения (11), (12) и первый интеграл (13) позволяют провести полное исследование эволюции системы при любых начальных условиях, т. е. исследовать все траектории на фазовой плоскости (a, φ) [3]. Однако, поскольку мы рассматриваем возбуждение волн от нулевого уровня, $a(t=0) = 0$, в полном исследовании нет необходимости. Действительно, из (13) в этом случае имеем

$$a = -(32 \varepsilon \sin\varphi)^{1/3}. \tag{14}$$

Подставляя это выражение в уравнение (11) и интегрируя, получаем закон изменения фазы φ со временем в виде

$$F(\alpha, r) = 3^{1/4}\varepsilon^{2/3}2^{-5/3}(k^2+1)^{-1/2}t, \tag{15}$$

где $F(\alpha, r)$ — нормальный эллиптический интеграл первого рода с аргументом α и модулем r, $\cos\alpha = (a^2-\sqrt{3})/(a^2+\sqrt{3})$, $a = \sin^{-2/3}\varphi - 1$, $r^2 = (2-\sqrt{3})/4$. Тот факт, что $r^2 \simeq 0{,}067 \ll 1$, позволяет с точностью до 1—2% заменить в (15) функцию $F(\alpha, r)$ на α.

Формула (15) описывает поведение фазы φ, т. е. поведение нелинейной (зависящей от интенсивности возмущения ε) добавки к фазе первой гармоники волны. Эта добавка к фазе содержит как монотонную (пропорциональную времени), так и осциллирующую во времени части. Следовательно, амплитуда первой гармоники индуцированной волны испытывает периодические по времени колебания. Период этих колебаний, совпадающий с периодом осцилляций фазы, можно определить из (15). Результат имеет вид

$$T = 2^{14/3}3^{-1/4}(k^2+1)^{1/2}F(\pi/2, r)\varepsilon^{-2/3}. \tag{16}$$

Поскольку $r^2 \ll 1$, в формуле (16) можно положить $F(\pi/2, r) \simeq \pi/2$.

Итак, под действием резонансного возмущения в системе возбуждается слабонелинейная волна, амплитуда которой относительно медленно колеблется около нулевого значения с периодом, зависящим от амплитуды возмущения ε, как $\varepsilon^{-2/3}$. Максимальное значение амплитуды первой гармоники равно $(32\varepsilon)^{1/3}$. Следует отметить, что параметром разложения в (9) является величина $\varepsilon^{1/3}$.

Теперь можно вернуться к уравнению (10) и определить поправку $g(\xi, a, \varphi)$, описывающую в данном случае генерацию третьей гармоники. С ее учетом решение имеет вид

$$u^{(1)}(\xi t) = a(t)\cos(k\xi + \varphi(t)) - (a^3(t)/192)\cos(3k\xi + 3\varphi(t)), \tag{17}$$

где $a(t)$ и $\varphi(t)$ определены в (14), (15). Аналогичным образом можно построить и высшие приближения (ср., например, с [4]).

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА И МОДИФИЦИРОВАННОЕ УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА

В этом разделе мы приведем результаты решения задачи о резонансном воздействии внешней монохроматической волны на среды, описываемые нелинейным уравнением Шредингера и модифицированным уравнением Кортевега — де Вриза.

Нелинейное уравнение Шредингера с правой частью в виде бегущей волны можно записать в виде

$$iu_t + |u|^2u + (1/2)u_{xx} = \varepsilon\exp(-i\omega t + ikx). \tag{18}$$

В данном случае $L(u) = iu_t + (1/2)u_{xx}$, а $N(u) = |u|^2u$. Линейное дисперсионное соотношение имеет вид $\Omega = \varkappa^2/2$, поэтому случаю резонанса соответствует условие $\omega = k^2/2$. Тогда, переходя к новым переменным $x' = kx$, $t' = k^2t$ и новой функции $u' = k^{-1}u$, получаем «резонансное» уравнение в безразмерном виде:

$$iu'_{t'} + |u'|^2u' + (1/2)u'_{x'x'} = \varepsilon'\exp[-(i/2)t' + ix'], \tag{19}$$

где $\varepsilon' = k^{-3}\varepsilon$, штрихи в дальнейшем опускаем. Уравнение (19) содержит только один параметр ε', который мы считаем малым: $\varepsilon' \ll 1$.

Линеаризованное уравнение, получающееся из (19) путем отбрасывания нелинейного члена $N(u)$, имеет точное решение

$$u(x, t) = -i\varepsilon t\exp[-(i/2)t + ix], \tag{20}$$

описывающее неограниченный рост амплитуды индуцированной волны. Так же как и в случае синус-уравнения Гордона, переходим к «быстрой» и «медленной» переменным $\xi = -(t/2)+x$ и t. Тогда получаем уравнение

$$-iu_\xi + u_{\xi\xi} = 2\varepsilon e^{i\xi} - 2|u|^2 u - 2iu_t. \tag{21}$$

Решение нулевого приближения имеет вид $u^{(0)} = a_0 e^{i\xi}$, где a_0 — произвольная комплексная константа. Решение первого приближения мы ищем в виде

$$u^{(1)}(\xi, t) = A(t)e^{i\xi} + G(\xi, A), \quad |G| \ll |A| \ll 1, \tag{22}$$

но саму поправку $G(\xi, A)$ вычислять не будем, чтобы избежать громоздких формул. Тогда, подставляя (22) в (21) и пренебрегая в правой части высшими гармониками, получим

$$-iG_\xi + G_{\xi\xi} = 2e^{i\xi}(\varepsilon - |A|^2 A - iA_t) + \Gamma(\xi, t), \tag{23}$$

где $\Gamma(\xi, t)$ обозначает все члены, не содержащие гармонику $e^{i\xi}$. Для ограниченности функции G (см. условие (22)) необходимо потребовать, чтобы

$$iA_t = \varepsilon - |A|^2 A. \tag{24}$$

Переходя к вещественным переменным a и φ посредством замены $A = ae^{i\varphi}$, получаем из (24) после несложных вычислений систему эволюционных уравнений

$$a_t = -\varepsilon \sin\varphi; \tag{25}$$

$$\varphi_t = (1/a)\,(-\varepsilon\cos\varphi + a^3), \tag{26}$$

совпадающую (с точностью до линейного переобозначения φ и коэффициентов) с системой (11), (12), полученной для возмущенного синус-уравнения Гордона. Соответственно решение системы (25), (26) легко получить, пользуясь формулами (14), (15).

Таким образом, как и в системе, описываемой возмущенным синус-уравнением Гордона, в данном случае происходит резонансное возбуждение слабонелинейной волны с относительно медленно осциллирующей во времени амплитудой.

Рассмотрим теперь эффекты воздействия внешнего монохроматического возмущения на среды, описываемые модифицированным уравнением Кортевега — де Вриза:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = -\varepsilon \sin(x+t). \tag{27}$$

Здесь $L(u) = u_t + u_{xxx}$, $N(u) = u^2 u_x$. Уравнение (27) записано в безразмерном виде, чего всегда можно добиться. Соотношение между частотой и волновым числом возмущения в уравнении (27), легко видеть, соответствует резонансу с линейными волнами рассматриваемой среды. Метод решения задачи об ограничении роста волны здесь полностью совпадает с методом, использованным при решении синус-уравнения Гордона и нелинейного уравнения Шредингера: переход к «быстрой» и «медленной» переменным $\xi = x+t$ и $t' = t$ и построение последовательных приближений. В первом приближении решение записывается в виде

$$u(\xi, t) = a(t)\sin(\xi + \varphi(t)) - (a^3(t)/96)\sin(3\xi + 3\varphi(t)), \tag{28}$$

где эволюционные уравнения для $a(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид

$$a_t = -\varepsilon\cos\varphi; \tag{29}$$

$$\varphi_t = (1/a)\,(\varepsilon\sin\varphi - a^3/4), \tag{30}$$

т. е. опять лишь коэффициентами отличаются от соответствующей системы уравнений (11), (12) для возмущенного синус-уравнения Гордона, решение которой представлено формулами (14), (15). Параметром разложения здесь также является величина $\varepsilon^{1/3}$.

3. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА—ДЕ ВРИЗА

Исследуемое уравнение имеет вид

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = -\varepsilon \sin(x+t). \tag{31}$$

Здесь $L(u) = u_t + u_{xxx}$, $N(u) = uu_x$. В отличие от случаев, рассмотренных выше, в данном случае оператор $N(u)$ определяет в первом приближении генерацию второй гармоники, а не третьей. Поэтому для получения эволюционных уравнений для a и φ здесь необходимо провести вычисления вплоть до второго приближения. А именно, будем искать решение задачи в виде

$$u(\xi, t) = a(t) \sin(\xi+\varphi(t)) + v(\xi, a, \varphi) + w(\xi, a, \varphi), \tag{32}$$

где $w \ll v \ll a \ll 1$; введены быстрая и медленная переменные $\xi = x+t$ и $t' = t$. В первом приближении вычисляем функцию $v(\xi, a, \varphi)$ (вторая гармоника), во втором приближении используем условие отсутствия секулярности у $w(\xi, a, \varphi)$. Результат для $v(\xi, a, \varphi)$ имеет вид

$$v(\xi, a, \varphi) = -(a^2/12) \cos(2\xi + 2\varphi). \tag{33}$$

Интересным оказывается тот факт, что для $a(t)$ и $\varphi(t)$ снова получаются уравнения, аналогичные приведенным выше для других рассмотренных случаев:

$$a_t = -\varepsilon \cos\varphi; \tag{34}$$

$$\varphi_t = (1/a)(\varepsilon \sin\varphi - a^3/24). \tag{35}$$

Первый интеграл этой системы позволяет выразить a через φ в виде $a = (96\,\varepsilon \sin\varphi)^{1/3}$. Таким образом, максимальная амплитуда первой гармоники равна $(96\,\varepsilon)^{1/3}$. Период осцилляций амплитуды волны вычисляется так же, как и в случае синус-уравнения Гордона (см. формулу (16)), и равен

$$T = 2^{11/3}\, 3^{1/12} F(\pi/2, (2-\sqrt{3})^{1/2}/2)\, \varepsilon^{-2/3}. \tag{36}$$

Численный коэффициент в (36) приблизительно равен 22,2.

Для проверки точности развитой теории и определения области ее применимости было проведено численное решение уравнения (31) с нулевыми начальными условиями при различных значениях ε. При $\varepsilon \lesssim 1$ численное решение проявляет все свойства теоретического: возбуждение резонансной волны, ее рост, насыщение, спад и периодическое повторение этого процесса. Количественное сопоставление основных параметров теории с расчетами дает следующие результаты. На рис. 1 изображена теоретическая кривая зависимости максимальной амплитуды решения первого приближения от ε (см. формулу (33)):

$$A(\varepsilon) = a_{\max}(\varepsilon) + (1/12)\, a^2_{\max}(\varepsilon) = (96\,\varepsilon)^{1/3} + (16\,\varepsilon^2/3)^{1/3}. \tag{37}$$

Здесь же представлены точки максимумов решений, полученных при численных расчетах для различных ε. Из рисунка видно хорошее согласие теории с численными расчетами в области малых ε.

На рис. 2 изображены теоретическая зависимость «нелинейного» периода T от ε (формула (36)) и соответствующие точки, полученные в численных расчетах. Хорошее согласие сохраняется здесь даже в области $\varepsilon \gtrsim 1$.

Однако при $\varepsilon \gg 1$ характер решения меняется. Так, при $\varepsilon = 30$ численные расчеты демонстрируют существенно более сложное поведение решения, чем в случае малых ε. Периодические «биения» здесь уступают место сложному «условно-периодическому» процессу, максимумы и минимумы решения не повторяются, и в некоторые моменты времени образуются достаточно высокие и узкие солитоноподобные образования, которые затем опять «распадаются» на более или менее распределенные волновые формы. Эти процессы связаны с эффективным возбуждением при больших ε новых степеней свободы, а именно новых линейных волн с другими значениями волновых чисел. Последний факт проявляется уже в построении высших приближений к полученным нами решениям при малых ε. Так, линейная волна с волновым числом, равным 2, имеет амплитуду, пропорциональную ε^2, что приводит к соответствующему нарушению точной периодичности решения.

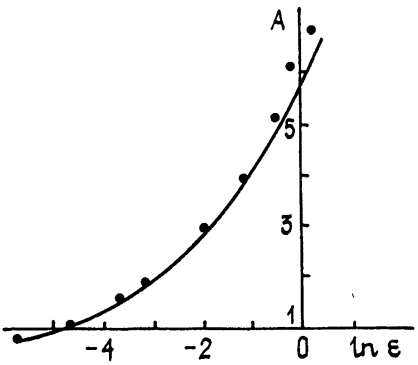

Рис 1.

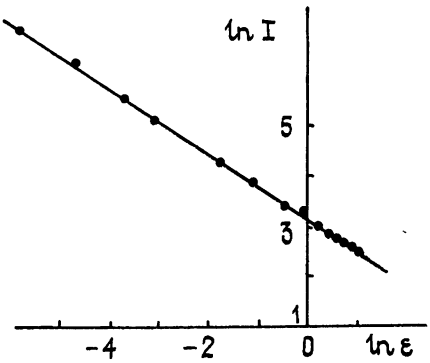

Рис 2.

В работе проведено исследование возбуждения нелинейных волн в диспергирующих средах под действием внешнего возмущения, имеющего вид бегущей волны и удовлетворяющего дисперсионному соотношению для линейных волн среды. Рассмотренный тип внешнего возмущения приводит к генерации в системе индуцированной волны с осциллирующими во времени параметрами. В том случае, когда возмущение мало и нелинейные члены в уравнениях для волн можно рассматривать по теории возмущений, результаты оказываются общими для широкого класса физических систем. С ростом интенсивности возмущения можно ожидать проявления индивидуальности конкретных нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1 Захаров В Е, Манаков С В., Новиков С. П., Питаевский Л П. Теория солитонов Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
2 Уизем Дж Линейные и нелинейные волны — М.: Мир, 1977.
3. Андронов А. А, Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
4 Найфэ А Х. Методы возмущений. — М : Мир, 1976.

Институт прикладной геофизики
Госкомгидромета

Поступила в редакцию
8 июня 1982 г.

ON RESONANT EXCITATION OF NONLINEAR DISPERSIVE WAVES

Yu. R. Vainberg, B. I. Meerson, P. V. Sasorov

The action of an external wave disturbance on a dispersive medium is investigated in the case of the presence of harmonics in the wave spectrum which satisfy the dispersion relation of linear waves of the medium A perturbation theory is developed which is based on the multiple time scale expansion and describes the resonant growth of induced wave as well as its nonlinear saturation for the cases of four well-known nonlinear equations. Analytic results are compared with those of numerical calculations for perturbed Korteweg — de Vries equation.