

УДК 537 311 33

## НЕЛИНЕЙНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ТОНКИХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СЛОЕВ С РАЗМЕРНО КВАНТОВАННЫМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ СПЕКТРОМ ЭЛЕКТРОНОВ

*Е. В. Демидов, Ю. А. Романов*

Найдена нелинейная поперечная проводимость тонких полупроводниковых слоев с размерно квантованным энергетическим спектром поперечного движения электронов в области частот  $\omega$ , меньших характерных расстояний между уровнями размерного квантования  $\Omega$  и произвольных по отношению к обратному времени релаксации населенности этих уровней  $\tau^{(r)}$ , рассеяние электронов считалось квазиупругим. Проводимость таких слоев в основном реактивная, сильно нелинейная, содержит участки отрицательной динамической дифференциальной проводимости. При низких температурах и частотах ( $\omega\tau^{(r)} \ll 1$ ) зависимости емкости слоя и тока в нем от приложенного переменного напряжения имеют скачкообразный характер. С ростом  $\omega$  величина указанных скачков падает и возникают временные осцилляции тока на частотах  $\Omega$ .

В [1] исследована нелинейная поперечная проводимость полупроводниковых слоев с размерно квантованным спектром энергии поперечного движения электронов (для краткости такие слои будем называть «квантовыми») на частотах, меньших обратных времен релаксации распределения электронов по этому спектру ( $\tau^{(r)}$ ). Было показано, что локализация электронов между границами слоя ведет к сильной нелинейности тока при полях  $E \sim \hbar\Omega_{kn}/ed$  ( $d$  — толщина слоя,  $\hbar\Omega_{kn}$  — расстояние между уровнями размерного квантования). Ток в слое носит в основном реактивный характер, диссипативный ток мал. При низких температурах размерное квантование приводит к скачкообразной зависимости тока, а следовательно, и емкости слоя от приложенного к нему переменного напряжения. Позднее этот эффект обсуждался в [2].

В настоящей работе, в отличие от [1], найдена нелинейная проводимость «квантовых» слоев в области частот, меньших  $\Omega_{kn}$ , но произвольных по отношению к  $\tau^{(r)}$ . Показано, что и при  $\omega\tau^{(r)} \gg 1$  ток сильно нелинеен и носит реактивный характер. С ростом частоты поля величина скачков тока и емкости падает и возникают временные осцилляции тока на частотах  $\Omega_{kn}$ .

### 1. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Энергетический спектр электронов в «квантовом» слое представляет систему перекрывающихся двумерных параболических подзон (отклонением от параболическости для простоты пренебрегаем)

$$\varepsilon(k, p) = \varepsilon_k + p^2/2m, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_k$  — энергия дна  $k$ -й подзоны,  $p$  — импульс электрона в плоскости слоя. Будем считать выполненными условия

$$l \gg d, \quad \Omega\tau \gg 1, \quad \lambda \sim d, \quad \omega \ll \Omega, \quad |e\tilde{x}\dot{E}/\hbar\Omega^2|^2 \ll 1, \quad (2)$$

где  $l$  — длина свободного пробега электрона,  $\lambda$  — его характерная длина волны де-Бройля,  $e$  — заряд электрона,  $\tau$  — характерное время релаксационных процессов, которые будут обсуждены ниже,  $\hat{x}$  — характерная величина матричного элемента оператора координаты,  $E$  — электрическое поле в слое, которое считается однородным по его толщине,  $\omega$  — частота его изменения. Первые два неравенства обеспечивают малость размытия квантовых уровней по сравнению с расстояниями между ними. Третье — условие заполнения небольшого числа подзон. Последние два означают адиабатически медленное изменение гамильтониана системы [3].

Интересующая нас средняя по толщине слоя плотность поперечного тока

$$j = (d/dt)P, \quad P = (e/d) \text{Sp} (\hat{x} \hat{\rho}), \quad (3)$$

где  $P$  — средняя поляризация,  $\hat{x}$  — оператор координаты, поперечной границам слоя,  $\hat{\rho}$  — одночастичная матрица плотности, определяемая уравнением

$$\hat{\rho} \hat{\rho} / \partial t + (i/\hbar) [\hat{H} \hat{\rho}] = -(\partial \hat{\rho} / \partial t)_{\text{ст}}, \quad \hat{H} = \hat{p}^2 / 2m - eE \hat{x}, \quad (4)$$

$\hat{\rho}$  — оператор импульса,  $(\partial \hat{\rho} / \partial t)_{\text{ст}}$  — оператор столкновений, явный вид которого будет приведен ниже.

В соответствии с медленностью изменения поля удобно пользоваться представлением мгновенного гамильтониана  $\hat{H}(t)$ . Его собственные значения  $\varepsilon_n(t)$  и собственные функции  $u_n(t)$  в каждый момент времени будем считать известными.

При медленном изменении поля (см. [3]) квантовые переходы между состояниями  $u_n(t)$  в отсутствие столкновений малы и электроны с большой вероятностью остаются на «своих» движущихся уровнях. Матрица плотности в указанном представлении является почти постоянной диагональной матрицей. Однако в определенные моменты времени в результате относительного движения двумерных подзон некоторые заполненные энергетические состояния одной подзоны могут оказаться выше свободных состояний другой. В этом случае в силу релаксационных процессов (столкновений) электроны будут переходить из одной подзоны в другую. Эти процессы идут с изменением координаты  $x$  и импульса  $p$ .

Включение релаксационных процессов, вызывающих межподзонные переходы, соответствует существенному изменению эффективного гамильтониана системы. Если это изменение происходит резко (внезапное возмущение на фоне медленно меняющегося гамильтониана, приводящее к внезапному появлению в некоторый момент времени  $t_0$  электрона в новом для него квантовом состоянии), то в системе возникают быстрые колебания с частотами  $\Omega_{kn}(t) = (\varepsilon_k(t) - \varepsilon_n(t)) / \hbar$  амплитуды вероятности заполнения мгновенных квантовых состояний [3], недиагональных элементов матрицы плотности и соответствующих физических величин, в том числе тока

$$\sim \dot{E}(t) \exp \left[ -i \int_{t_0}^t \Omega_{kn} ds - \frac{t - t_0}{\tau^{(\Phi)}} \right] \quad (5)$$

( $\tau^{(\Phi)}$  — время релаксации фазы, которое будет обсуждено ниже). Соответствующая схема переходов приведена на рис. 1. Через время релаксации  $\tau^{(\Phi)}$  колебания затухают. Таким образом, в данном случае столк-

новения играют двойную роль. Они возбуждают колебания в системе и они же уничтожают их в дальнейшем. Однако в каждом процессе столкновения проявляются по-разному и характеризуются различной длительностью. Обсудим эти времена.

В рассматриваемой задаче их существует несколько.

1) Длительность процесса перехода электрона из одной подзоны в другую под действием столкновений —  $\tau_0$ . Это время обычно мало ( $\tau_0 \sim a/v \sim 10^{-14}$  с,  $a$  — изменение средней координаты электрона при переходе между соответствующими состояниями,  $v$  — характерная скорость электрона в этом процессе). В дальнейшем будем считать его наименьшим из всех времен и полагать  $\tau_0 \rightarrow 0$ .

2) Времена релаксации импульса  $\tau_k^{(p)}$  и энергии  $\tau_k^{(e)}$  электрона внутри  $k$ -й подзоны. Для простоты будем полагать  $\tau_k^{(p)} = \tau_k^{(e)}$ .

3) Время релаксации населенности  $k$ -й подзоны —  $\tau_k^{(r)}$ . Обычно  $\tau_k^{(r)} > \tau_k^{(p)}$ .

4) Время релаксации разности фаз состояний  $k$  и  $i$  с импульсом  $p$  —  $\tau_{ki}^{(\Phi)}$ . Это время определяет длительность указанных выше осцилляций.

В соответствии со сказанным ток в слое складывается из трех слагаемых. Первое обусловлено движением средних координат собственных состояний  $u_n(t)$ . Второе — направленными релаксационными переходами электронов между подзонами, возникающими при их относительном движении с изменением поля. Третье слагаемое, дающее сравнительно небольшой вклад в общий ток, обусловлено квантовомеханическими переходами между подзонами, возникающими непосредственно под действием изменения  $\hat{H}(t)$  [3]. Первые два слагаемых определяются диагональными элементами  $\hat{\rho}$ , третье — недиагональными.

Будем считать выполненными условия

$$\tau^{(p)} \ll \tau^{(r)}, \quad \omega \tau^{(p)} (e\hbar E / \hbar \Omega^2)^2 \ll 1. \quad (6)$$

Первое условие легко реализовать, например, в прямоугольной яме, содержащей внутри себя потенциальный барьер. Второе условие означает, что релаксация импульса и энергии внутри подзон происходит быстрее, чем переходы между ними под действием  $H$ . При выполнении условий (6) функции распределения по энергии в подзонах  $n_k(\epsilon, t)$  близки к равновесным, но с разными квазиуровнями Ферми. При расчетах числа релаксационных переходов между подзонами существующее в них небольшое число неравновесных электронов можно не учитывать.

В соответствии с (2) и сказанным будем считать  $\Omega \tau_0 \ll 1$ ,  $\Omega \tau^{(p)}, (r), (\Phi) \gg 1$ . Первое условие необходимо для обеспечения резкости включения релаксационных переходов между подзонами. Однако оно не является достаточным для возникновения осцилляций тока в слое. В самом деле, пусть в результате столкновения, сопровождающегося межподзонным переходом, в момент времени  $t_0$  появляется электрон в некотором состоянии  $\hat{\rho}(t_0)$ . В частности, это состояние может быть соб-

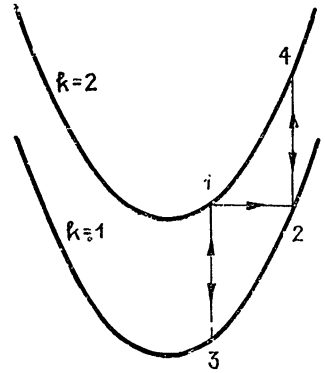


Рис. 1. Схема осцилляторных электронных переходов, возникающих при релаксационных переходах электрона из состояния 1 в состояние 2.

ственным гамильтониана  $\hat{H}(t)$ . Будем считать, что в результате таких переходов возникает смешанное состояние, описываемое в представлении  $\hat{H}(t)$  диагональной матрицей плотности  $\rho_{nn}(p)$ . Поэтому в интеграле столкновений эти переходы будут учитываться через релаксационные изменения диагональных элементов  $\hat{\rho}$ . После указанного перехода из-за изменения поля  $E$  в системе возникают осцилляции матрицы плотности, описываемые выражением (5). При суммировании по всем переходам (интегрировании по  $t_0$  с некоторым весовым множителем) из-за сдвига фаз происходит взаимное гашение осцилляций. Как обычно бывает в подобных случаях, вклад в результирующие осцилляции дают экстремальные моменты времени  $t_\mu$ , которыми в нашем случае являются моменты пересечения квазиуровня Ферми  $k$ -й подзоны с дном  $i$ -й. (При наличии квантующего магнитного поля экстремальными являются моменты пересечения квазиуровня Ферми с соответствующим уровнем Ландау.) Для возникновения осцилляций необходимо, чтобы за их период относительный сдвиг подзон вблизи  $t_\mu$  превышал диссипативное размытие уровней ( $\Delta \epsilon_d$ ) и размытие функции распределения, в том числе температурное:

$$\hbar \dot{\Omega} / \Omega > T, \Delta \epsilon_d. \quad (7)$$

С учетом сказанного, уравнения для просуммированной по  $p$  матрицы плотности  $\rho_{hi} = \sum_p \rho_{hi}(p)$  можно представить в виде

$$dn_h/dt + F_{hh} = -(dn_h/dt)_{\text{ст}}; \quad (8)$$

$$(i\Omega_{kt} + v_{ki}^{(\Phi)} + d/dt)\rho_{ki} + F_{ki} = 0, \quad k \neq i, \quad (9)$$

где

$$F_{ki} = \frac{1}{\hbar} \left( \sum_{m \neq i} \rho_{km} \frac{\dot{H}_{mi}}{\Omega_{mi}} - \sum_{m \neq k} \frac{\dot{H}_{km}}{\Omega_{km}} \rho_{mi} \right), \quad (10)$$

$H_{ki} = -c\dot{E}x_{ki}$ ,  $n_k \equiv \rho_{kk}$  — количество электронов в подзоне  $k$ , приходящееся на единицу поверхности слоя, фазовый множитель у  $u_n$  выбирается из условия

$$\int u_n^*(x, t) \dot{u}_n(x, t) dx = 0, \quad (11)$$

что автоматически выполняется для вещественных  $u_n$ ,

$$\left( \frac{dn_k}{dt} \right)_{\text{ст}} = \sum_{k \neq i} \int_{\max(\epsilon_k, \epsilon_i)}^{\infty} d\epsilon v_{ki}^{(r)} [n_k(\epsilon, t) - n_i(\epsilon, t)], \quad (12)$$

$v_{ki}^{(r)}$  — обратные времена релаксационных переходов электронов между подзонами  $k$  и  $i$ , столкновения считаются квазиупругими. Для вырожденного случая и  $v_{ki}^{(r)}(\epsilon) = \text{const}$  из (12) имеем

$$\begin{aligned} \left( \frac{dn_k}{dt} \right)_{\text{ст}} &= \sum_{i < k} v_{ki}^{(r)} \left[ n_k - \left( n_i - \frac{m}{\pi \hbar} \Omega_{ki} \right) \theta(\mu_i - \epsilon_k) \right] - \\ &- \sum_{i > k} v_{ki}^{(r)} \left[ n_i - \left( n_k - \frac{m}{\pi \hbar} \Omega_{ik} \right) \theta(\mu_k - \epsilon_i) \right], \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что диагональные элементы  $(dn_k/dt)_{ст}$  имеют разрывную первую производную по времени в моменты  $t_\mu$ . Согласно (8) это приводит к возникновению в эти моменты времени разрывов вторых производных  $n_k(t)$ . В частности, в двухподзонном приближении скачок второй производной равен

$$\Delta \ddot{n}_2(t_\mu) = (v^{(r)})^2 [(-n_2 + m\dot{\Omega}_{21}/\pi\hbar v^{(r)}) \text{sign } \dot{\Omega}_{21}]_{t_\mu}. \quad (14)$$

Таковыми же особенностями обладают функции  $F_{ki}(t)$  с  $k \neq i$  (см. (10)). Поэтому  $\rho_{ki}$  имеет разрывную третью производную. Эти особенности, как мы увидим ниже, и приводят к появлению нескомпенсированных осцилляций тока. (При наличии магнитного поля разрывная уже первая производная  $n_k(t)$ , поэтому осцилляции выражены сильнее.) Очевидно, что в зависимости от величины переменного поля указанные пересечения могут и отсутствовать. Осцилляции тока в этих случаях не возникают.

Решение уравнения (9) можно представить в виде

$$\rho_{ki} = - \int_{-\infty}^t ds F_{ki}(s) \exp \left[ - \int_s^t (i\Omega_{ki} + v_{ki}^{(\Phi)}) dz \right], \quad k \neq i. \quad (15)$$

Производя интегрирование по частям, получим с точностью до  $(\omega/\Omega)^3$

$$\begin{aligned} \rho_{ki} = & - \frac{F_{ki}}{\alpha_{ki}} + \frac{1}{\alpha_{ki}} \frac{d}{dt} \frac{F_{ki}}{\alpha_{ki}} - \frac{1}{\alpha_{ki}} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha_{ki}} \frac{d}{dt} \frac{F_{ki}}{\alpha_{ki}} \right) + \\ & + \sum_{\mu} \frac{\Delta \ddot{F}_{ki}(t_\mu)}{\alpha_{ki}^3(t_\mu)} \exp \left( - \int_{t_\mu}^t \alpha_{ki} ds \right) \theta(t - t_\mu), \quad \alpha_{ki} = i\Omega_{ki} + v_{ki}^{(\Phi)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Последнее слагаемое в (16) описывает осцилляции тока. Если электрическое поле периодическое, то это слагаемое можно представить в виде

$$(\rho_{ki})_{\text{осц}} = \sum_{\nu_0} \frac{\Delta F_{ki}(t_{\nu_0}) \exp \left( - \int_{t_{\nu_0}}^t \alpha_{ki} ds \right)}{\alpha_{ki}^3(t_{\nu_0}) \left[ 1 - \exp(2\pi \overline{\alpha_{ki}}/\omega) \right]} \theta(t - t_{\nu_0}), \quad (17)$$

где  $\overline{\alpha_{hi}}$  — среднее по периоду значение  $\alpha_{hi}$ ,  $t_{\nu_0}$  — набор экстремальных времен, предшествующих  $t$  не более чем на период.

Остановимся на вычислении  $n_k$  и  $F_{ki}$ . Так как матрица плотности близка к диагональной, в (10) можно оставить только слагаемые с  $n_k$  и  $n_i$ . В результате будем иметь

$$F_{ki} = [(n_k - n_i)/\hbar\Omega_{ki}] \dot{H}_{ki}, \quad k \neq i. \quad (18)$$

По этой же причине с точностью до слагаемых  $\sim (\omega/\Omega)^2$  в уравнении (8) можно опустить  $F_{hk}$ , а в (16) оставить лишь первое и последнее слагаемые. В этом случае

$$P = \frac{e}{d} \sum_k n_k x_k + \frac{e^2}{d} \sum_{k \neq l} \frac{v_{kl}^{(\Phi)} |x_{kl}|^2 (n_k - n_l)}{\hbar\Omega_{kl} |\alpha_{kl}|^2} \dot{E} + P_{\text{осц}}; \quad (19)$$

$$P_{\text{осц}} = -\frac{e^2}{d} \sum_{\mu, k \neq l} x_{lk} \left[ \frac{x_{kl} (\Delta \dot{n}_k - \Delta n_l) \dot{E}}{\hbar \Omega_{kl} \alpha_{kl}^3} \right]_{t_\mu} \times \quad (20)$$

$$\times \theta(t - t_\mu) \exp \left( - \int_{t_\mu}^t \sigma_{kl} ds \right).$$

## 2. НИЗКОЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ ( $\omega \tau(r) \ll 1$ )

В этой области решение уравнения (8) вдали от  $t_\mu$  ( $|t - t_\mu| \gg \tau(r)$ ) можно представить в виде

$$n_k = n_k^0(E) - \tilde{\tau}_k^{(r)} (dn_k^0/dE) \dot{E}, \quad (21)$$

где  $n_k^0(E)$  — равновесное число электронов в  $k$ -й подзоне,  $\tilde{\tau}_k^{(r)}$  — эффективное время релаксации ее населенности. Подставляя (21) в (19), получим

$$P = P_1(E) + Q(E) \dot{E} + P_{\text{осц}}, \quad (22)$$

где

$$P_1 = (e/d) \sum_k n_k^0 x_k \quad (23)$$

определяет реактивный ток,

$$Q = -\frac{e}{d} \sum_k \tilde{\tau}_k^{(r)} x_k \frac{dn_k^0}{dE} + \frac{e^2}{d} \sum_{k \neq l} \frac{v_{kl}^{(\Phi)} |x_{kl}|^2 (n_k^0 - n_l^0)}{\hbar \Omega_{kl} |\alpha_{kl}|^2} \quad (24)$$

— диссипативный. Первое слагаемое в (24) связано с релаксационными переходами электронов между подзонами, второе — с переходами под действием  $H$ . Оба слагаемых малы:  $j_1/j_p \sim \omega \tau^{(r)}$  и  $j_2/j_p \sim \omega/\Omega^2 \tau^{(\Phi)}$  соответственно ( $j_p$  — ток, определяемый поляризацией  $P_1$ ). С ростом поля, когда оказывается заполненной только нижняя подзона, первое слагаемое обращается в нуль и диссипативный ток резко падает.

Осцилляторная часть поляризации описывается (20) с

$$\Delta n_k(t_\mu) = - [v_{k_0 k}^{(r)} (\dot{n}_k - (m/\pi \hbar) \dot{\Omega}_{k_0 k}) \text{sign } \dot{\Omega}_{k_0 k}]_{t_\mu}, \quad (25)$$

$$k < k_0,$$

$$\Delta n_{k_0}(t_\mu) = [ \sum_{k < k_0} v_{k_0 k}^{(r)} (\dot{n}_k - (m/\pi \hbar) \dot{\Omega}_{k_0 k}) \text{sign } \dot{\Omega}_{k_0 k} ]_{t_\mu},$$

$k_0$  — номер подзоны, дно которой в момент времени  $t_\mu$  пересекает квазиуровень Ферми, являющийся почти одинаковым для всех подзон. Времена  $t_\mu$  определяются приближенным уравнением

$$(m/\pi \hbar^2) \sum_{k < k_0} (\epsilon_{k_0} - \epsilon_k) = n, \quad k_0 = 2, 3, \dots, \quad (26)$$

где  $n = \sum_k n_k$  — плотность электронов на единицу поверхности слоя.

Если  $\bar{v}^{(\Phi)} \gg \omega$ , то осцилляции тока имеют малую амплитуду и быстро затухают. Если  $\bar{v}^{(\Phi)} \ll \omega$ , осцилляции не успевают затухнуть за период. Для частот  $\omega = \bar{\Omega}_{ni}/k$ ,  $k \gg 1$ , осцилляции, возбуждаемые в момент  $t_\mu$  и отличающиеся друг от друга на кратное число периодов, находятся в фазе: возникает резонанс. Если резонансное условие не выполняется, то в силу фазового рассогласования осцилляции, возбуждаемые в разные  $t_\mu$ , гасят друг друга.

Иногда удобно использовать понятие нелинейной емкости  $C(V)$ , связанной с поляризацией  $P_1$  соотношением

$$C = C_0 + dP_1/dV, \quad C_0 = \epsilon_0/4\pi d, \quad (27)$$

где  $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость материала слоя,  $V$  — напряжение на слое.

Из (23) и (27) следует, что вблизи  $t_\mu$  в узкой области  $\sim \tau^{(r)}$  ток  $j$  и емкость  $C$  испытывают резкие изменения. Соответствующие скачки

$$\Delta j = \Delta C \dot{V}, \quad \Delta C \sim (me/2\pi\hbar d)(d\Omega/dE)_{\mu=\epsilon_k}. \quad (28)$$

### 3. ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ ОБЛАСТЬ ( $\omega\tau^{(r)} \ll 1$ )

В этой области поляризация и ток в слое обладают сильной временной дисперсией. Поэтому их нельзя представить в форме (22) для произвольной зависимости  $E(t)$ . Рассмотрим поляризацию в периодическом поле. В высокочастотной области населенности подзон почти не меняются во времени:

$$n_k(t) = \bar{n}_k + n_k^1(t) + O[(\omega\tau^{(r)})^{-2}] \quad (29)$$

( $\bar{n}_k$  определяется равенством нулю усредненного по периоду интеграла столкновений (13)),

$$n_k^1(t) = - \int_{t_0}^t \left( \frac{dn_k}{dt} \right)_{\text{ст}} ds - \frac{\omega}{2\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\omega} (s - t_0) \left( \frac{dn_k}{dt} \right)_{\text{ст}} ds, \quad (30)$$

$t_0$  — произвольный момент времени. В подынтегральном выражении следует положить  $n_k = \bar{n}_k$ .

Подставляя (29) в (19), видим, что, как и в низкочастотном случае, диссипативный ток мал. Однако теперь для составляющих тока имеем  $j_1/j_p \sim 1/\omega\tau^{(r)}$ ,  $j_2/j_p \sim \omega/\Omega^2 \tau^{(\Phi)}$ . Осцилляторная часть поляризации описывается (20) с

$$\Delta n_k(t_\mu) = (mv_{kn}^{(r)}/\pi\hbar) |\dot{\Omega}_{kn}(t_\mu)|, \quad \dot{\Omega}/\Omega \gg v^{(r)}, \quad (31)$$

$t_\mu$  определяются уравнением

$$\bar{n}_k = (m/\pi\hbar) \Omega_{nk}. \quad (32)$$

### 4. ДВУХПОДЗОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Рассмотрим низкотемпературную восприимчивость слоя в двухподзонном приближении. Соответствующие уравнения для населенностей подзон имеют вид

$$\frac{dn_2}{dt} = \begin{cases} -v^{(r)}(2n_2 - n + m\Omega_{21}/\pi\hbar), & \mu_1 > \epsilon_2, \\ -v^{(r)}n_2, & \mu_1 < \epsilon_2, \end{cases} \quad (33)$$

$\mu_1$  — квазиуровень Ферми в первой подзоне. Для синусоидального изменения поля  $E$  качественный вид  $\mu_1(t)$  и  $\Omega_{21}(t)$  приведен на рис. 2. Точки пересечения кривых соответствуют совпадению квазиуровня Ферми в первой подзоне с дном второй. Величина скачка второй производной приведена в (14). Если амплитуда изменения поля мала, так что для всех времен  $\mu_1 > \epsilon_2$ , решение уравнения (33) имеет вид

$$n_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \frac{mv^{(r)}}{\pi\hbar} \int_0^\infty \Omega_{21}(t-s) \exp(-2v^{(r)}s) ds, \quad (34)$$

$$P = \frac{en}{2d} (x_1 + x_2) + \frac{emv^{(r)}}{\pi\hbar d} \left[ x_1 - x_2 - \frac{4e\nu^{(\phi)} |x_{12}|^2 E'}{\hbar\Omega_{21}(\Omega_{21}^2 + \nu_{\phi}^2)} \right] \times \quad (35)$$

$$\times \int_0^{\infty} \Omega_{21}(t-s) \exp(-2\nu^{(r)}s) ds.$$

Осцилляции тока и скачки емкости в этом случае отсутствуют. В низкочастотной области ( $\omega\tau^{(r)} \ll 1$ )

$$n_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \frac{m}{2\pi\hbar} \left( \Omega_{21} - \frac{\dot{\Omega}_{21}}{2\nu^{(r)}} \right), \quad (36)$$

в высокочастотной

$$n_{1,2} = \frac{n}{2} \pm \frac{m}{2\pi\hbar} \left\{ \overline{\Omega}_{21} - \frac{\omega\nu^{(r)}}{\pi} \int_0^{2\pi/\omega} s [\Omega_{21}(t-s) - \overline{\Omega}_{21}] ds \right\}. \quad (37)$$

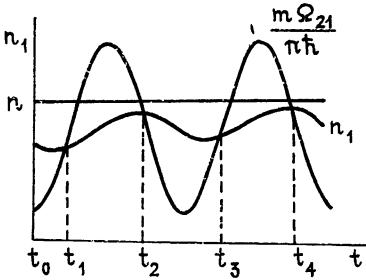


Рис. 2.

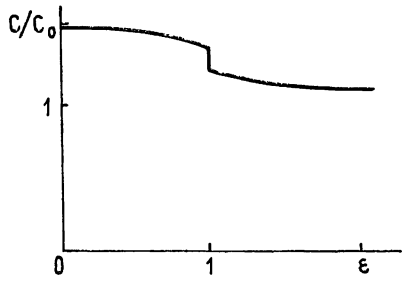


Рис. 3.

Рис. 2. Зависимость расстояния между уровнями размерного квантования и  $n_1$  от времени.

Рис. 3. Зависимость емкости „квантового“ слоя от безразмерного поля.

Если при изменении поля уровень Ферми пересекает границы подзон, то решение уравнений (33) имеет вид

$$n_2 = n_2(t_1) \exp[-\nu^{(r)}(t-t_1)], \quad t_1 \leq t < t_2, \quad (38)$$

$$n_2 = n_2(t_1) \exp[-\nu^{(r)}(t_2-t_1)] + (n/2) \{1 - \exp[-2\nu^{(r)}(t-t_2)]\} -$$

$$- \frac{\nu^{(r)}m}{\pi\hbar} \int_{t_2}^t \Omega_{21}(s) \exp[-2\nu^{(r)}(t-s)] ds, \quad t_2 \leq t < t_3.$$

Далее решение периодически повторяется. Значения  $n_2(t_1)$  определяются соотношениями

$$n_2(t_1) = \left\{ \frac{n}{2} [1 - \exp(-\nu^{(r)}(t_3-t_2))] - \frac{\nu^{(r)}m}{\pi\hbar} \int_{t_2}^{t_3} \Omega_{21}(s) \times \right. \quad (39)$$

$$\left. \times \exp[-2\nu^{(r)}(t_3-s)] ds \right\} [1 - \exp(-\nu^{(r)}(t_2-t_1))]^{-1},$$

$$t_3 = t_1 + \pi/\omega,$$

$$\Omega_{21}(t_{1,2}) = (\pi\hbar/m) [n - n_2(t_{1,2})].$$



В частности, в низкочастотной области

$$n_2 = \frac{m}{\pi\hbar} \left[ \frac{\dot{\Omega}_{21}}{2v^{(r)}} - \frac{\ddot{\Omega}_{21}}{(2v^{(r)})^2} + \dots \right]_{t_1} \exp[-v^{(r)}(t - t_1)],$$

$$t_1 \leq t < t_2, \quad (40)$$

$$n_2 = \left\{ -\frac{n}{2} + \frac{m}{2\pi\hbar} \left[ \Omega_{21} - \dot{\Omega}_{21} \left( t - t_2 + \frac{1}{2v^{(r)}} \right) + \dots \right] \right\} \times$$

$$\times \exp[-2v^{(r)}(t - t_2)] + \frac{n}{2} - \frac{m}{2\pi\hbar} \left( \Omega_{21} - \frac{\dot{\Omega}_{21}}{2v^{(r)}} \right), \quad t_2 \leq t < t_3,$$

$$\Delta \ddot{n}_2(t_1) = -\frac{\Delta \ddot{n}_2(t_2)}{2} = \frac{mv^{(r)}}{2\pi\hbar} \dot{\Omega}_{21}(t_1),$$

моменты времени  $t_{1,2}$  определяются приближенно уравнениями

$$\left[ \Omega_{21} + \frac{\dot{\Omega}_{21}}{2v^{(r)}} - \dots \right]_{t_1} = \frac{\pi\hbar}{m} n, \quad \Omega_{21}(t_2) = \frac{\pi\hbar}{m} n. \quad (41)$$

В моменты времени  $t_{1,2,3}$  возникают осцилляции тока, определяемые разрывами  $\dot{n}_2$ . Скачок емкости

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{e}{C_0 d} \left[ (x_2 - x_1) \frac{dn_2^3}{dV} \right] = \frac{2me}{\varepsilon_0 \hbar d} \left[ |x_2 - x_1| \frac{d\Omega}{dE} \right]_{\Omega(E) = \pi\hbar n/m}. \quad (42)$$

В высокочастотной области

$$\bar{n}_1 = (m/\pi\hbar) \Omega_{21}(t_1); \quad (43)$$

$$n_2^1 = \begin{cases} v^{(r)}(2\bar{n}_1 - n)(t - t_0) - \frac{mv^{(r)}}{\pi\hbar} \int_{t_0}^t \Omega_{21} ds, & t_0 - t_1 \leq t < t_1 \\ -v^{(r)} \left( t - t_0 - \frac{\pi}{2\omega} \right) \bar{n}_2, & t_1 \leq t < t_2 \end{cases}, \quad (44)$$

$$\Delta \dot{n}_2(t_{1,2}) = (mv^{(r)}/\pi\hbar) |\dot{\Omega}_{21}(t_{1,2})|.$$

Времена  $t_{1,2}$  определяются уравнениями

$$\frac{\pi^2 \hbar n}{2m\omega} - \left( t_1 - t_0 + \frac{\pi}{2\omega} \right) \Omega_{21}(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Omega_{21} ds = 0, \quad (45)$$

$$t_2 \approx \pi/\omega + t_0 - t_1.$$

Проведенное рассмотрение показывает, что с ростом  $\omega$  амплитуда осцилляций тока в нерезонансной ситуации растет, как  $\omega^2$ . При резонансе  $P_{\text{осц}} \sim (\omega/\Omega)^3 (v^{(r)}/v^{(\Phi)})$ .

Для получения количественных оценок и асимптотик проводимости слоя при больших полях удобно пользоваться моделью треугольной потенциальной ямы. В этом случае

$$E = E_0 + E_1(t), \quad E_0 = \text{const}, \quad E > 0,$$

$$\varepsilon_k = (\hbar e E / \sqrt{2m})^{2/3} a_k, \quad x_k = (2/3)(\varepsilon_k / eE) + \text{const}, \quad (46)$$

$$x_{ik} = eE / m\Omega_{ik}^2, \quad i \neq k,$$

$a_k$  — корни функции Эйри  $Ai$ ,  $a_1 = 2,34$ ,  $a_2 = 4,09$ . При поле

$$E^* = \sqrt{2} \hbar^2 / me (\pi n' (a_2 - a_1))^{3/2} \quad (47)$$

уровень Ферми равновесного распределения электронов совпадает с дном второй подзоны, и при  $E > E^*$  все равновесные электроны находятся в первой подзоне. Согласно (22), (23), (40), (46) в низкочастотной области имеем\*

$$P_1 = (e/3d) \left[ \frac{(a_2 - a_1)n}{2\pi} \right]^{1/2} \{ [(a_1^2 + a_2)\varepsilon^{-1/3} + (a_1 - a_2)\varepsilon^{1/3}] \times \\ \times \theta(1 - \varepsilon) + 2a_1\varepsilon^{-1/3}\theta(\varepsilon - 1) \}; \quad (48)$$

$$Q\dot{E} = \frac{4e}{d\Omega_0^2} \left[ \frac{(a_2 - a_1)^5 n}{2\pi} \right]^{1/2} \frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon^{8/3}} \left\{ [(s_1 + s_2) + \varepsilon^{2/3}(s_1 - s_2) + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon^{2/3}v_{12}^{(\Phi)}}{a_2 - a_1}] \theta(1 - \varepsilon) + 2s_1\theta(\varepsilon - 1) \right\} - \frac{e}{9v^{(r)}d} \left[ \frac{2(a_2 - a_1)^3 n}{\pi} \right]^{1/2} \varepsilon\theta(1 - \varepsilon), \quad (49)$$

где  $\varepsilon = E/E^*$ ,  $\hbar\Omega_0 = \pi\hbar^2 n/m$  — расстояние между первой и второй подзонами при  $E = E^*$ ,

$$s_k = \sum_{\substack{i>0 \\ i \neq k}} \frac{v_{ki}^{(\Phi)}}{(a_i - a_k)^i}. \quad (50)$$

При  $E = E^*$  емкость испытывает скачок

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{4me^2(a_2 - a_1)^3}{9\pi\varepsilon_0\hbar^2 nd}. \quad (51)$$

Соответствующее отношение электронных составляющих емкости

$$\frac{C(E^* - 0) - C_0}{C(E^* + 0) - C_0} = \frac{a_2}{a_1} \simeq 1,75.$$

При больших полях  $P_1$  и  $Q$  убывают по закону

$$P_1 \sim E^{-1/3}, \quad Q \sim E^{-3/3}. \quad (52)$$

В качестве примера рассмотрим слой с бесконечной прямоугольной потенциальной ямой. При  $E = 0$  количество подзон  $N$ , заполняемых электронами, определяется неравенствами

$$(\pi/12)N(N-1)(4N+1) < nd^2 < (\pi/12)N(N+1)(4N+5). \quad (53)$$

Начальная емкость такого слоя

$$\frac{C(0) - C_0}{C_0} = \frac{e^2 d^3 m}{\varepsilon_0 \pi^3 \hbar^2} \sum_k \frac{n_k}{k^4} \left( 5 - \frac{\pi^2 k^2}{3} \right). \quad (54)$$

\* В формуле (18) работы [1] допущена ошибка

Пусть  $d = 2 \cdot 10^{-6}$  см,  $n/d = 10^{18}$  см $^{-3}$ ,  $\epsilon_0 = 15$ .  $m = 0,05 m_0$  ( $m_0$  — масса свободного электрона). В этом случае  $N=2$ . При  $E > E^* \sim 1, 2 \cdot 10^5$  В/см (так как  $\epsilon_2(E^*) \simeq 0,18$  эВ =  $0,7 eEd$ , потенциальную яму при этих полях можно считать треугольной) вторая подзона становится пустой (по отношению к равновесной функции распределения). Расстояние между подзонами  $\hbar\Omega_0 = 0,08$  эВ ( $\sim 12$  мкм). Скачок емкости

$$(\Delta C/C_0)(E^+) = 0,14,$$

полное изменение емкости слоя

$$(C(0) - C_0)/C_0 = 0,49,$$

т. е. в приведенном примере скачкообразное изменение емкости составляет 28% полного ее изменения. Зависимость  $C(V)$  для рассмотренного примера приведена на рис 3.

Проведенные исследования показывают на возможность использования «квантовых» слоев для эффективного преобразования спектра электромагнитного излучения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Романов Ю А, Демидов Е В — ФТП, 1980, 14, вып 8, с. 1526.
- 2 Прима Н А, Саченко А. В. — ФТП, 1981, 15, вып 11, с. 2240.
- 3 Шифф Л Квантовая механика. — М. ИЛ, 1959

Научно-исследовательский  
физико-технический институт  
при Горьковском университете

Поступила в редакцию  
21 января 1983 г

#### NONLINEAR CONDUCTIVITY OF THIN SEMICONDUCTOR LAYERS WITH THE DIMENSIONALLY QUANTIZED ENERGETIC SPECTRUM OF ELECTRONS

*E. V. Demidov, Yu. A. Romanov*

Nonlinear conductivity of thin semiconductor layers with the dimensionally quantized energetic spectrum of electrons in the region of  $\omega$  frequencies less than the mean distances in the levels of the dimensional quantization  $\Omega$  and arbitrary to the back-relaxation time of the level population  $\tau^{(r)}$  is found, the electron scattering being considered as quasielastic. The electrical field is applied perpendicularly to the layer. The conductivity of such layers is mainly reactive, highly nonlinear, and there are regions with a dynamic negative differential conductivity in it. The dependence of the layer capacity and the current in it on the applied voltage has a jumplike behaviour at low temperature and the frequencies ( $\omega\tau^{(r)} \ll 1$ ). The value of the mentioned jumps decreases with the growth of  $\omega$  and the oscillations of the current occur at the frequencies  $\Omega$ .