

УДК 621.371.255

## ФЛУКТУАЦИИ ФАЗЫ ПРИ ФОКУСИРОВКЕ СВЕТА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

*М. С. Беленький, А. П. Шелехов*

Исследовано влияние на флюктуации фазы и дрожание изображения источника параметра фокусировки пучка, размера излучающей апертуры и интенсивности турбулентности на трассе. Установлены условия, при которых фазовые флюктуации пучка, фокусируемого в турбулентной атмосфере, не зависят от длины трассы и параметра  $C_n^2$ .

В ряде задач, связанных с передачей энергии и информации, а также в связи с разработкой систем адаптивной оптики, необходимо знать случайные искажения фаз волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере. Эта проблема, как известно [1–4], надежно решена для плоской и сферической волн при любых турбулентных условиях распространения на трассе и для коллимированных пучков в условиях слабых флюктуаций интенсивности. В то же время в практически важном случае фокусированного излучения количественные соотношения для статистических характеристик флюктуаций фазы до сих пор неизвестны.

В данной работе выполнен теоретический анализ фазовых флюктуаций в оптических пучках, фокусируемых в турбулентной атмосфере. Получены выражения для структурной функции фазы и связанной с ней дисперсии дрожания изображения источника в фокальной плоскости приемной линзы, изучена их зависимость от параметров, характеризующих условия фокусировки, излучающую апертуру и турбулентность на трассе распространения. Установлена область значений параметров, характеризующих условия дифракции на апертуре передатчика и интенсивность турбулентности на трассе, где структурная функция фазы пучка не зависит от длины трассы и структурной характеристики атмосферной турбулентности  $C_n^2$ . Расчет выполнен с применением концепции средних дифракционных лучей [5]. Ранее этот подход применялся для анализа фазовых флюктуаций в одномодовых коллимированных [5] и многомодовых [6] пучках. Сравнение результатов проведенного расчета с результатами, полученными МПВ (в области применимости последнего), и данными эксперимента [5, 6] обнаружило удовлетворительное согласие.

1. Средние дифракционные лучи пучка с начальным распределением поля в плоскости излучающей апертуры вида

$$U_0(\rho) = \exp[-\rho^2(1/2a^2 + ik/2F)]$$

( $a$  — эффективный радиус пучка,  $k$  — волновое число,  $F$  — радиус кривизны фазового фронта в центре апертуры) аналогично [5, 6] определим как линии, ортогональные поверхности равной средней фазы. Будем рассматривать эти лучи как траектории, по которым оптическое

возбуждение передается в точку наблюдения. Согласно [5], при  $\rho_1/X \ll 1$  ( $\rho_1$  — координата точки наблюдения,  $X$  — длина трассы), уравнение луча с точностью до членов порядка  $(\rho_1/X)^2$  совпадает с выражением

$$\rho(x') = \rho_1 \exp \left[ - \int_{x'}^X v(\xi, q, \Omega, X/F) d\xi \right]. \quad (1)$$

Здесь  $x'$  — текущее расстояние, отсчитываемое от передатчика,

$$v(\xi, \Omega, q, X/F) = \frac{\xi(1 + 2q\Omega\xi^{6/5}) - \Omega^2(1 - X\xi/F)X/F}{\xi^2(1 + (4/3)q\Omega\xi^{6/5}) + \Omega^2(1 - x\xi/F)^2} \quad (2)$$

— текущее значение кривизны среднего фазового фронта,  $\Omega = ka^2X^{-1}$  — параметр Френеля излучающей апертуры,  $q = X/(k\rho_0^2)$  — параметр, характеризующий интенсивность турбулентности на трассе,  $\rho_0 = (1,45 k^2 C_n^2 X)^{-3/5}$  — радиус когерентности неограниченной плоской волны.

Используя формулы (1), (2), изучим зависимости траекторий средних дифракционных лучей от параметров  $q$  и  $\Omega$ . Рассмотрим пучки, фокусируемые в плоскость наблюдения ( $X/F = 1$ ). Поскольку фокусировка возможна только в зоне Френеля апертуры источника, будем полагать  $\Omega > 1$ . Из анализа формул (1), (2) следует, что при  $X/F = 1$  и  $\Omega > 1$  выделяются три характерные области значений параметров  $q$  и  $\Omega$  —

$$q \ll 1/\Omega; \quad (3)$$

$$1/\Omega \ll q \ll \Omega; \quad (4)$$

$$q \gg \Omega. \quad (5)$$

Первая область соответствует режиму слабого турбулентного уширения пучка. Средние дифракционные лучи пучка в этом режиме не зависят от интенсивности турбулентности на трассе. Уравнение лучей при условии  $\Omega \gg 1$  имеет вид  $\rho(x') = \rho_1\Omega(1-x'/X)$ . Вторая область, которую назовем областью активного сближения лучей, реализуется при умеренной интенсивности турбулентности на трассе. Траектории лучей в режиме (4) зависят как от параметра  $q$ , так и от параметра  $\Omega$ . Уравнение лучей при  $\Omega \gg 1$  записывается в виде  $\rho(x') = \rho_1[(3/4)q\Omega]^{1/2}(1-x'/X)$ . Наконец, неравенство  $q \gg \Omega$ , выполняющееся при сильной интенсивности турбулентности на трассе, определяет режим, при котором средние дифракционные лучи пучка достигают предельного положения. Траектории лучей при  $q \gg \Omega$  не зависят от параметров  $q$  и  $\Omega$  и определяются уравнением  $\rho(x') = \rho_1(x'/X)^{3/2}$ .

Траектории средних дифракционных лучей сфокусированного пучка, полученные численным интегрированием формул (1), (2), изображены на рис. 1. Левая ось здесь соответствует кривым 1—4, правая — кривым 5—7. Из рисунка видно, что лучи пучка с параметром  $X/F = 1$  в режимах (3), (4) существенно отличаются от лучей предельных типов волн и коллимированного ( $X/F = 0$ ) [5, 6] пучка. Если для плоской (сферической) волны и коллимированного пучка удаление средних дифракционных лучей от оптической оси мало и отношение  $|\rho(x')/\rho_1|$  при всех значениях  $x' \in [0, X]$  и произвольных значениях  $q$  и  $\Omega$  удовлетворяет неравенству  $|\rho(x')/\rho_1| \leq 1$ , то лучи сфокусированного пучка значительно удалены от оси. Отношение  $\rho(x'=0)/\rho_1 = \rho_0/\rho_1$  в режимах (3), (4) равно  $\rho_0/\rho_1 \sim \Omega > 1$  и  $\rho_0/\rho_1 \sim (\Omega q)^{1/2} \gg 1$  соответственно (кривые 1—4). С увеличением параметра  $q$  лучи пучка с  $X/F = 1$  при-

ближаются к оси и достигают предельного положения, определяемого формулой  $\rho(x') = \rho_1(x'/X)^{3/2}$ . При этом лучи сфокусированного и коллимированного пучков (кривая 7) совпадают.

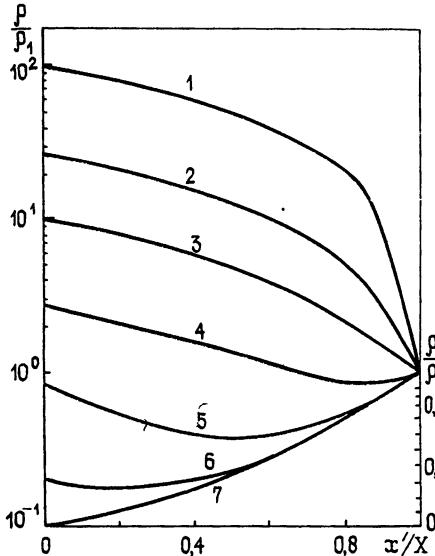


Рис. 1.

Рис. 1. Средние дифракционные лучи сфокусированного пучка:  
1— $\Omega=10^2$ ,  $q \ll 1/\Omega$ , 2— $\Omega=10^2$ ,  $q=10^{-1}$ , 3— $\Omega=10$ ,  $q \ll 1/\Omega$ , 4— $\Omega=10$ ,  $q=1$ , 5— $\Omega=10^2$ ,  $q=10^2$ , 6— $\Omega=10$ ,  $q=10^2$ , 7— $\Omega \ll q$ .

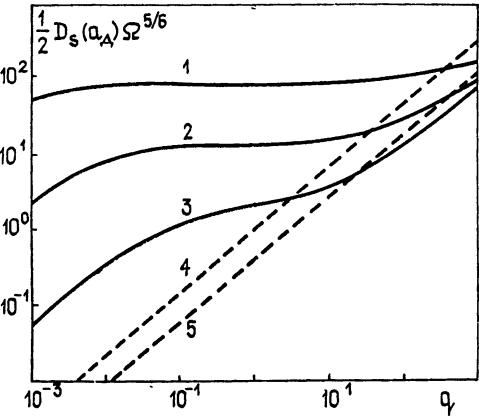


Рис. 2.

Рис. 2. Зависимость структурной функции фазы сфокусированного пучка от интенсивности турбулентности на трассе:  
1— $\Omega=10^3$ , 2— $\Omega=10^2$ , 3— $\Omega=10$ , 4—плоская, волна, 5—сферическая волна.

2. Определим [5] флуктуации фазы пучка в точке  $(X, \rho_1)$  волнового фронта как изменения оптической длины пути, вызванные флуктуациями диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_1$  на среднем дифракционном луче, приходящем в эту точку:

$$S(X, \rho_1) = (k/2) \int_0^X \epsilon_1(x', \rho(x')) dx'.$$

Структурная функция фазы

$$D_S(X, \rho) = \langle [S(X, \rho_1) - S(X, \rho_2)]^2 \rangle, \quad \rho = |\rho_1 - \rho_2|,$$

вычисленная с использованием  $\delta$ -коррелированности  $\epsilon_1$  вдоль направления распространения, записывается в виде

$$D_S(X, \rho_1 - \rho_2) = 4\pi k^2 \int_0^X dx' \int d^2x \Phi_n(x', x) \{1 - \exp[i\mathbf{x}(\rho_1(x') - \rho_2(x'))]\}. \quad (6)$$

Подставляя в (6) явное выражение для лучей (1), в случае колмогоровской турбулентности  $\Phi_n(x) = 0,033 C_n^2 x^{-11/3}$  для структурной функции фазы пучка получим формулу

$$D_S(X, \Omega, q, X/F, \rho) = \gamma(\Omega, q, X/F) D_{S_0}(X, \rho), \quad (7)$$

где  $D_{S_0}(X, \rho) = 2(\rho/\rho_0)^{5/3}$  — структурная функция фазы плоской волны,

$$\gamma(\Omega, q, X/F) = \int_0^1 \exp \left[ -\frac{5}{3} \int_{x'/X}^1 v(\xi, \Omega, q, X/F) d\xi' \right] dx'.$$

При значениях параметров  $q$  и  $\Omega$ , соответствующих режимам (3) — (5), коэффициент пропорциональности в формуле (7) имеет следующие асимптотики:

$$\gamma(\Omega, q, 1) = \begin{cases} 3/8 \Omega^{5/3}, & q \ll 1/\Omega; \\ 3/8 (3/4 \Omega q^{-1})^{5/6}, & 1/\Omega \ll q \ll \Omega; \\ 2/7, & q \gg \Omega. \end{cases} \quad (8)$$

Результаты расчета зависимости структурной функции фазы пучка от интенсивности турбулентности на трассе изображены на рис. 2. Здесь  $a_d = X/ka$  — дифракционный радиус пучка. Кривыми 4, 5 показаны соответствующие зависимости для плоской (кривая 4,  $D_{S_0} \sim q^{5/6}$ ) и сферической (кривая 5) волн. Видно, что при  $q \ll 1/\Omega$  и  $1/\Omega \ll q \ll \Omega$  структурная функция фазы сфокусированного пучка существенно (в  $\Omega^{5/3}$  и  $\Omega^{5/6}q^{-5/6}$  раз соответственно) превышает значения этой величины

для плоской волны. Из анализа поведения средних дифракционных лучей (рис. 1) ясно, что это превышение обусловлено значительным ( $\rho_0/\rho_1 \gg 1$ ) удалением лучей (кривые 1—3) от оси пучка на трассе.

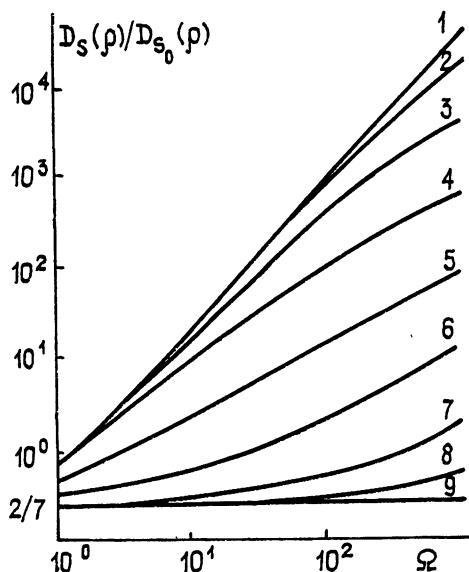


Рис. 3.

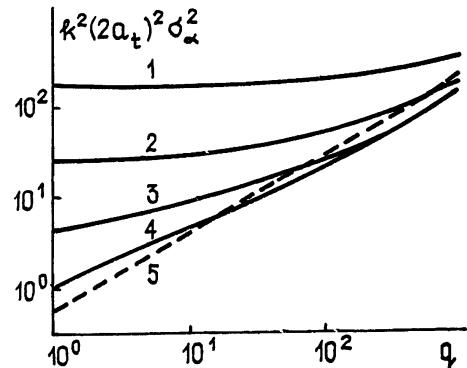


Рис. 4.

Рис. 3. Зависимость структурной функции фазы от параметра  $\Omega$ :  
 1— $q=10^{-4}$ , 2— $q=10^{-3}$ , 3— $q=10^{-2}$ , 4— $q=10^{-1}$ , 5— $q=1$ , 6— $q=10$ , 7— $q=10^2$ ,  
 8— $q=10^3$ , 9— $q=10^4$ .

Рис. 4. Дисперсия дрожания изображения при приеме сфокусированного пучка ( $\Omega_t=1$ ). Для кривых 1—3 параметр  $X/F=1$ ,  $\Omega=10^3$  — кривая 1,  $\Omega=10^2$  — кривая 2,  $\Omega=10$  — кривая 3, кривая 4— $X/F=0$ ,  $\Omega=1$ , кривая 5— $\Omega=0$ .

Известно [2—4, 7, 8], что условия насыщения мерцаний предельных типов волн и сфокусированных пучков не совпадают. В первом случае условие имеет вид

$$q \gg 1, \quad (11)$$

во втором —

$$q \gg 1/\Omega. \quad (12)$$

Последнее неравенство может выполняться, в том числе при  $q \ll 1$ , когда плоская (или сферическая) волна мерцает слабо. Насыщение мер-

цаний сфокусированного излучения при слабом мерцании плоской (или сферической) волн может быть обусловлено, как видно из формул (7)–(10), большими значениями случайной разности фаз —  $D_s(\rho = \sqrt{X}/k) \sim \Omega^{5/6}$ , возникающими из-за больших, по сравнению с плоской (или сферической) волной, разносов средних дифракционных лучей (см. рис. 1). Отметим, что формулы (9), (10) не могут быть получены обычным (без применения средних дифракционных лучей) методом геометрической оптики или методом плавных возмущений [1–4], так как условия применимости МПВ, определяемые неравенством  $q \ll 1/\Omega$ , нарушаются уже при  $q \geq 1/\Omega$ .

Средний квадрат случайной разности фаз между двумя параллельными лучами, рассчитанный [1–4] методом геометрической оптики, методом плавных возмущений или на основе простых качественных соображений [1], имеет вид

$$\langle [\Delta S(\rho)]^2 \rangle \sim k^2 C_n^2 X \rho^{5/3}, \quad l_0 \ll \rho \ll L_0,$$

где  $\rho$  — разнос лучей,  $l_0$  и  $L_0$  — внутренний и внешний масштабы турбулентности соответственно. Пропорциональность величины  $\langle [\Delta S]^2 \rangle$  произведению  $C_n^2 X$  — известное свойство фазовых флуктуаций оптических волн. Оно положено в основу ряда оптических методов определения параметра  $C_n^2$  [2, 3, 8]. Из формул (7), (9) и рис. 2 в то же время следует, что структурная функция фазы сфокусированного пучка в режиме (4) не зависит от интенсивности турбулентности на трассе. Этому результату можно дать следующую физическую интерпретацию. При увеличении параметра  $q$  происходит сближение средних дифракционных лучей (рис. 1). Оно уменьшает случайную разность фаз в точках наблюдения ( $\gamma \sim q^{-5/6}$ ). Это уменьшение компенсирует свойственное плоской (сферической) волне и коллинированному пучку увеличение с ростом  $q$  среднего квадрата разности фаз на «неподвижных» лучах ( $D_{S_0} \sim q^{5/6}$ ). При  $q \gg \Omega$  выражения  $D_S$  коллинированного и сфокусированного пучков, как и следовало ожидать, совпадают.

Сравним полученные результаты с результатами расчета радиуса когерентности поля сфокусированного пучка  $\rho_c$ , найденными [9, 10] на основе решения уравнения для функции взаимной когерентности второго порядка  $\Gamma_2$ . Из соотношений [9, 10] находим

$$\frac{\rho_c}{\sqrt{X/k}} = \begin{cases} \sqrt{3} & \Omega^{-1}, \quad q \ll 1/\Omega; \\ 2 & \Omega^{-1/2}, \quad 1/\Omega \ll q \ll \Omega; \\ 2 & q^{-1/2}, \quad q \gg \Omega. \end{cases} \quad (13)$$

Теперь определим  $\rho_c$  из условия  $D_S(X, \rho_c) = 2$  с использованием формул (7)–(10). Сравнение значений  $\rho_c$ , найденных двумя способами, показывает, что различие между ними не превышает 8 %. В то же время, если в формуле (7) осуществить приближенную квадратическую аппроксимацию вида  $D_S(X, \rho) \sim \alpha^{6/5} \rho^2$ , то значения  $\rho_c$ , найденные с использованием средних дифракционных лучей и по формулам работ [9, 10], совпадут.

Таким образом, из проведенного рассмотрения видно, что модифицированный лучевой метод позволяет описать флуктуации фазы оптических волн в области фокусировки излучения ( $X = F$ ), где традиционный лучевой метод неприменим. Это, очевидно, обусловлено тем обстоятельством, что для построения поверхностей равной средней фазы и траекторий лучей используется фазовый множитель решения уравнения для функции  $\Gamma_2$ , которое, как известно [2, 4, 7, 8], справедливо при любых значениях параметров  $\Omega$ ,  $X/F$  и  $q$  во всех точках трассы, в том числе в области перетяжки пучка.

Из соотношений (13)–(15) и формул, полученных с использованием средних дифракционных лучей, следует, что при  $q \ll 1/\Omega$  и  $q \gg \Omega$  масштаб  $r_c$  с ростом  $q$  убывает:  $r_c \sim q^{-1/2}$ . Однако в режиме активного сближения лучей он перестает зависеть от интенсивности турбулентности на трассе и становится равным дифракционному диаметру пучка  $r_c = 2a_t$ .

При гауссовой статистике поля в режиме насыщенных мерцаний ( $q \gg 1/\Omega$ ) выводы о зависимости  $r_c$  от параметров пучка и интенсивности турбулентности на трассе применимы [7, 8] к пространственному масштабу корреляции интенсивности  $\rho_I$ . Поэтому при  $1/\Omega \ll q \ll \Omega$  и  $q \gg \Omega$ , согласно (14), (15), должны выполняться соотношения  $\rho_I \sim 2a_t$  и  $\rho_I \sim 2\rho_0$  соответственно. Эти результаты ранее были установлены как теоретически [7, 8] путем численного и асимптотического анализа соотношений для четвертого момента поля, так и экспериментально [11, 2]. Отсутствие зависимости масштабов  $r_c$  и  $\rho_I$  от интенсивности турбулентности на трассе при  $1/\Omega \ll q \ll \Omega$  физически можно объяснить указанными особенностями поведения структурной функции фазы и средних дифракционных лучей сфокусированного пучка в режиме (4).

На рис. 3 показаны зависимости отношения  $D_S(\rho)/D_{S_0}(\rho)$  от параметра  $\Omega$ . Видно, что с увеличением  $\Omega$  это отношение растет, а при увеличении  $q$  оно убывает. При  $q \gg \Omega$  (кривые 8, 9) величина  $D_S(\rho)/D_{S_0}(\rho)$  не превышает единицы и слабо зависит от параметра  $\Omega$ . Это соответствует достижению средними дифракционными лучами предельного положения (кривая 7, рис. 1).

3. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим явление дрожания изображения источника в фокальной плоскости приемной линзы. Рассмотрим случай  $a \gg \rho_0$  и  $q > 1$ . При указанных условиях эффективный средний размер сфокусированного пучка в плоскости линзы  $a_{\text{эфф}} \sim \sqrt{X/k} q^{1/2}$  превышает радиус первой зоны Френеля.

Используя формулы (7)–(10) и известные [1, 2] соотношения, для дисперсии дрожания изображения источника будем иметь

$$\sigma_a^2 = \gamma(\Omega, q, X/F) \sigma_{a0}^2,$$

где  $\sigma_{a0}^2 = 2 \times 0,97 / (k^2 (2a_t)^{1/3} \rho_0^{5/3})$  — дисперсия дрожания изображения при приеме неограниченной плоской волны,  $a_t$  — радиус линзы. Зависимости дисперсии  $\sigma_a^2$  от интенсивности турбулентности на трассе при  $\Omega_t = ka_t^2 X^{-1} = 1$  изображены на рис. 4. Кривые 4, 5 здесь соответствуют коллимированному ( $X/F = 0, \Omega = 1$ ) пучку и сферической волне ( $\sigma_a^2(\Omega \rightarrow 0) \sim q^{5/6}$ ). Видно, что при больших значениях  $\Omega$  в режиме слабого турбулентного уширения пучка и режиме активного сближения лучей ( $q \ll \Omega$ ) дисперсия дрожания изображения сфокусированного пучка, так же как и структурная функция фазы  $D_S(X, \rho)$ , не зависит от  $q$  (кривые 1, 2). Это, как уже известно, обусловлено сближением средних дифракционных лучей.

Из представленных результатов, таким образом, ясно, что сфокусированные пучки нельзя использовать в известных оптических методах определения  $C_n^2$ , основанных на измерениях дрожания изображения или искажений когерентности оптической волны [2, 8], поскольку для этих пучков существует область значений параметров  $q$  и  $\Omega$ , где величины  $D_S(\rho)$  и  $\sigma_a^2$  не зависят от интенсивности турбулентности на трассе. Отметим, однако, что в условиях насыщения фокусировки ( $q \gg \Omega^{-1}$ ) параметр  $C_n^2$  можно определить [12] из измерений эффективного среднего размера сфокусированного пучка.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Татарский В. И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1967.
2. Гурвич А. С. и др. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. — М.: Наука, 1976.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. — М.: Мир, 1981, т. 2.
4. Распространение лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена — М.: Мир, 1981.
5. Всеп'янов М. С., Миронов В. Л. — J. Opt. Soc. Am., 1980, 70, № 1, р. 159; Беленький М. С., Миронов В. Л. Тезисы докладов I Всесоюзного совещания по атмосферной оптике. — Томск, 1976, ч. 1, с. 138.
6. Беленький М. С., Миронов В. Л. — Квантовая электроника, 1982, 9, № 1, с. 9.
7. Гочелашивили К. С., Шишов В. И. Волны в случайно-неоднородных средах. — М: ВИНИТИ, 1981.
8. Миронов В. Л. Распространение лазерного пучка в турбулентной атмосфере. — Новосибирск: Наука, 1981.
9. Белельский М. С., Миронов В. Л. Тезисы докладов III Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере — Томск, 1975, с. 202.
10. Беленький М. С., Кон А. И., Миронов В. Л. — Квантовая электроника, 1977, 4, № 3, с. 517.
11. Гурвич А. С., Старобинец И. А. — Изв. вузов — Радиофизика, 1971, 14, № 12, с. 1834.
12. Беленький М. С. и др. В кн.: Распространение оптических волн в атмосфере — Новосибирск. Наука, 1975, с. 72

Институт оптики атмосферы  
СО АН СССР

Поступила в редакцию  
15 октября 1982 г.,  
после доработки  
6 июня 1983 г.

## PHASE FLUCTUATIONS AT LIGHT FOCUSING IN A TURBULENT ATMOSPHERE

*M. S. Belen'kij, A. P. Shelekhov*

The dependence of the beam focusing parameter, the emitting aperture size and the turbulence intensity along the path on the phase source image jitter fluctuations has been studied. The conditions have been determined under which the phase fluctuations of the beam focused in a turbulent atmosphere is independent on the path length and the parameter  $C_n^2$ .

---