

УДК 534—8

ЭФФЕКТ ЭХА В ЖИДКОСТИ С ПУЗЫРЬКАМИ ГАЗА

И. А. Котельников

Рассмотрен эффект акустического эха в жидкости с пузырьками газа, являющийся аналогом циклотронного эха в плазме. Аналитически рассчитаны параметры всей серии эховых импульсов для случая, когда генерируются импульсы стоячей звуковой волны

Добавление в жидкость небольшого количества случайно-распределенных газовых пузырьков существенным образом изменяет дисперсионные свойства звуковых колебаний, распространяющихся в такой среде. По-видимому, наиболее интересная характеристика газожидкостной смеси в этом отношении — появление затухания звука даже в пренебрежении диссипативными процессами в жидкости, т. е. вязкостью и теплопроводностью [1]. Физический механизм такого затухания аналогичен затуханию Ландау в физике плазмы и состоит в том, что волна передает свою энергию резонансным пузырькам, у которых собственная частота радиальных колебаний, зависящая от радиуса пузырька, близка к частоте волны. Колебания пузырьков в свою очередь затухают из-за переизлучения пузырьками звуковых волн и за счет диссипативных процессов. Вполне реалистичной [1, 2] является ситуация, когда декремент затухания волны γ_d значительно превосходит декремент затухания колебаний пузырька γ_p , и пузырьки продолжают осциллировать после того, как волна затухла. При этом каждый из них, естественно, создает вблизи себя возмущение давления, но вследствие того, что фазы колебаний пузырьков размешались за время затухания волны, макроскопическое возмущение плотности газожидкостной смеси и давления равны нулю. Однако при $t < \gamma_p^{-1}$, пока колебания пузырьков не затухнут, среда сохраняет своеобразную память о звуковой волне. Обратимый характер затухания звука в жидкости с пузырьками газа проявляется в эффекте, аналогичном циклотронному эхо в плазме [3-5]. Внешне эффект выглядит следующим образом. Если через жидкость с пузырьками пропустить на одной и той же частоте два коротких звуковых импульса с интервалом времени T между ними, то вслед за вторым импульсом на той же самой частоте будет наблюдаться последовательность убывающих по амплитуде импульсов, разделенных промежутками времени T .

В линейном приближении оба исходных импульса эволюционируют независимо, и, следовательно, существование эха может быть объяснено только при учете нелинейных эффектов, в частности, нелинейного сдвига частоты собственных колебаний пузырьков. Впервые эффект акустического эха был рассмотрен в [6], однако количественный результат этой работы, а также вывод о том, что эффект эха существует только при достаточно большой амплитуде исходных импульсов, являются неправильными. Ошибочен также результат работы [7], где утверждается, что амплитуда импульса эха пропорциональна квадрату амплитуды исходных импульсов (в действительности квадратичный эффект

отсутствует). В работе [8] показано, что в движущейся жидкости с пузырьками наряду с временным может также существовать и пространственное эхо. В настоящей статье рассмотрено временное эхо и аналитически рассчитаны параметры серии эховых импульсов в случае, когда в жидкости генерируются импульсы стоячей звуковой волны. Показано, что параметры эха определяются величиной безразмерного параметра $\Delta\omega_p T$, где $\Delta\omega_p$ — величина нелинейного сдвига частоты колебаний резонансных пузырьков, которая в свою очередь пропорциональна квадрату амплитуды $\delta\rho_0$ исходных импульсов. При этом амплитуда эха достигает максимума при $\Delta\omega_p T \sim 1$, и, в частности, амплитуда первого импульса по порядку величины сравнивается с $\delta\rho_0$.

Для описания распространения звука в жидкости с пузырьками газа воспользуемся системой уравнений сплошной среды, полученной в предположении, что длина волны звукового возмущения велика по сравнению с расстоянием между пузырьками (см., например, [1]):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta\rho - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p = 0, \quad \delta\rho = \delta\rho c^{-2} - 4\pi\rho \int_0^\infty da g(a) a^2 \xi, \quad (1)$$

где $\delta\rho$ — возмущение плотности смеси, δp — возмущение давления, $\xi = R - a$ — отклонение текущего радиуса пузырька R от его равновесного значения a , ρ — плотность, c — скорость звука в чистой жидкости, а функция распределения пузырьков по радиусам $g(a)$ нормирована таким образом, что $g(a)da$ дает число пузырьков в интервале от a до $a + da$ в единице объема.

Первое из уравнений (1) является следствием линеаризованных уравнений гидродинамики идеальной жидкости, а второе — учитывает тот факт, что возмущение плотности смеси обусловлено как сжимаемостью жидкости, так и изменением объема пузырьков. Здесь и в дальнейшем предполагается, что возмущение давления мало по сравнению с равновесным давлением p_0 и, как следствие, амплитуда колебаний пузырьков также мала, $\xi_0 \ll a$.

Система (1) должна быть дополнена уравнением, связывающим отклонение ξ с давлением в волне δp . С точностью до членов, кубичных по малому параметру ξ/a , и в пренебрежении диссипативными процессами это уравнение имеет следующий вид [2]:

$$\begin{aligned} & \ddot{\xi} + \omega_0^2(a)\xi + \delta p/\rho x = \\ & = a\omega_0^2 \left[\frac{3}{2}(\gamma + 1) \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{9\gamma^2 + 18\gamma + 11}{6} \frac{\xi^3}{a^3} + \frac{3}{2} \left(\frac{\xi}{a} - 1 \right) \frac{\xi^2}{\omega_0^2 a^2} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_0(a) = (3\gamma p_0/\rho a^2)^{1/2}$ — частота линейных колебаний, а γ — показатель адиабаты газа. Учет нелинейных членов в уравнении (2) приводит к появлению нелинейного сдвига частоты $\Delta\omega$, зависящего от амплитуды линейных колебаний ξ_0 . С помощью стандартной техники (см., например, [9]) нетрудно получить, что в первом исчезающем приближении

$$\Delta\omega = - (6\gamma^2 - 3\gamma - 2) \omega_0 \xi_0^2 / 16a^2. \quad (3)$$

Для простоты примем, что действие внешнего источника звука на жидкость с пузырьками газа заключается в том, что в момент времени $t = 0$ создается возмущение следующего вида:

$$\begin{aligned} \delta p(x, 0) &= \delta p_{01} \cos kx, \quad (\partial/\partial t) \delta p(x, 0) = 0, \quad \xi(a, x, 0) = 0, \\ \dot{\xi}(a, x, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

При этом в жидкости генерируется импульс стоячей звуковой волны. Длительность импульса определяется временем линейного затухания $\gamma_{Л}^{-1}$. Поэтому, для того чтобы импульсы не сливались, необходимо потребовать, что $T \gg \gamma_{Л}^{-1}$.

Временно пренебрежем нелинейными поправками в уравнении (2) и рассмотрим задачу о линейной эволюции начального возмущения, (4). Решение линеаризованной системы уравнений (1), (2)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta p}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p = 4\pi\rho \int_0^\infty da a^2 g(a) \xi, \quad (5)$$

$$\xi + \omega_0^2(a) \xi = -\delta p / \rho a$$

с начальным условием (4) легко получить с помощью преобразования Лапласа (подробнее см. [1]):

$$\delta p_1(x, t) = \delta p_{01} \cos kx \cos kct \exp(-\gamma_{Л} t), \quad (6)$$

$\xi_1(a, x, t) = \xi_{01}(a, x) [\cos(\omega_0 t + \varphi) - \exp(-\gamma_{Л} t) \cos(kct + \varphi)]$,
где

$$\gamma_{Л} = \pi^2 c^2 \int_0^\infty da g(a) a \delta(\omega_0(a) - kc) \quad (7)$$

— декремент затухания Ландау; индекс 1 указывает на принадлежность всех величин к первому импульсу, а амплитуда ξ_{01} и фаза колебаний φ определяются следующими соотношениями:

$$\xi_{01}(a, x) = \delta p_{01} \cos kx / \rho a [(\omega_0^2(a) - k^2 c^2)^2 + 4\gamma_{Л}^2 \omega_0^2(a)]^{1/2}, \quad (8)$$

$$\exp(i\varphi(a)) = (\omega_0^2(a) - k^2 c^2 + 2i\gamma_{Л} \omega_0(a)) / [(\omega_0^2(a) - k^2 c^2)^2 + 4\gamma_{Л}^2 \omega_0^2(a)]^{1/2}.$$

Если при $t = T \gg \gamma_{Л}^{-1}$ создать второе возмущение, аналогичное первому, но, вообще говоря, имеющее другую амплитуду δp_{02} , то вновь возбужденная волна будет описываться формулами (6), (8) с заменой t на $t - T$ и индекса 1 на 2, причем полное отклонение ξ радиуса пузырька от равновесного значения будет равно $\xi_{\Sigma} \equiv \xi_1 + \xi_2$. Как видно из (6) и (8), импульсы затухают экспоненциально и за время $\gamma_{Л}^{-1}$ они передают свою энергию пузырькам с частотой собственных колебаний $\omega_0(a)$, лежащей в интервале шириной $\gamma_{Л}$ вблизи $\omega_0 = kc$. Соответствующая ширина интервала резонансных значений радиусов пузырьков равна $a\gamma_{Л}/\omega_0$. Решение (6)–(8) является приближенным. Оно справедливо, если ширина резонанса $a\gamma_{Л}/\omega_0$ много меньше, чем ширина Δa функции распределения пузырьков $g(a)$ (см. [1]). Это условие выполняется, если объемная концентрация пузырьков α достаточно мала, а именно:

$$\alpha \ll \varepsilon (\Delta a / a)^2, \quad (9)$$

где $\varepsilon \equiv \rho_0 / \rho c^2$ — безразмерный параметр, характеризующий сжимаемость жидкости*. При выводе (9) были использованы выражение (7) для $\gamma_{Л}$ и оценка для функции распределения пузырьков $g(a) \sim \alpha / a^3 \Delta a$. В случае нарушения условия (9) затухание звука в жидкости с пу-

* Для воды при атмосферном давлении $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$

зырьками газа приобретает ряд специфических особенностей. В частности, при $(\Delta a/a)^2 < \alpha/\varepsilon \leq 1$ амплитуда возмущения убывает немонотонно. Осциллируя с периодом $\omega_0^{-1}(\alpha/\varepsilon)^{1/2}$, равным времени обмена энергией между пузырьками и волной, она уменьшается до нуля за время размешивания колебаний пузырьков $\omega_0^{-1} a/\Delta a$.

В дополнение к условию (9) необходимо также потребовать, чтобы нелинейный сдвиг частоты колебаний резонансных пузырьков $\Delta\omega_p$ был значительно меньше декремента линейного затухания волны γ_L . Из (3) и (8) следует, что $\Delta\omega_p \sim \omega_0(\delta\rho_0/\rho a^2\omega_0\gamma_L)^2$ и условие $\Delta\omega_p \ll \gamma_L$ сводится к ограничению амплитуды возмущения

$$\delta\rho_0/\rho_0 \ll (\gamma_L/\omega_0)^{3/2}. \quad (10)$$

Это условие уже фактически использовалось, когда предполагалось, что затухание импульсов происходит линейно. При нарушении (10), т. е. при $\Delta\omega_p > \gamma_L$, начальное возмущение в пренебрежении диссипативными процессами не затухает до конца, и его амплитуда, уменьшившись за время $1/\Delta\omega_p$ на величину порядка $\delta\rho_0\gamma_L/\Delta\omega_p$, затем стабилизируется [2].

После того как импульсы затухнут и переходные процессы в колебаниях пузырьков завершатся, можно будет отбросить в выражениях для ξ_1 и ξ_2 экспоненциально убывающие члены. Тогда

$$\begin{aligned} \xi_*(a, x, t) = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{01}(a, x) \cos [\omega_0(a)T + \omega_0(a)(t - T) + \\ + \varphi(a)] + \xi_{02}(a, x) \cos [\omega_0(a)(t - T) + \varphi(a)]. \end{aligned} \quad (11)$$

Проследим теперь за группой пузырьков, имевших непосредственно перед вторым импульсом некоторое значение фазы θ и амплитуды ξ_{01} колебаний. В нее входят пузырьки с дискретными значениями частоты: $\omega_0(a) = (\theta + 2\pi l)/T$, где l — целое число. Под действием второго импульса выделенная группа приобретает новую амплитуду $(\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\theta)^{1/2}$ и новую фазу $\theta' = \arctg[\xi_{01}\sin\theta/(\xi_{02} + \xi_{01}\cos\theta)]$. Из-за разности собственных частот пузырьки со временем разбегутся по фазам, но при $t = (n+1)T$ (где $n = 1, 2, 3, \dots$) они вновь сгруппируются в точках с фазой $\theta' + n\theta$. Такое повторяющееся сфазирование колебаний пузырьков является по сути дела линейным эффектом и не приводит к появлению эха. Действительно, распределение пузырьков, задаваемое функцией (11), является линейной суперпозицией распределений, созданных двумя исходными импульсами, каждое из которых после затухания «своего» импульса не создает макроскопического возмущения плотности $\delta\rho$ и давления δp (так как именно обращение $\delta\rho$ и δp в экспоненциально малую величину означает, что импульс затух).

До сих пор нелинейные эффекты не принимались во внимание. Если же их учесть, то распределение пузырьков, как будет показано, исказится таким образом, что возмущения объемчиков пузырьков не будут компенсировать в точности друг друга, и появится макроскопическое возмущение плотности и давления (ср. с аналогичным объяснением циклотронного эха в плазме [5]). Учтем нелинейный сдвиг частоты колебаний пузырьков. Для этого достаточно заметить, что в промежутках между импульсами фаза пузырьков θ растет пропорционально времени: $d\theta/dt = \omega_0(a) + \Delta\omega(a) = \text{const}$, а за короткое время $\sim \gamma_L^{-1} \ll T$, когда $\delta\rho \neq 0$, изменение фазы $\Delta\theta \sim \Delta\omega/\gamma_L$, обусловленное нелинейными поправками (т. е. изменение разности $\theta - \omega_0 t$), мало по сравнению с $\Delta\omega T$. Кроме того, согласно (10), оно значительно меньше, чем π .

Поэтому можно пренебречь $\Delta\theta$ и заменить в (11) $\omega_0 T$ на $(\omega_0 + \Delta\omega_1)T$ и $\omega_0(t - T)$ на $(\omega_0 + \Delta\omega_2)(t - T)$, где

$$\Delta\omega_1(a) = -(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)\omega_0\xi_{01}^2/16a^2,$$

$$\Delta\omega_2(a) = -(6\gamma^2 - 3\gamma - 2)\omega_0(\xi_{01}^2 + \xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos(\omega_0 + \Delta\omega_1)T)/16a^2$$

— величина нелинейного сдвига соответственно до и после второго импульса. Тогда вместо (11) получим

$$\begin{aligned} \xi_*(a, x, t) = & \xi_{02}\cos[n\theta_* - \beta(\tau + nT)(\xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\theta_*) + \\ & + (\omega_0 - \beta\xi_{01}^2)\tau + \varphi] + \xi_{01}\cos[(n+1)\theta_* - \beta(\tau + nT) \times \\ & \times (\xi_{02}^2 + 2\xi_{01}\xi_{02}\cos\theta_*) + (\omega_0 - \beta\xi_{01}^2)\tau + \varphi], \end{aligned} \quad (12)$$

где $\beta = (6\gamma^2 - 3\gamma - 2)\omega_0/16a^2$, $\theta_* = (\omega_0(a) + \Delta\omega_1(a))T$ — фаза пузырька непосредственно перед вторым импульсом, а $\tau = t - (n+1)T$ — время, отсчитываемое от момента «линейного» сфазирования $(n+1)T$. Распределение пузырьков, задаваемое формулой (12), обеспечивает в моменты времени, близкие к $t = (n+1)T$, появление макроскопического возмущения плотности смеси (см. ниже), что приводит к появлению возмущения давления, которое в свою очередь возмущает колебания пузырьков. Поэтому во время эховых импульсов (и, возможно, в промежутках между ними) истинное отклонение радиуса пузырька ξ не совпадает с ξ_* . Ввиду этого разделим ξ на два слагаемых: $\xi = \xi_* + \zeta$, где ζ , вообще говоря, не предполагается малым по сравнению с ξ_* . В промежутке перед первым эховым импульсом, когда $\delta p = 0$, очевидно, $\zeta = 0$. Учитывая, что ξ_* подчиняется уравнению (2) без члена, пропорционального δp , и пренебрегая в (2) нелинейными членами, содержащими ζ (т. е. членами типа ζ^2 , $\zeta\xi_*$, ξ_*^2 и т. д.), из (1), (2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\delta p}{c^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta p - 4\pi\rho \int_0^\infty da a^2 g(a) \zeta = 4\pi\rho \int_0^\infty da a^2 g(a) \xi_*, \\ \ddot{\zeta} + \omega_0^2(a)\zeta = -\delta p/\rho a \end{aligned} \quad (13)$$

(обоснованность пренебрежения нелинейными членами с ζ будет пояснена ниже). Поскольку функция ξ_* в подынтегральном выражении в первом из уравнений (13) быстро осциллирует по переменной интегрирования, ее удобно усреднить по масштабу осцилляций $\Delta \sim a/\omega_0 T$, что эквивалентно усреднению ξ_* по θ_* (см. (12)) на интервале от 0 до 2π . Эквивалентность усреднений следует из общих свойств систем с фазовым размешиванием, а именно из эргодичности распределения пузырьков на фазовой траектории. Интегрирование системы (13) с нулевыми начальными условиями: $\delta p = (\partial/\partial t)\delta p = \zeta = \dot{\zeta} = 0$, взятыми в некоторый момент времени до возникновения первого эхового импульса (например, при $t = 3T/2$), дает выражение для давления в n -м импульсе эха*:

$$\delta p^n(x, t) = \cos kx \int_0^{2\pi/k} k dx \cos^2 kx \int_0^\infty da \frac{4\omega_0^2(a)c^2 g(a)a}{(\omega_0^2(a) - k^2c^2)^2 + 4\gamma_{II}^2\omega_0^2(a)} \times$$

* Это выражение есть первый член разложения $\delta p^n(x, t)$ в ряд Фурье по косинусам kx . Последующие члены меньше по крайней мере в kc/γ_{II} раз.

$$\begin{aligned} & \times \{\delta p_{02} J_n(2nT\beta\xi_{01}\xi_{02}) \cos[\omega_0\tau + 2\varphi - \pi n/2 - \beta nT\xi_{02}^2] + \\ & + \delta p_{01} J_{n+1}(2n\beta T\xi_{01}\xi_{02}) \sin[\omega_0\tau + 2\varphi - \pi n/2 - \beta nT\xi_{02}^2]\}, \end{aligned} \quad (14)$$

где J_n и J_{n+1} — функции Бесселя первого рода (они возникли при усреднении ξ_* по θ_*). Аналогичную формулу можно получить и для ζ . Важно, однако, лишь то, что в промежутках между импульсами эха $\zeta = 0$ (точнее, ζ экспоненциально мало). Это обстоятельство означает, что энергия каждого пузырька до и после любого импульса эха одинакова, что естественным образом согласуется с законом сохранения энергии всей системы волн — пузырьки и оправдывает сделанные выше предположения. Действительно, величина нелинейного сдвига частоты после прохождения любого из импульсов эха остается неизменной и равной $\Delta\omega_2$, что было использовано при получении (12). Кроме того, отброшенные во втором из уравнений (13) нелинейные члены, содержащие ζ , отличны от нуля только в течение коротких промежутков, когда $\delta p \neq 0$, и за это время приводят к появлению лишь незначительных поправок к фазе колебаний пузырьков, которыми можно пренебречь аналогично тому, как это было сделано при получении (12).

В проведенном выше расчете предполагалось, что $\gamma_L^{-1} \ll T \ll \gamma_n^{-1}$. При этом реализуются два предельных случая, когда $\Delta\omega_p T \ll 1$ и $\Delta\omega_p T \gg 1$. В первом из них распределение пузырьков лишь незначительно отличается от найденного в линейном приближении. Напротив, при $\Delta\omega_p T \gg 1$ колебания резонансных пузырьков в моменты линейного сфазирования ($2T, 3T, \dots$) оказываются сильно размешанными.

Рассмотрим подробнее случай $\Delta\omega_p T \ll 1$. Тогда в (14) можно приближенно заменить $J_n(x)$ на $(x/2)^n/n!$. Это справедливо, если аргумент функций Бесселя в (14) мал, а именно: $x \sim n\Delta\omega_p T \ll n^{1/2}$. При $n^{1/2} \leq x \ll n$ указанное приближение с высокой относительной точностью дает значение логарифма $J_n(x)$ [10] (формулы 7.2(2) на с. 12 и 7.13(34) на с. 103), что приемлемо для большинства оценок. Осуществив замену, легко убедиться, что вторым слагаемым в (14) можно пренебречь, а функцию $g(a)$ в соответствии с неравенством (9) вынести за знак интеграла, подставив в нее значение a , при котором выполняется условие резонанса: $\omega_0(a) = kc$. При $n\Delta\omega_p T \ll 1$ оставшийся интеграл в (14) легко вычисляется, так как величиной $n\beta T\xi_{02}^2 \sim n\Delta\omega_p T$ в аргументе косинуса можно пренебречь. Например, первый импульс эха имеет вид

$$\delta p^1 = \delta p_{02} \mu f(\tau) \cos kx \sin kc\tau,$$

где

$$\tau = t - 2T,$$

$$f(\tau) = -\frac{1}{2^6} \begin{cases} \exp(-\gamma_L |\tau|), & \tau < 0 \\ \exp(-\gamma_L \tau)(1 + 2\gamma_L \tau + 2\gamma_L^2 \tau^2), & \tau > 0 \end{cases}$$

$$\mu = (6\gamma^2 - 3\gamma - 2) \delta p_{01} \delta p_{02} \omega_0^3 T / 48 \gamma^2 \gamma_L^2 p_0^2.$$

По порядку величины $\mu \sim \Delta\omega_p T$ и, следовательно, $\delta p^1 \sim \delta p_{02} \Delta\omega_p T$. С увеличением порядкового номера импульса n его амплитуда быстро убывает: $\delta p^n \sim \delta p_{02} (\Delta\omega_p T)^n / n$ при $1 \ll n \ll (\Delta\omega_p T)^{-1}$. Амплитуда импульсов убывает еще быстрее, если $n \gg (\Delta\omega_p T)^{-1}$. Формально это связано с тем, что подынтегральное выражение в (14) становится быстроосциллирующей функцией переменной интегрирования. Интегрирование по методу перевала приводит к оценке $\delta p^n \sim \delta p_{02} (\Delta\omega_p T)^{n-1/2} / n^{3/2}$. (Во избежание недоразумений здесь следует добавить, что число импульсов ограничено временем затухания колебаний пузырьков и не пре-

вышает $(\gamma_{\text{п}}T)^{-1}$). Из полученных оценок следует, что амплитуда эха зависит от того, который из двух импульсов, сгенерированных внешним источником, имел большую амплитуду. Причину этого иллюстрируют рис. 1 д и 1 е, из сравнения которых видно, что от очередности генерирования большого и малого импульсов зависит вид распределения пузырьков по энергии и фазе колебаний.

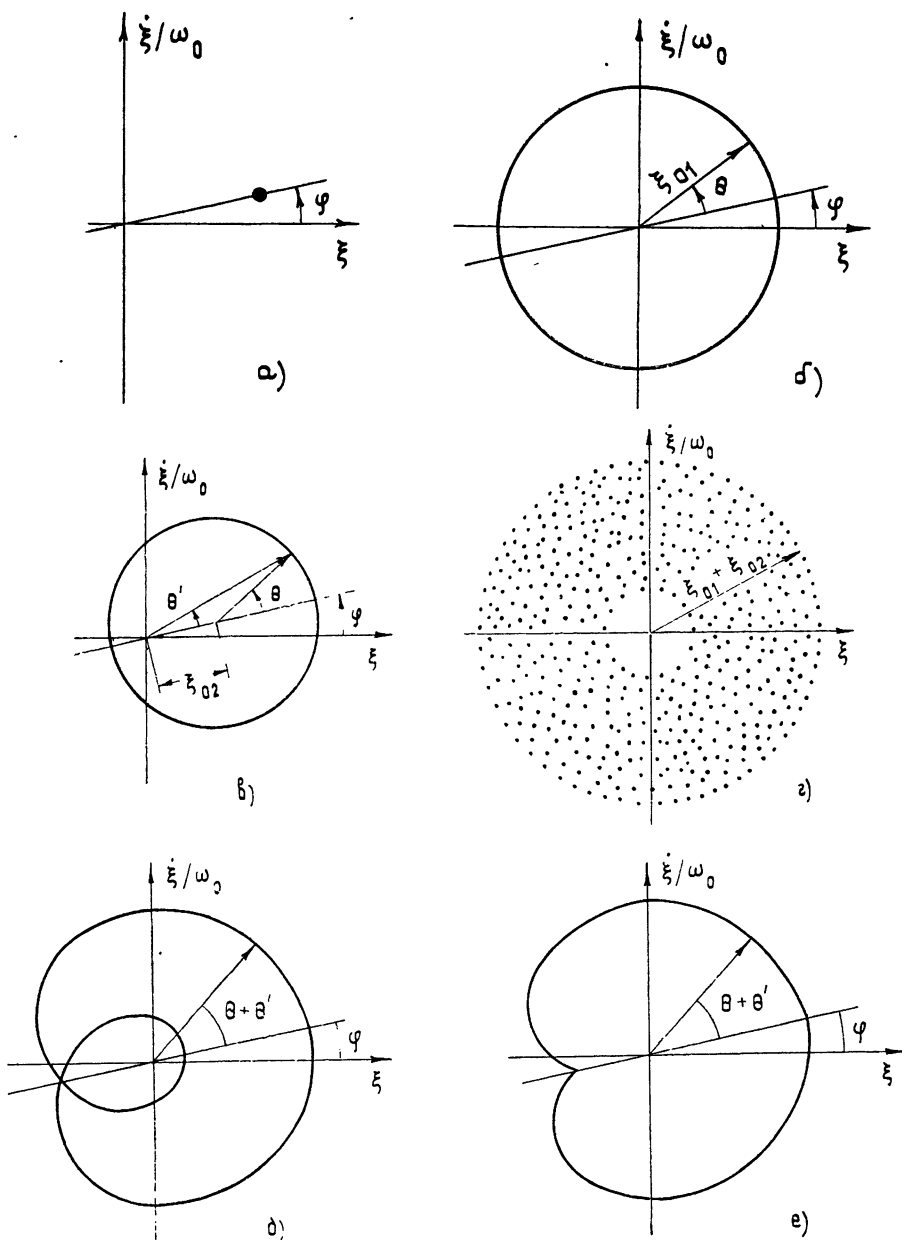


Рис. 1. Вид распределения пузырьков на фазовой плоскости (ξ , $\dot{\xi}/\omega_0$) в различные моменты времени: 1 а) $t=0$, 1 б) $t=T-0$, 1 в) $t=T+0$, $\delta\rho_{01} > \delta\rho_{02}$, 1 г) $T < t < 2T$, 1 д) $t=2T$, $\delta\rho_{01} > \delta\rho_{02}$, 1 е) $t=2T$, $\delta\rho_{01} < \delta\rho_{02}$.

— Что касается случая $\Delta\omega_p T \gg 1$, то необходимо отметить, что уже в момент первого импульса эха поправка к фазе колебаний пузырьков, связанная с нелинейным сдвигом частоты, становится большой

($\sim \Delta\omega T$) и на интервале $a\gamma_{\text{д}}/\omega_0$ резонансных значений радиусов пузырьков меняется на величину $\Delta\omega_p T \gg 1$. Это означает, что колебания резонансных пузырьков сильно размешаны, и может оказаться, что заметный вклад в величину эховых импульсов дают нерезонансные пузырьки, у которых $\Delta\omega T \sim 1$, т. е. пузырьки с частотой $\omega_0(a) \simeq kc \pm \pm \gamma_{\text{д}} (\Delta\omega_p T)^{1/2}$. Поэтому параметры эха существенно зависят от вида функции распределения пузырьков $g(a)$ вне резонанса. При $\Delta\omega_p T \gg 1$ амплитуда эха, в отличие от предыдущего случая, убывает с ростом длительности промежутка времени T между импульсами. В частности, если $g(a)$ приблизительно постоянная в области шириной $a\gamma_{\text{д}} \times \times (\Delta\omega_p T)^{1/2}/\omega_0$ вблизи резонанса, амплитуда первого импульса эха равна $\delta\rho_0/\Delta\omega_p T$.

В заключение автор пользуется случаем поблагодарить Д. Д. Рютова, по чьей инициативе выполнена настоящая работа, а также Г. В. Ступакова и В. П. Нагорного за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рютов Д. Д. — Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, № 9, с. 446.
2. Котельников И. А., Ступаков Г. В. — ЖЭТФ, 1983, 84, № 3, с. 956.
3. Hill R. M., Kaplan D. E. — Phys. Rev. Lett., 1965, 14, p. 1062.
4. Crawford F. W., Nag R. S. — J. Appl. Phys., 1966, 37, № 12, p. 4405.
5. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1976, с. 159.
6. Лопатников С. Л. — Письма в ЖТФ, 1980, 6, № 10, с. 623.
7. Лопатников С. Л. В кн.: Волны и дифракция. VIII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. — М.: 1981, с. 332.
8. Немцов Б. Е., Эйрман В. Я. — Акуст. журн., 1982, 28, с. 669.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973, с. 109.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — М.: Наука, 1966.

Институт ядерной физики
СО АН СССР

Поступила в редакцию
2 февраля 1983 г.

ECHO EFFECT IN GAS-BUBBLE LIQUID

I. A. Kotel'nikov

Acoustic echo in a liquid contained gas bubbles is considered. The effect is analogous to cyclotron echo in plasma. Parameters of the whole set of echo's pulses are calculated analitically in the case of immobile sound wave pulses being generated.