ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 11 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 523.164

ФАЗОВАЯ ПРОБЛЕМА В СИСТЕМАХ АПЕРТУРНОГО СИНТЕЗА

М. В. Конюков

Описаны способы получения распределения радиояркости по модулю преобразования Фурье и фазовозмущенным преобразованиям Фурье. Доказана разрешимость фазовой проблемы для фазовых возмущений, возникающих при прохождении сигнала через ионосферу, тропосферу и по линиям связи.

До недавнего времени было распространено мнение о неразрешимости задачи получения распределения радиояркости (РРЯ) по фазовозмущенным преобразованиям Фурье (ФВПФ). Считалось, что существует бесчисленное множество РРЯ, определяемых одним ФВПФ, и без дополнительной информации, типа одновременных наблюдений опорного источника, невозможно получение единственного решения. Однако к настоящему времени ситуация существенно изменилась, и возможность получения РРЯ по ФВПФ, полученным на системах апертурного синтеза (САС), практически не вызывает сомнения [1, 2]. Определяющими факторами, обеспечивающими разрешимость фазовой проблемы, явились следующие особенности РРЯ и результатов наблюдений на САС:

а) РРЯ являются функциями с ограниченным носителем (финитными);

б) отклики узкополосных интерферометров дают ФВПФ; при существующем механизме формирования фазовых возмущений фазовая информация не исчезает полностью, как это имеет место, например, в рентгеноструктурном анализе;

в) при числе антенн $n > 3$ имеется фазовая информация в виде так называемых соотношений замыкания (CLOSURE PHASE);

г) для реально существующих РРЯ на носителе существуют области конечной меры, где функция равна нулю.

Цель предлагаемой работы состоит в рассмотрении фазовой проблемы для САС, в частности, установлении условий, при которых возможно получение РРЯ по ФВПФ. Нами оставлены вне поля зрения важные проблемы, связанные с неполнотой информации о ФВПФ и программной реализацией поиска РРЯ по ФВПФ.

1. Результаты наблюдений, получаемых на существующих в настоящее время узкополосных САС, образуют множество

$$\{u_k,\ v_k,\ \tilde{f}(u_k,\ v_k)\}_{k\in K}, \tag{1}$$

где $(u_k,\ v_k)$ — параметры интерферометра, $\tilde{f}(u_k,\ v_k) = \tilde{f}_c(u_k,\ v_k) + i\tilde{f}_s(u_k, v_k)$ — измеренный отклик узкополосного интерферометра, K — совокупность индексов, определяющих различные результаты измерений в проведенном эксперименте. Заметим, что в отсутствие фазовых возмущений $\tilde{f}(u_k, v_k)$ является значением преобразования Фурье РРЯ $f(x, y)$ в точке (u_k, v_k) [3]. Множество значений параметров интерферометров, реализовавшихся в эксперименте, определяется конструкцией САС, наблюдаемой областью небесной сферы, частотой съема информации. Для любого реального эксперимента оно конечно и расположено в ограниченнной области uv-плоскости. В этих условиях задача получения РРЯ по результатам наблюдений на САС, вообще говоря, неразрешима, и поэтому нами будет рассматриваться эксперимент на идеальной САС, позволяющей получить произвольное множество результатов наблюдений с любым распределением параметров интерферометров по uv-плоскости. Тогда с использованием подходящей интерполяционной процедуры по результатам наблюдений можно найти преобразование Фурье РРЯ $\tilde{f}(u, v)$ и тем самым свести задачу определения РРЯ к вычислению интеграла

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(u, v) \exp\left[-i(ux + vy)\right] du dv. \tag{2}$$

Наличие ионосферы и тропосферы на пути излучения от источника к антеннам САС, равно как и прохождение сигнала по линиям передачи сигнала от антенн к точке формирования отклика, приводит, вообще говоря, к существенным отличиям измеренных откликов интерферометров от соответствующих значений преобразования Фурье РРЯ, причем отклонения модуля значительно меньше отклонения фазы. Поэтому в идеальном эксперименте, адекватном описанной ситуации, будет предполагаться, что модули откликов интерферометров равны модулям преобразования Фурье РРЯ, тогда как фазы могут отличаться сколь угодно сильно. Используя подходящую интерполяционную процедуру по результатам такого эксперимента, можно построить

$$\tilde{f}^{\text{в}}(u, v) = \tilde{f}(u, v) \exp\left[i\varphi(u, v)\right], \tag{3}$$

где $\varphi(u, v)$ — действительная функция двух переменных (фазовое возмущение). Ниже функция $\tilde{f}^{\text{в}}(u, v)$ будет называться ФВПФ. При решении фазовой проблемы нет принципиальной разницы между функциями одной и двух переменных. Поэтому, для простоты, нами подробно будет рассматриваться лишь случай одной переменной.

Пусть $f(x)$ — одномерное РРЯ, тогда

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega x}\, dx, \qquad \tilde{f}^{\text{в}}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}, \tag{4}$$

где $\varphi(\omega)$ — действительная функция, являются ее истинным и фазовозмущенным преобразованиями Фурье. Сформулируем фазовую проблему для двух существенно различных случаев:

A. Найти функцию $f(x)$ по модулю ее преобразования Фурье $|\tilde{f}(\omega)|$ (преобразование $f(x) \to |\tilde{f}(\omega)|$ нелинейно).

B. Найти функцию $f(x)$ по ее ФВПФ $\tilde{f}^{\text{в}}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$, причем $\varphi(\omega)$ не зависит от $\tilde{f}(\omega)$ (преобразование $f(x) \to \tilde{f}^{\text{в}}(\omega)$ линейно).

2. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема и отлична от нуля на всей оси $0x$ $(f(x) \in L_1(-\infty, \infty))$, $\tilde{f}(\omega)$ — ее преобразование Фурье,

$|\tilde{f}(\omega)|$ — модуль и $\tilde{f}^{\text{в}}(\omega)=\tilde{f}(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$ — ФВПФ. Тогда легко показать, что функции $f(x)$, $f^{\text{в}}(x)$ и $f^{m}(x)$, определяемые равенствами

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-i\omega x}\, d\omega, \quad f^{\text{в}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{\text{в}}(\omega) e^{-i\omega x}\, d\omega,$$
$$f^{m}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)| e^{-i\omega x}\, d\omega, \tag{5}$$

существуют, и имеют место следующие оценки для норм разностей:

$$\| f(x) - f^{\text{в}}(x) \|_{L_1} \leqslant 2 \| f(x) \|_{L_1}, \quad \| f(x) - f^{m}(x) \|_{L_1} \leqslant 2 \| f(x) \|_{L_1}. \tag{6}$$

Это означает, что функции $f^{\text{в}}(x)$ и $f^{m}(x)$ не могут рассматриваться приближениями к функции $f(x)$. Далее, для $f(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ $\tilde{f}_c(\omega)$ и $\tilde{f}_s(\omega)$ независимы, и разрешимость фазовой проблемы требует дополнительной экспериментальной информации. Действительно, получение $f(x)$ обращением преобразования Фурье требует двух функций ω: четной $\tilde{f}_c(\omega)$ и нечетной $\tilde{f}_s(\omega)$, тогда как в постановку фазовой проблемы входит лишь одна четная функция $|\tilde{f}(\omega)|$. Поэтому фазовая проблема для функций из $L_1(-\infty, \infty)$ может быть решена только при наличии дополнительной экспериментальной информации, эквивалентной произвольной нечетной функции.

3. Пусть $f(x)$ определена на всей оси $0x$, равна нулю на левой полуоси и абсолютно интегрируема ($f(x) \in L_1^{+}(-\infty, \infty)$). Преобразование Фурье этой функции

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega x}\, dx = \tilde{f}_c(\omega) + i\tilde{f}_s(\omega). \tag{7}$$

Функции $\tilde{f}_c(\omega)$ и $\tilde{f}_s(\omega)$ определены и отличны от нуля на всей оси 0ω, обладают следующими свойствами симметрии: $\tilde{f}_c(\omega) = \tilde{f}_c(-\omega)$, $\tilde{f}_s(\omega) = -\tilde{f}_s(-\omega)$ и $\tilde{f}(\omega)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости. Однако, в отличие от преобразования Фурье функции из $L_1(-\infty, \infty)$, они не независимы: функции $\tilde{f}_c(\omega)$ и $\tilde{f}_s(\omega)$ связаны преобразованием Гильберта [4,5]:

$$\tilde{f}_s(\omega) = \frac{1}{\pi} \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_c(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda, \qquad \tilde{f}_c(\omega) = -\frac{1}{\pi} \fint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}_s(\lambda)}{\omega - \lambda}\, d\lambda \tag{8}$$

($\fint$ — знак интеграла в смысле главного значения), и для определения $\tilde{f}(\omega)$ достаточно знать лишь косинус или синус преобразование Фурье. Иными словами, сужение класса функций от $L_1(-\infty, \infty)$ к $L_1^{+}(-\infty, \infty)$ привело к уменьшению в два раза необходимой для получения функции информации. Далее, по $\tilde{f}(\omega) = \tilde{f}_c(\omega) + i\tilde{f}_s(\omega)$ можно получить представление преобразования Фурье через модуль и фазу $\tilde{f}(\omega) = |\tilde{f}(\omega)|\, e^{i\psi(\omega)}$. После его логарифмирования имеем

$$\ln \tilde{f}(\omega) = \ln |\tilde{f}(\omega)| + i\psi(\omega). \tag{9}$$

Возникает вопрос: не связаны ли преобразованием Гильберта $\psi(\omega)$ и $\ln |\tilde{f}(\omega)|$? Ответ на него, вообще говоря, отрицательный [6,7]. Дело в том, что функция $\ln \tilde{f}(\omega)$ — аналитическая всюду в верхней полуплоскости, кроме нулей $\tilde{f}(\omega)$, и соотношение

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\tilde{f}(\omega)|}{\omega - \lambda} d\lambda \tag{10}$$

имеет место, только если у функции $\tilde{f}(\omega)$ нет нулей в верхней полуплоскости комплексного переменного. Если же у функции $\tilde{f}(\omega)$ такие нули есть, то выписанное соотношение не имеет места. Однако простым преобразованием

$$\tilde{f}_{\text{н}}(\omega) = \tilde{f}(\omega) \prod_{k=1}^{K} \frac{\omega - z_k^*}{\omega - z_k}, \tag{11}$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ — комплексные нули функции $\tilde{f}(\omega)$, расположенные в верхней полуплоскости, получаем функцию, у которой нет нулей в верхней полуплоскости. Учитывая, что модули $\tilde{f}(\omega)$ и $\tilde{f}_{\text{н}}(\omega)$ одинаковы, получаем следующее соотношение между модулем и фазой:

$$\psi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\tilde{f}(\lambda)|}{\omega - \lambda} d\lambda + \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Arg} \frac{\omega - z_k^*}{\omega - z_k}. \tag{12}$$

Из (12) следует, что фазу преобразования Фурье нельзя получить по его модулю, поскольку она определяется не только модулем, но и комплексными нулями $\tilde{f}(\omega)$, расположенными в верхней полуплоскости. Легко показать, что в число нулей $|\tilde{f}(\omega)|$, расположенных в верхней полуплоскости, наряду с нулями $\tilde{f}(\omega)$ входят комплексно-сопряженные нули $\tilde{f}(\omega)$, расположенные в нижней полуплоскости. Далее, зная только модуль, нельзя выделить нужные нули, и поэтому решение фазовой проблемы A требует дополнительной экспериментальной информации. Заметим, что в отличие от класса $L_1(-\infty, \infty)$ требуемое здесь количество информации конечно.

Все изложенное остается в силе и для интегрируемых в квадрате функций с ограниченным носителем ($f(x) \in L_2(-x_0, x_0)$). Действительно, по теореме, обратной теореме Винера—Пейли [4], функция

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-x_0}^{x_0} f(x) e^{i\omega x} dx, \tag{13}$$

будучи продолженной в комплексную плоскость, является целой аналитической функцией первого порядка роста конечного типа, а для нее имеет место соотношение (12) и следующие из него выводы. Основной вывод о необходимости дополнительной экспериментальной информации для разрешимости фазовой проблемы A остается верным и для функций, принадлежащих конечномерным пространствам и множествам. Для иллюстраций рассмотрим два случая.

а) РРЯ принадлежит конечномерному линейному пространству функций, представимых в виде

$$f(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \exp\left[-i \frac{\pi}{x_0} kx\right], & |x| \leqslant x_0 \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases}. \tag{14}$$

Преобразование Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$\tilde{f}(\omega) = \sum_{k=-n}^{n} c_k G_k(\omega), \tag{15}$$

где

$$G_k(\omega) = \begin{cases} (-1)^k \sin(x_0\omega)/(\omega - \pi k/x_0), & \omega \neq \pi k/x_0 \\ x_0, & \omega = \pi k/x_0 \end{cases}. \tag{16}$$

Функции $\{G_k(\omega)\}_{k=-n}^{n}$ линейно независимы, и нетрудно показать, что задача поиска $\{c_k\}_{k=-n}^{n}$ по $\tilde{f}(\omega)$ разрешима.

Выражение (15) можно записать в виде

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\sin(x_0\omega)}{\omega \prod\limits_{l=1}^{n} (\omega^2 - \pi^2 l^2/x_0^2)} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k c_k \prod_{l=-n}^{n}{}' (\omega - \pi l/x_0), \tag{17}$$

где Π' означает, что в произведении нет множителя с $l=k$. Введем функцию

$$\Phi(\omega) = \frac{\tilde{f}(\omega)\tilde{f}^*(\omega)\, \omega^2 \prod\limits_{l=1}^{n} (\omega^2 - \pi^2 l^2/x_0^2)^2}{\sin^2(x_0\omega)}, \tag{18}$$

которая может быть вычислена при известном модуле преобразования Фурье. Возьмем $2n+1$ различных значений $\{\omega_m\}_{m=1}^{2n+1}$ и построим систему уравнений для определения величин a_0, $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{n}$ $(c_k = a_k + ib_k$, $c_{-k} = a_k - ib_k)$:

$$\left\{ \sum_{k=-n}^{n} \sum_{k'=-n}^{n} (-1)^{k+k'} c_k c_{k'}^* \prod_{l=-n}^{n}{}' (\omega_m - \pi l/x_0) \times \prod_{l'=-n}^{n} (\omega_m - \pi l'/x_0) = \Phi(\omega_m) \right\}_{m=1}^{2n+1}. \tag{19}$$

Эта система алгебраических уравнений имеет, вообще говоря, 2^{2n+1} решений, и выбор правильного нельзя осуществить, зная только модуль. Таким образом, для разрешимости фазовой проблемы A с функциями вида (14) необходима дополнительная фазовая информация.

б) РРЯ принадлежит множеству функций, представимых конечными суммами δ-функций:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{K} a_k \delta(x - x_k). \tag{20}$$

Косинус и синус преобразования Фурье $f(x)$ имеют вид

$$\tilde{f}_c(\omega)=\sum_{k=1}^{K} a_k\cos(\omega x_k),\quad \tilde{f}_s(\omega)=\sum_{k=1}^{K} a_k\sin(\omega x_k), \tag{21}$$

а квадрат модуля преобразования Фурье приводится к

$$\Phi(\omega)=\tilde{f}(\omega)\tilde{f}^*(\omega)=\sum_{k=1}^{K} a_k^2+2\sum_{k=1}^{K-1}\sum_{l=k+1}^{K} a_k a_l\cos[\omega(x_k-x_l)]. \tag{22}$$

Гармонический анализ функции $\Phi(\omega)$ позволяет определить линейно-независимые периоды и им соответствующие амплитуды. По ним получим координаты точечных источников

$$\{x_k=x_1+2\pi/T_k^{\omega}\}_{k=2}^{K}, \tag{23}$$

где $\{T_k^{\omega}\}_{k=2}^{K}$ — линейно-независимые периоды, и систему алгебраических уравнений для определения $\{a_k\}_{k=1}^{K}$:

$$\sum_{k=1}^{K} a_k^2=A_1^2,\qquad \{2a_1a_k=A_k\}_{k=2}^{K}. \tag{24}$$

Здесь $\{A_k\}_{k=1}^{K}$ — амплитуды, соответствующие линейно-независимым периодам. Система имеет, вообще говоря, 2^n решений, и выбор правильного осуществим лишь с использованием дополнительной фазовой информации. Этот вывод оказывается верным и при представлении распределения радиояркости суммой конечного числа гауссовых форм.

4. Пусть одномерная САС содержит $n\geqslant 3$ элементов, и набеги фаз для отдельного элемента за счет ионосферы, тропосферы и линий передачи сигнала будут $\{\varphi_k\}_{k=1}^{n}$. Тогда фазовозмущенные отклики узкополосных интерферометров имеют вид

$$\tilde{f}^{\text{в}}(\omega_{lk})=\tilde{f}(\omega_{lk})\exp[i(\varphi_l-\varphi_k)], \tag{25}$$

где $\tilde{f}^{\text{в}}(\omega_{lk})$ — значение фазовозмущенного, а $\tilde{f}(\omega_{lk})$ — значение истинного преобразований Фурье при параметре ω_{lk}. Поскольку

$$\tilde{f}(\omega_{lk})=|\tilde{f}(\omega_{lk})|\exp[i\psi(\omega_{lk})],\quad \tilde{f}^{\text{в}}(\omega_{lk})=|\tilde{f}(\omega_{lk})|\exp[i\psi^{\text{в}}(\omega_{lk})], \tag{26}$$

для фаз откликов интерферометров имеют место следующие соотношения:

$$\{\{\psi^{\text{в}}(\omega_{lk})=\psi(\omega_{lk})+\varphi_l-\varphi_k\}_{k=1}^{n-1}\}_{l=k+1}^{n}. \tag{27}$$

Выделим из (27) уравнения

$$\{\psi^{\text{в}}(\omega_{l1})=\psi(\omega_{lk})+\varphi_l-\varphi_1\}_{l=2}^{n}. \tag{27a}$$

Разрешим их относительно $\{\varphi_l-\varphi_1\}_{l=2}^{n}$ и после подстановки результата в остальные получим следующие соотношения между значениями фаз преобразования Фурье и теми же величинами, полученными по откликам интерферометров:

$$\{\{\psi(\omega_{lk})-\psi(\omega_{l1})+\psi(\omega_{k1})=\psi^{\text{в}}(\omega_{lk})-\psi^{\text{в}}(\omega_{l1})+\psi(\omega_{k1})\}_{k=2}^{n-1}\}_{l=k+1}^{n}. \tag{28}$$

Полученный набор из $(n-1)(n-2)/2$ равенств называют соотношениями замыкания (CLOSURE PHASE). Для указанных типов фазовых возмущений он представляет собой дополнительную экспериментальную информацию о значениях фаз преобразования Фурье. Поскольку $n(n-1)/2>(n-1)(n-2)/2$, соотношения (28) не позволяют определить значения фаз преобразования Фурье для параметров $\{\{\omega_{lk}\}_{k=1}^{n-1}\}_{l=k+1}^{n}$. Однако они служат основой для отбора правильного решения из конечного множества, допускаемого модулем преобразования Фурье, для функций, принадлежащих $L_1^+(-\infty,\infty)$, $L_2(-x_0,x_0)$ и т. п. Именно они обеспечивают разрешимость фазовой проблемы A и служат основой для разработки процедур получения РРЯ по результатам наблюдений на САС в присутствии фазовых возмущений.

5. Пусть функция $f(x)$ — интегрируемая с квадратом с ограниченным носителем ($f(x)\in L_2(-x_0,x_0)$). По теореме, обратной теореме Винера — Пейли [4], ее преобразование Фурье, продолженное в комплексную плоскость, является целой аналитической функцией первого порядка роста конечного типа. Пусть далее $\tilde f^{\text{в}}(\omega)=\tilde f(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ — ее фазовозмущенное преобразование Фурье ($\varphi(\omega)$ не зависит от $\tilde f(\omega)$). Осуществим его продолжение на комплексную плоскость:

$$\tilde f^{\text{в}}(\omega+i\tau)=\tilde f(\omega+i\tau)\exp[i\varphi(\omega+i\tau)]. \tag{29}$$

Тогда для всех функций $\varphi(\omega)$, представимых степенным рядом по ω и отличных от линейных $a+b\,\omega$, $\tilde f^{\text{в}}(\omega+i\tau)$ имеет порядок роста, больший единицы, и, следовательно, $\tilde f^{\text{в}}(\omega)$ не является преобразованием Фурье функции с ограниченным носителем. Действительно, для того чтобы $\tilde f^{\text{в}}(\omega)$ была преобразованием Фурье функции с ограниченным носителем по теореме Винера — Пейли [4], $\tilde f^{\text{в}}(\omega+i\tau)$ должна быть целой аналитической функцией первого порядка роста конечного типа. Вышеизложенное служит основанием для утверждения о разрешимости фазовой проблемы B при известном носителе [8]. Поскольку рассматриваемые фазовые возмущения приводят к появлению отличных от нуля значений функции вне носителя, для решения фазовой проблемы B нужно найти такую функцию $\varphi_0(\omega)$, что

$$\tilde f_*(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde f^{\text{в}}(\omega)\exp[i\varphi_0(\omega)]\exp(-i\omega x)\,d\omega \tag{30}$$

равна нулю вне носителя. Можно показать, что $f_*(x)$ является решением задачи и при известном носителе функции оно единственно [8].

Наряду с фазовыми возмущениями $e^{i\varphi(\omega)}$, обеспечивающими линейность преобразования $f(x)\to\tilde f^{\text{в}}(\omega)$, существуют обладающие тем же свойством фазовые возмущения, определяемые функциями вида

$$\Phi(\omega)=\prod_{k=1}^{K}(1-\omega/z_k^*)/(1-\omega/z_k), \tag{31}$$

где комплексные числа $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ не являются нулями функции $\tilde f(\omega)$. ФВПФ $\tilde f^{\text{в}}(\omega)=\tilde f(\omega)\Phi(\omega)$, продолженные в комплексную плоскость, представляют собой мероморфную функцию и в соответствии с теоремой Винера — Пейли не могут быть преобразованиями Фурье функций с ограниченным носителем. Однако следует иметь в виду, что это верно лишь для фазовых возмущений, обеспечивающих линейность преобразования $f(x) \to \tilde{f}^{\text{в}}(\omega)$. Если преобразование нелинейно, как это имеет место для фазового возмущения (31), когда $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ — комплексные нули $\tilde{f}(\omega)$, $\tilde{f}^{\text{в}}(\omega) = \tilde{f}(\omega)\,\Phi(\omega)$ будет преобразованием Фурье функции с тем же носителем [9].

При построении алгоритмов решения фазовой проблемы исключительное значение имеют области конечной меры, где функция $f(x)$ равна нулю. Будем различать два типа таких областей: области на носителе и вне его. Сформулируем следующие свойства функции $f^{\text{в}}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{\text{в}}(\omega) e^{-i\omega x}\, d\omega$: при фазовых возмущениях вида $e^{i\varphi(\omega)}$ ($\varphi(\omega)$ не зависит от $\tilde{f}(\omega)$) $f^{\text{в}}(x)$ имеет отличные от нуля, как правило знакопеременные, значения на этих областях; при фазовых возмущениях вида $\Phi(\omega) = \prod\limits_{k=1}^{K} (1-\omega/z_k^*)/(1-\omega/z_k)$ функция $f^{\text{в}}(x)$ имеет отличные от нуля значения на этих областях, если $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ не являются комплексными нулями функции $\tilde{f}(\omega)$; если же $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ — комплексные нули $\tilde{f}(\omega)$, то это свойство имеет место, при весьма слабых ограничениях [9], только для областей на носителе.

6. Ниже рассматриваются способы решения фазовой проблемы в одномерном случае.

а) *Минифазное решение Вольфа* [6, 10]. Для получения минифазного решения Вольфа используется лишь модуль преобразования Фурье РРЯ $|\tilde{f}(\omega)|$. Решение единственно и имеет вид

$$f^{mp}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)| \exp[i\psi^{mp}(\omega)]\, e^{-i\omega x}\, d\omega, \tag{32}$$

где $\psi^{mp}(\omega)$ определяется выражением

$$\psi^{mp}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|\tilde{f}(\lambda)|}{\omega - \lambda}\, d\lambda. \tag{33}$$

Если у функции $\tilde{f}(\omega)$ нет комплексных нулей либо в верхней, либо в нижней полуплоскости, то $f^{mp}(x)$ будет решением фазовой проблемы A. При наличии нулей как в верхней, так и в нижней полуплоскостях имеет место следующая оценка нормы разности $f(x)$ и $f^{mp}(x)$:

$$\|f(x) - f^{mp}(x)\|_{L_1} \leqslant 2\,\|f(x)\|_{L_1}. \tag{34}$$

Уклонение конечно, и минифазное решение не решает фазовую проблему A. При наличии дополнительной фазовой информации, типа соотношений замыкания, можно лишь ответить на вопрос, может ли минифазное решение являться решением фазовой проблемы A.

Можно предложить следующее обобщение схемы Вольфа, позволяющее найти решение фазовой проблемы A при наличии комплексных нулей у $\tilde{f}(\omega)$ как в верхней, так и в нижней полуплоскостях. В этом случае функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)| \exp[i\psi^{mp}(\omega)] \prod_{k=1}^{K} \frac{1 - \omega/z_k^*}{1 - \omega/z_k}\, e^{-i\omega x}\, d\omega, \tag{35}$$

где $\psi^{mp}(\omega)$ определяется соотношением (33), а $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ — комплексные нули в верхней полуплоскости. Определение множителя $\Pi(1-\omega/z_k^*)/(1-\omega/z_k)$ сводится к поиску всех комплексных нулей модуля и отбору из них правильной комбинации с использованием дополнительной фазовой информации типа соотношений замыкания.

б) Решение Бейтса [7]. Если ограничиться поиском решений для функций вида

$$f_n(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k \exp\left(-i\dfrac{\pi}{x_0}kx\right), & |x| \leqslant x_0 \\ 0, & |x| > x_0 \end{cases}, \tag{36}$$

то при получении решений можно воспользоваться способом, предложенным Бейтсом. Преобразование Фурье функции (36) имеет вид

$$\tilde{f}_n(\omega) = \sum_{k=-n}^{n} c_k G_k(\omega) = \frac{\sin(x_0(\omega))}{\omega \prod\limits_{l=1}^{n} (\omega^2 - \pi^2 l^2/x_0^2)} \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k c_k \prod_{l=-n}^{n}{}' \left(\omega - \frac{\pi l}{x_0}\right), \tag{37}$$

где Π' означает, что в произведении нет члена с $k=l$. Первый множитель

$$p(\omega) = \sin(x_0(\omega)) \left[\omega \prod_{l=1}^{n} (\omega^2 - \pi^2 l^2/x_0^2)\right]^{-1} \tag{38}$$

известен, второй многочлен порядка $2n$ —

$$q(\omega) = \sum_{k=-n}^{n} (-1)^k c_k \prod_{l=-n}^{n}{}' (\omega - \pi l/x_0) = q_0 \prod_{l=1}^{2n} (\omega - z_l), \tag{39}$$

где $\{z_l\}_{l=1}^{2n}$ — нули полинома $q(\omega)$, а q_0 — постоянная. Таким образом, определение $\tilde{f}(\omega)$ сводится к поиску нулей $\{z_l\}_{l=1}^{2n}$ и постоянной q_0. По $\tilde{f}(\omega)\tilde{f}^*(\omega)$ можно построить полином порядка $4n$:

$$Q(\omega) = \tilde{f}(\omega)\tilde{f}^*(\omega)/p^2(\omega), \tag{40}$$

нули которого обладают следующими свойствами: каждому действительному нулю $q(\omega)$ соответствует равный ему нуль $Q(\omega)$ кратности 2; каждому комплексному нулю $q(\omega)$ соответствует два комплексных нуля $Q(\omega)$ — равный ему и комплексно-сопряженный; иных нулей у $Q(\omega)$ нет.

Поэтому если среди нулей $Q(\omega)$ есть комплексные, возникает необходимость выбрать из них нули полинома $q(\omega)$. При отборе следует пользоваться дополнительной фазовой информацией в виде соотношений замыкания.

Положительность функции на носителе нельзя брать в качестве критерия отбора, поскольку преобразование вида

$$\prod_{k=1}^{K} (1-\omega/z_k^*)/(1-\omega/z_k),$$

где $\{z_k\}_{k=1}^{K}$ — нули функции $\tilde{f}(\omega)$, не обязательно приводит к функции, у которой возникают отрицательные значения на носителе [11]. Однако при наличии областей конечной меры на носителе, где функция равна нулю, неотрицательность функции на носителе может служить критерием, если нули функции $\tilde{f}(\omega)$ не являются одновременно нулями преобразований Фурье функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^l$, отличных от нуля на отдельных, непересекающихся областях носителя [9].

в) Решения, основанные на теореме Винера — Пейли [8]. Если РРЯ принадлежит классу $L_2(-x_0, x_0)$ и известно его ФВПФ $\tilde{f}(\omega)\, e^{i\varphi(\omega)}$, где $\varphi(\omega)$ — действительная функция, не зависящая от $\tilde{f}(\omega)$, то при поиске решения фазовой проблемы B можно воспользоваться свойством фазовых возмущений приводить к ненулевым значениям вне носителя. Решение сводится к подбору фаз, так что их исключение дает функцию, отличную от нуля лишь на носителе. При использовании итерационных схем возникают $\varphi(\omega)$, зависящие от преобразования Фурье, и нельзя гарантировать сходимость к решению. Однако использование фазовой информации типа соотношений замыкания при известном носителе обеспечивает сходимость итерационных схем к решению.

Алгоритмы получения решения фазовой проблемы B, основанные на теореме Винера — Пейли, просты в их реализации на ЭВМ.

г) Решения, использующие свойство неотрицательности функции на носителе. Пусть $f(x) \in L_2(-x_0, x_0)$ имеет на носителе области конечной меры, где она равна нулю, а у преобразований Фурье функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^l$, отличных от нуля, на непересекающихся областях носителя нет общих комплексных нулей. Тогда неотрицательность функции на носителе может быть выбрана в качестве критерия разрешимости фазовой проблемы A. При наличии общих комплексных нулей у преобразований Фурье функций $\{f_i(x)\}_{i=1}^l$ решение с указанным критерием может быть найдено лишь при дополнительной фазовой информации типа соотношений замыкания. Если же у функции нет областей конечной меры на носителе, где она равна нулю, то неотрицательность функции недостаточна для получения решения фазовой проблемы, поскольку существуют функции, для которых фазовые возмущения не приводят к возникновению отрицательных значений на носителе [11]. Алгоритм получения решения фазовой проблемы A, использующий критерий неотрицательности на носителе, прост при его реализации на ЭВМ.

7. Практически для всех рассмотренных случаев получения решения фазовой проблемы B в одномерном случае имеют место двумерные аналоги. Однако в случае двух переменных предпочтительными являются способы, использующие свойство фазовых возмущений приводить к ненулевым значениям в областях конечной меры, где функция равна нулю. Все эффективно работающие алгоритмы решения фазовой проблемы B основаны на этом свойстве фазовых возмущений. Эффективность алгоритмов этого рода для двумерного случая фактически обязана тому, что для реально существующих РРЯ есть области конечной меры на носителе, где функция равна нулю. Именно поэтому использование при получении решения фазовой проблемы B неотрицательности функции на носителе с дополнительной фазовой информацией типа соотношений замыкания, как правило, приводит к успеху.

В заключение заметим, что изложенные результаты не имеют универсального значения и применимы лишь к САС. Любой иной случай требует специального рассмотрения и осторожности при получении вывода о разрешимости фазовой проблемы.

Автор благодарит Л. Д. Бахраха, Р. Д. Дагкесаманского и Ю. П. Илясова за доброжелательную и конструктивную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baldwin J. E., Warner J. P. Image Formation from Coherence Function in Astronomy, D. Reidel P. C., 1979, p. 67.
2. Wilkinson P. N., Readhead A. C. S. Image Formation from Coherence Function in Astronomy, D. Reidel P. C., 1979, p. 83.
3. Fomalont E. B. Image Formation from Coherence Function in Astronomy, D. Reidel P. C., 1979, p. 3.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1957.
6. Mandel L., Wolf E.— Rev. Mod. Phys., 1965, **37**, p. 231.
7. Bates R. H. T., MNRAS, 1969, **142**, p. 413.
8. Конюков М. В. Препринт ФИАН № 134, — М., 1979.
9. Greenaway A. H.— Opt. Lett., 1977, **1**, p. 10.
10. Фролов В. А., Малов И. Ф. — Краткие сообщения по физике, 1982, № 2, с. 24.
11. Dainty J. C., Fiddy M. A., Greenaway A. H. Image Formation from Coherence Function in Astronomy, D. Reidel P. C., 1979, p. 95.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

THE PHASE PROBLEM IN APERTURE SYNTHESIS SYSTEMS

Methods for getting brightness distribution from the modulus of Fourier transformation or from the Fourier transformation with phase disturbances are described. It is proved that the phase problem is solved for the phase disturbances arising in ionosphere, troposphere and communication lines.

ИНФОРМАЦИЯ О НОВЫХ КНИГАХ

Оптика и связь: Пер. с франц. / А. Козанне, Г. Мэтр и др. — М.: Мир, 1984 (III кв.). — 31 л.

Книга представляет собой первое в мировой литературе учебное пособие по оптической волоконной связи и оптическим методам обработки информации. Впервые в одной книге с единых позиций рассмотрен весь комплекс вопросов, связанных с этой областью знания: распространение света в направляющих системах, теория голографического метода регистрации и восстановления волновых полей, оптические методы обработки информации, измерение характеристик оптических волокон и методы их изготовления. Рассматривается также элементарная база оптических систем передачи и обработки информации.

Для студентов, аспирантов и преподавателей, а также для инженеров и научных работников, работающих в области оптической волоконной связи и оптической обработки информации.

Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С. Математическая биофизика. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984 (II кв.) — 20 л.

В книге изложены основные принципы построения математических моделей биологических процессов и методы их исследования. Рассмотрены как модели, описывающие поведение систем во времени, так и модели, описывающие самоорганизацию в пространстве. Обсуждаются следующие вопросы: биологическая информация и возникновение жизни, дифференциация тканей и морфогенез, динамика иммунной реакции, нарушение клеточного цикла и перерождение клетки.

Для физиков, химиков, математиков и биологов, а также для студентов и аспирантов, интересующихся проблемами теоретической биофизики.
