ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 11 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 543.42:51

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

М. А. Антонец, А. И. Кнафель, А. И. Нотик, В. И. Турчин

Предложено использовать методы теории моментов для отыскания спектральной плотности мощности по выборочным значениям корреляционной функции. Проведено описание всех возможных оценок спектральной плотности мощности. Отмечается, что результаты теории моментов составляют основу для аналитического исследования особенностей спектрального анализа методом энтропии и методом, предложенным В. Ф. Писаренко. В заключение предложена спектральная оценка, обобщающая метод В. Ф. Писаренко.

В различных областях физики и техники широко применяется спектральный анализ, содержащий, в частности, процедуру определения спектральной плотности мощности $P(\nu)$ по значениям корреляционной функции $\Phi(\tau)$, известной на ограниченном интервале $\tau\in[0, T]$. На практике весьма часто исследуются процессы с так называемым дискретным временем, когда $\Phi(\tau)$ заменяется совокупностью выборок $\{\Phi_k\}$, $k=0,\dots, n$, так называемой корреляционной последовательностью. В этом случае ищется спектральная плотность мощности $P(x)$, коэффициентами Фурье которой являются $\Phi_0,\dots, \Phi_n$ (непосредственная замена $\Phi(\tau)$ на $\{\Phi_k\}$ возможна, в частности, если $P(\nu)$ отлична от нуля в полосе частот $|\nu|\leqslant\nu_{\max}$; тогда $\Phi_k=\Phi(k/\nu_{\max})$, а $P(x)$ есть периодически продолженная $P(\nu)$, где $x=\pi\nu/\nu_{\max}$). Ниже будет рассматриваться спектральный анализ процессов с дискретным временем.

Целью настоящей работы является исследование задачи построения оценки $P_n(x)$ спектральной плотности мощности $P(x)$ по ограниченному числу членов корреляционной последовательности $\{\Phi_k\}_0^n$*. Предлагается следующая формулировка задачи: найти функцию $P_n(x)$, удовлетворяющую условиям:

(i) $P_n(x)\geqslant 0$ в силу физической сущности спектральной плотности мощности;

$$\text{(ii)}\qquad \tilde{\Phi}_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\,P_n(x)\,dx=\Phi_k,\qquad k=0,\dots, n;$$

(iii) поскольку (i) и (ii) в общем случае не обеспечивают однозначного построения $P_n(x)$, должно быть введено дополнительное условие, имеющее некоторый физический либо информационный смысл.

* При такой постановке рассматриваемая задача отличается от известной задачи оценивания спектральной плотности мощности по реализациям стационарного случайного процесса. С практической точки зрения исследование способов построения $P_n(x)$ по корреляционной последовательности необходимо для развития методики обработки выходных сигналов устройств, непосредственно измеряющих корреляционную функцию (фурье-спектрометров, радиотехнических корреляторов и т. п.).

Метод построения оценки $P_n(x)$ должен, естественно, удовлетворять предельному соотношению: $P_n(x) \to P(x)$ равномерно по x, если $n \to \infty$, где $P(x)$ отвечает бесконечной корреляционной последовательности $\{\Phi_k\}_0^\infty$.

Сразу же следует отметить, что традиционный способ построения спектральной оценки в виде отрезка ряда Фурье (см., например, [1])

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} \Phi_k a_k e^{ikx}, \qquad \Phi_{-k} = \overline{\Phi}_k, \tag{1}$$

где a_k — так называемые коэффициенты «спектрального окна», улучшающие оценку, не удовлетворяет одновременно условиям (i) и (ii), в отличие от новых нелинейных методов вычисления $P_n(x)$ [2, 11], обладающих рядом интересных особенностей по сравнению с (1). Эти методы будут рассмотрены ниже, здесь же мы остановимся на общей задаче описания возможных спектральных оценок, удовлетворяющих (i) и (ii).

1. Описание всех спектральных оценок, удовлетворяющих (i) и (ii). Для решения данной задачи целесообразно использовать математический аппарат, применяемый для исследования проблемы моментов [6–8, 12], который развивался (начиная еще с трудов П. Л. Чебышева и А. А. Маркова) в работах Ахиезера, Крейна, Сёге и др. для решения широкого круга математических проблем, во многом сходных с задачей отыскания спектральной плотности мощности. С рассматриваемой задачей, в частности, практически совпадает тригонометрическая проблема моментов [6]: требуется описать множество неотрицательных мер $d\sigma(x)$, где $d\sigma(x) = P(x)dx$, $P(x) \geqslant 0$, если σ непрерывна, с заданными $n+1$ первыми моментами Φ_k:

$$\Phi_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, d\sigma(x), \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Решением этой задачи можно считать описание всех возможных (бесконечных) корреляционных последовательностей $\{\tilde{\Phi}_k\}_0^\infty$, первые $n+1$ членов которых совпадают с Φ_k: $\tilde{\Phi}_k = \Phi_k$, $k=0, \ldots, n$, т. е. всех возможных продолжений заданной корреляционной последовательности. Явный вид продолжения следующий: первый продолженный член $\tilde{\Phi}_{n+1}$ должен удовлетворять неравенству [6]:

$$|\tilde{\Phi}_{n+1} - \xi_n| \leqslant r_n, \tag{3}$$

где $r_n = \det \Phi^{(n)} / \det \Phi^{(n-1)}$; $\Phi^{(n)}$ — корреляционная матрица* $\Phi^{(n)} = \|\Phi_{ij}^{(n)}\|$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 0, \ldots, n$, $\Phi_{ij}^{(a)} = \Phi_{i-j}$;

$$\xi_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\det \Phi^{(n-1)}} \begin{vmatrix} \Phi_{-1} & \Phi_{-2} & \ldots & \Phi_{-n} & 0 \\ \Phi_0 & \Phi_{-1} & \ldots & \Phi_{-n+1} & \Phi_{-n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n-1} & \Phi_{n-2} & \ldots & \Phi_0 & \Phi_{-1} \end{vmatrix}.$$

* Для того чтобы последовательность произвольных комплексных чисел $\Phi_0, \ldots, \Phi_n$ принадлежала к корреляционной последовательности (была бы выборкой из значений некоторой корреляционной функции), необходима и достаточна положительная определенность всех корреляционных матриц $\Phi^{(k)}$, $k=0, \ldots, n$. Это правило можно использовать на практике для теста: действительно ли набор измеренных чисел образует и корреляционную последовательность.

Система неравенств для последующих членов $\tilde{\Phi}_m$, $m>n+1$, строится по индукции.

Физически величина r_n характеризует меру неопределенности, с которой может быть продолжена та или иная корреляционная последовательность. Весьма интересен вырожденный случай, когда для некоторого $m\leqslant n$ $r_m=0$ ($\det \Phi^{(m)}=0$). В этом, и только в этом случае $P(x)=d\sigma(x)/dx$ находится однозначно в виде набора спектральных линий [6,7]:

$$P(x)=\sum_{l=1}^{m} P_l\delta(x-x_l),\ p_l>0, \tag{4}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, x_l определяются через корни $z_l=\exp(ix_l)$ алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} \Phi_0 & \Phi_{-1} & \dots & \Phi_{-m} \\ \Phi_1 & \Phi_0 & \dots & \Phi_{-m+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{m-1} & \Phi_{m-2} & \dots & \Phi_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^m \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

а $p_l>0$ — путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{l=1}^{m} p_l \exp(-ikx_l)=\Phi_k,\quad k=1,\dots,m. \tag{6}$$

Явный вид всех возможных спектральных оценок $P_n(x)$, отвечающих (i), (ii), получен в [12]:

$$P_n(x)=\operatorname{Re}\left\{\frac{\psi_n^*(z)-z\psi_n(z)\varepsilon(z)}{\varphi_n^*(z)-z\varphi_n(z)\varepsilon(z)}\right\}\Bigg|_{z=e^{ix}}. \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon(e^{ix})$ — предельное значение на окружности произвольной мероморфной в области $|z|\leqslant 1$ функции $\varepsilon(z)$; $|\varepsilon(z)|\leqslant 1$, $\{\varphi_k(z)\}$ — система ортогональных на окружности многочленов, отвечающих спектральной мере $d\sigma(x)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi_k(e^{ix})\overline{\varphi_l(e^{ix})}\,d\sigma(x)=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\neq l\end{cases}. \tag{8}$$

Коэффициенты первых $n+1$ многочленов φ_k могут быть явно выражены через $\Phi_0,\dots,\Phi_n$ [7,8]; $\psi_n(z)$ — многочлены второго рода:

$$\psi_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{ix}+z}{e^{ix}-z}\,[\varphi_k(e^{ix})-\varphi_k(z)]\,d\sigma(x), \tag{9}$$

где для $k\leqslant n$ $d\sigma(x)$ может быть заменена на $|\varphi_n^*(e^{ix})|^{-2}dx$; φ_k^* и ψ_k^* — сопряженные многочлены:

$$\varphi_k^*(z)=z^k\overline{\varphi_k}(1/z),\qquad \psi_k^*(z)=z^k\overline{\psi_k}(1/z).$$

Отметим некоторые свойства $\varphi_k(z)$, необходимые в дальнейшем [8]: а) все нули φ_k лежат внутри единичной окружности; б) старший коэффициент $k_n=r_n^{-1/2}$, где r_n — радиус области неопределенности продолжения корреляционной последовательности (см. (3)); в) если энтропия процесса S,

$$S = (1/2\pi)\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln P(x)dx, \tag{10}$$

конечна, существуют предельные соотношения:

$$\varphi_n^*(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} \pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{z-e^{ix}}{z-e^{-ix}} \ln P(x)\,dx\right\}, \tag{11}$$

откуда $|\varphi_n^*(e^{ix})|^{-2} \to P(x)$ при $n\to\infty$; r_n образуют невозрастающую последовательность и существует предел

$$r_n = k_n^{-2} \to \exp(S), \qquad n \to \infty. \tag{12}$$

Этот факт весьма примечателен с физической точки зрения, так как связывает степень «прогнозируемости» поведения корреляционной последовательности в той области, где она неизвестна, с конкретной физической величиной: энтропией процесса (10).

2. «Однозначные» оценки спектральной плотности мощности. С практической точки зрения представление ответа в виде системы неравенств (3) или выражения, содержащего произвольную функцию (7), не всегда удобно. На $P_n(x)$ в этом случае необходимо наложить условие (iii), делающее выбор оценки спектральной плотности мощности однозначным. Так, Бергом [2] (по-видимому, без учета результатов работ [6–8]) было предложено максимизировать функционал энтропии (10) для $P_n(x)$ (условие (iii) в нашей терминологии), что обеспечивает однозначность спектральной оценки:

$$P_n(x) = \gamma_0 |\Gamma_n(e^{ix})|^{-2}, \quad \Gamma_n(z) = \gamma_n z^n + \gamma_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \gamma_0. \tag{13}$$

$\{\gamma_k\}$ находятся путем решения системы линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} \Phi_{l-k}\gamma_k = \begin{cases} 1, & l=0 \\ 0, & l=1,\ldots,n \end{cases}. \tag{14}$$

Это решение существует и единственно, если $\Phi^{(n)}$ положительно определена. Впоследствии способ вычисления спектральной оценки (13) получил название спектрального анализа методом энтропии (САМЭ). Как показано в [9], максимизация энтропии отвечает выбору функции $\varepsilon(z)$ в (7) в виде $\varepsilon\equiv 0$*, откуда следует простейшая связь $\Gamma_n(z)$ с описанными выше многочленами, ортогональными на окружности: $\Gamma_n(z) = \sqrt{\gamma_0}\,\varphi_n^*(z)$. Указанная связь позволяет использовать известные свойства многочленов, ортогональных на окружности [8] для изучения особенностей спектральной оценки (13). Это представляется особенно важным, поскольку, с одной стороны, оценка (13) (как, очевидно, и другие оценки вида (7)) обладает, по сравнению с традиционной оценкой (1), рядом необычных свойств, в первую очередь, повышенным разрешением, а с другой стороны, тем, что до сих пор, насколько нам известно, свойства (13) изучались лишь путем машинного моделирования [3–5], что дает ограниченные результаты для понимания метода. Здесь, прежде всего, представляют интерес различные оценки разности

---

* Отметим, что продолжение корреляционной последовательности, отвечающее (13), имеет вид $\widetilde{\Phi}_{n+1} = \xi_n$ [10].

$\varphi_n^*(z)-\pi(z)$ при $z\to e^{ix}$, дающие представление о «разрешении» метода: свойстве $P_n(x)$ иметь, начиная с некоторого n, примерно те же максимумы и минимумы, что и порождающая $P_n(x)$ спектральная плотность мощности $P(x)$. Многочисленные оценки подобного рода см. в [8].

Далее, свойство (а) многочленов $\{\varphi_k(z)\}$ позволяет в явном виде выписать формулу для продолжения корреляционной последовательности через величины нулей $\{z_l\}$ этих многочленов и константу $\overline{\varphi_n(0)}$:

$$\tilde{\Phi}_k=\sum_{l=1}^{n} c_l\bar{z}_l^k,\quad k=0,\,1,\ldots;\quad c_l=\left[\overline{\varphi_n(0)}\prod_{l=1}^{n}\left(\frac{1}{z_l}-\bar{z}_l\right)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n}\left(1-\frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_l}\right)\right]^{-1}. \tag{15}$$

Поскольку $|z_l|<1$, из (15) следует, что продолженные коэффициенты убывают экспоненциально с ростом номера k; для $k=0,\ldots,n$ $\tilde{\Phi}_k=\Phi_k$ и (15) является своеобразным аналогом теоремы Виета о корнях многочлена.

Наряду с САМЭ в работе [11] Писаренко предложено использовать в качестве оценки $P_n(x)$ спектральную плотность, являющуюся суммой спектра белого шума $\varepsilon_0=\mathrm{const}$ и конечного числа спектральных линий:

$$P_n(x)=\varepsilon_0+\sum_{l=1}^{n}p_l\delta(x-x_l),\quad p_l>0. \tag{16}$$

Существование и единственность (16) устанавливается в классической теореме Каратеодори — Сёге [7]. Значение ε_0 в (16) может быть найдено как минимальное собственное число $\Phi^{(n)}$, а x_l, p_l — из выражений (5), (6), где Φ_0 заменяется на $\Phi_0-\varepsilon_0$.

Основываясь на результатах работ [7, 8, 12], можно утверждать, что оценка (16) отвечает, в противоположность САМЭ, требованию максимума энтропии спектральной оценки, равной $\ln\varepsilon_0$, при условии представления спектральной меры в виде непрерывной компоненты и функции скачков (при этом учтено, что конечный набор спектральных линий не вносит вклада в энтропию процесса). Отсюда же следует $\varepsilon_0\to\exp(S)$ при $n\to\infty$, если S конечна.

В заключение можно предложить более общий вариант оценки (16):

$$P_n(x)=\varepsilon_0P_0(x)+\sum_{l=1}^{n}p_l\delta(x-x_l),\quad p_l>0, \tag{17}$$

где $P_0(x)$ — спектральная плотность мощности заданного вида. Можно показать, что представление (15) единственно и ε_0 находится как минимальное собственное число матрицы $\Phi_0^{(n)^{-1/2}}\Phi^{(n)}\Phi_0^{(n)^{-1/2}}$, где $\Phi_0^{(n)}$ — корреляционная матрица, отвечающая $P_0(x)$; x_l, p_l находится в соответствии с (5), (6). Под $\Phi_0^{(n)^{1/2}}$ здесь понимается положительно определенная матрица $A^{(n)}$, удовлетворяющая соотношению $A^{(n)}A^{(n)}=\Phi_0^{(n)}$. Чтобы не создавать лишних вычислительных трудностей, первоначально можно задать матрицу $\Phi_0^{(n)^{1/2}}$, по которой затем находятся $\Phi_0^{(n)}$, P_0, ε_0 и т. д.

Естественно, что метод Писаренко целесообразно использовать при наличии априорных данных о представимости определяемой спектральной плотности мощности в виде дискретного набора линий (это же относится и к обобщению метода Писаренко), а метод максимальной энтропии, наоборот, при полном отсутствии априорных данных. Заметим, что оценку САМЭ в некотором смысле можно рассматривать как наиболее близкую ко всем спектральным оценкам, отвечающим всем возможным продолжениям корреляционной последовательности, так как последние «сгущаются» вблизи условного экстремума функционала энтропии [13].

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н. М. Цейтлина за ряд ценных замечаний, высказанных в процессе обсуждения данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. — М: Мир, 1980.
2. Burg J. P. Maximum entropy spectral analysis: Paper, presented at 37 th Annual International SEG Meeting, Oklachoma City, Oklachoma, Oct. 1967.
3. Lacoss R. T. — Geophysics, 1971, **36**, № 4, p. 661.
4. Gabriel W. F. — Proc. IEEE, 1980, **68**, № 6, p. 654.
5. Swingler D. N. — J. Geophys. Res., 1979, **84**, B2, p. 679.
6. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. — Харьков: Гос. научно-техн. изд-во Украины, 1938.
7. Гренандер У., Сёге Г. Теплицевы формы и их приложения. — М.: ИЛ, 1961.
8. Геронимус Я. Л. Многочлены, ортогональные на окружности и отрезке. — М.: Гостехиздат, 1958.
9. Аров Д. З., Крейн М. Г. — Функциональный анализ и его приложения, 1981, **15**, № 2, с. 61.
10. Komessaroff M. M, Lerche I. Image Formation from Coherence Function in Astronomy.— Proc. IAU Colloq, № 49, Groningen, 1979, p. 241.
11. Pisarenko V. F.— Geophys. J Res. Astr. Soc., 1973, **33**, p. 287.
12. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973.
13. Джейнс Э. Т. — ТИИЭР, 1982, **70**, № 9, с. 33.

Научно-исследовательский
радиофизический институт

THE USE OF THE RESULTS FOR THE MOMENT SOLUTION IN THE PROBLEM OF THE SPECTRAL ANALYSIS

M. A. Antonets, A. I. Knafel', A. I. Notik, V. I. Turchin

To solve one of the problems of the spectral analysis — finding out the spectral power density over selected values of the correlation function — we suggest to use methods of the moment theory. From this theory the description is followed of all possible estimations of the spectral power density; the results of this theory make up the basis for the analytical investigation of the spectral analysis perculiarities by the entropy method and by the method proposed by V. F. Pisarenko. In conclusion a spectral estimation is given which generalizes the Pisarenko's method.