ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XXVI, № 10 РАДИОФИЗИКА 1983

УДК 523 164 83 + 621 371 519

СТРУКТУРНАЯ ФУНКЦИЯ ЛУННОГО РЕЛЬЕФА ПО РАДИОЛОКАЦИОННЫМ ДАННЫМ

И. М. Фукс

Проведен анализ частотной зависимости радиолокационного сечения рассеяния $\sigma(0)$ поверхности Луны в диапазоне длин волн 3,6 *см* $\leqslant \lambda \leqslant$ 6 *м* при различных углах облучения θ. Предложена интерпретация этих зависимостей на основе решения задачи дифракции волн на статистически шероховатой поверхности со структурной функцией $D(\rho) = C^2\rho^{5/3}$ ($D(\rho)$ — средний квадрат разности высот между двумя точками лунного рельефа, разнесенными на расстояние ρ). Соответствующий пространственный спектр $S(\varkappa)$ (средний квадрат амплитуды пространственных гармоник неровностей с периодом $\Lambda=2\pi/\varkappa$) имеет вид $S(\varkappa) = 0{,}446\ C^2\varkappa^{-11/3}$ со структурной постоянной $C^2=0{,}051$ *см*$^{1/3}$

Радиолокационные исследования Луны, проведенные в 60—70-х годах в широком диапазоне длин волн от 8,6 *мм* до 19 *м* (см. обзоры [1—3]), позволили получить радиояркостные карты лунной поверхности с высоким пространственным разрешением, приближающимся к предельному разрешению в оптическом диапазоне ($\simeq 1$ *км*). Кроме идентификации деталей изображения поверхности на радиолокационных картах и качественного их сравнения с оптическими фотографиями Луны, представляет несомненный интерес получение количественной информации о структуре лунной поверхности и физических параметрах лунного грунта. Фактически речь идет об установлении связи радиолокационной отражающей способности со степенью шероховатости поверхности и значением диэлектрической проницаемости ε грунта в поверхностном слое.

По величине полного радиолокационного сечения рассеяния σ_0 лунного диска можно оценить среднее по поверхности Луны (в области, прилегающей к подрадарной точке) значение ε, если предположить, что шероховатость рельефа не может сколько-нибудь существенно изменить полную интенсивность радиолокационного сигнала (от всего диска в целом), и считать, что отличие экспериментально наблюдаемого сечения σ_0 от геометрического πa^2 ($a=1738$ *км* — радиус Луны) обусловлено только отличием от единицы коэффициента отражения Френеля:

$$V_0 = |(\sqrt{\varepsilon}-1)/(\sqrt{\varepsilon}+1)|. \qquad (1)$$

Проведенные таким способом оценки ε (см., например, [1]) оказываются практически не зависящими от длины волны излучения в указанном выше широком диапазоне длин волн и дают в среднем значение $\varepsilon=2{,}6\div2{,}8$, которое хорошо согласуется с данными, полученными из радиометрических измерений теплового излучения Луны [4].

При облучении Луны импульсами достаточно малой длительности от 250—100 *мкс* и короче (полная радиолокационная глубина Луны равна 11,6 *мс*) по временной развертке интенсивности радиолокационного сигнала определяется зависимость удельного сечения обратного рассеяния σ от угла падения θ. По скорости убывания σ

с ростом θ (от подрадарной точки к лимбу) можно судить о характерных углах наклона лунного рельефа, однако так определенная величина дисперсии наклона оказывается зависящей от длины волны излучения [3], и вопрос об объективном определении степени шероховатости поверхности (во всяком случае не зависящем от длины волны излучения) до сих пор остается открытым.

В данной работе предложена интерпретация зависимости от длины волны облучения λ экспериментально наблюдаемых сечений рассеяния $\sigma(\theta)$, основанная на так называемой комбинированной (или двухмасштабной) модели. Эта модель успешно применяется в течение последних 15 лет в радиоокеанографии [5–9] — новом и быстро развивающемся направлении статистической радиофизики, основы которого были заложены еще в пятидесятых годах исследованиями, проведенными в ИРЭ АН УССР в диапазоне декаметровых радиоволн [10]

1 Статистическое описание рельефа. Получаемая при радиолокации Луны зависимость $\sigma(\theta)$ является результатом усреднения «локальных» сечений рассеяния в пределах всего освещенного импульсом кольца на поверхности Луны. При построении радиояркостных карт разрешение внутри кольца осуществляется благодаря эффекту Доплера за счет либрации Луны путем частотной фильтрации принятого сигнала (см., например, [11]). Мы же будем интересоваться не отдельными деталями лунного рельефа, а попытаемся выяснить, какие ее статистические параметры можно определить по усредненным зависимостям $\sigma(\theta)$ на разных длинах волн.

Обозначим через $\boldsymbol{r}$ радиус-вектор точки на идеально гладкой поверхности Луны — сфере S_0 радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε. Радиальные отклонения истинной поверхности от сферической обозначим через $\zeta(\boldsymbol{r})$ и будем рассматривать эту функцию (рельеф поверхности) как одну из реализаций некоторой случайной функции двух переменных — случайного поля. Предположим далее, что статистические свойства $\zeta(\boldsymbol{r})$ в среднем одинаковы на всей сфере, т. е. что введенное поле является пространственно однородным. Так как у нас нет ансамбля лунных поверхностей, то нам остается только постулировать эргодичность функции $\zeta(\boldsymbol{r})$ и под усреднением $\langle\ldots\rangle$ понимать интегрирование по поверхности сферы S_0. Считая, что $\langle\zeta\rangle=0$ (т. е. предполагая, что в среднем поверхность Луны действительно является идеальной сферой), введем корреляционную функцию $W(\boldsymbol{\rho})$ соотношением (см., например, [12], гл 1)

$$W(\boldsymbol{\rho})=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{S_0}\zeta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})\zeta(\boldsymbol{r})\,d^2\boldsymbol{r}\equiv\langle\zeta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})\zeta(\boldsymbol{r})\rangle. \tag{2}$$

Ясно, что $W(\boldsymbol{\rho})$ является периодической функцией с периодом $2\pi a$, если точка с радиусом-вектором $\boldsymbol{\rho}$ перемещается по дуге большого круга. Однако в дальнейшем это обстоятельство можно не принимать во внимание, так как изучение корреляции на столь больших расстояниях, сравнимых с лунным диаметром, вряд ли статистически оправдано. Поэтому в дальнейшем речь будет идти о выяснении корреляционной связи между высотами лунного рельефа на расстояниях ρ, значительно меньших πa, что позволяет ввести пространственный спектр $S(\boldsymbol{\varkappa})$ случайного поля $\zeta(\boldsymbol{r})$ как обычное преобразование Фурье

$$S(\boldsymbol{\varkappa})=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}W(\boldsymbol{\rho})\,e^{i\boldsymbol{\varkappa\rho}}\,d^2\boldsymbol{\rho} \tag{3}$$

Здесь пространственные частоты $\varkappa$ предполагаются не очень малыми ($\varkappa a\gg1$), поэтому основной вклад в интеграл (3) дает область

$\rho \ll \pi a$, что и позволяет распространить пределы интегрирования в (3) до бесконечности. Интегрирование $S(\varkappa)$ по всем направлениям φ вектора $\varkappa$ приводит к функции

$$S(\varkappa) = \int_0^{2\pi} S(\varkappa)\, d\varphi\,, \tag{4}$$

имеющей смысл среднего квадрата высоты пространственных гармоник рельефа с периодом $\Lambda = 2\pi/a$, отнесенной к единичному интервалу пространственных частот $\varkappa$. Наряду со случайным полем $\zeta(\boldsymbol{r})$ будем также рассматривать поле наклонов $\gamma(\boldsymbol{r}) = \nabla_r \zeta(\boldsymbol{r})$. Ниже будет показано, что с помощью предлагаемой модели рассеяния по частотной зависимости $\sigma(\theta)$ можно определить пространственный спектр $S(\varkappa)$ и плотность распределения $w(\gamma)$ модулей наклонов в области $\gamma^2 \ll 1$.

2. Двухмасштабная модель. Для решения задачи дифракции радиоизлучения с длиной волны λ, падающего под углом θ на поверхность $\zeta(\boldsymbol{r})$, представим последнюю в виде суперпозиции двух поверхностей: сглаженной поверхности $Z(\boldsymbol{r})$, спектр которой $S_z(\varkappa)$ совпадает со спектром $S(\varkappa)$ реальной поверхности $\zeta(\boldsymbol{r})$ при $\varkappa \leqslant \varkappa_0$ и равен нулю при $\varkappa > \varkappa_0$:

$$S_z(\varkappa) = \eta(\varkappa_0 - \varkappa) S(\varkappa) \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqslant 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \tag{5}$$

и мелкомасштабной поверхности $\xi(\boldsymbol{r})$ со спектром

$$S_\xi(\varkappa) = \eta(\varkappa - \varkappa_0) S(\varkappa). \tag{6}$$

Выберем $\varkappa_0$ настолько малым, чтобы характерные радиусы кривизны R крупномасштабной поверхности $Z(\boldsymbol{r})$ были велики по сравнению с длиной волны излучения:

$$kR \gg 1, \quad \frac{1}{R^2} = \frac{1}{(1+\Gamma_0^2)^3} \int_0^{\varkappa_0} S(\varkappa)\, \varkappa^5\, d\varkappa\,. \tag{7}$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, а Γ_0^2 — дисперсия модуля Γ поля наклонов $\boldsymbol{\Gamma} = \nabla_r Z(\boldsymbol{r})$:

$$\Gamma_0^2 = \langle |\nabla_r Z(\boldsymbol{r})|^2 \rangle = \int_0^{\varkappa_0} S(\varkappa)\, \varkappa^3\, d\varkappa\,. \tag{8}$$

При выполнении неравенства (7) рассеяние на поверхности $Z(\boldsymbol{r})$ можно рассчитывать с помощью метода касательной плоскости [13, 14] (аналогичного методу Кирхгофа в теории дифракции на плоских экранах) и не учитывать затенений поверхности и многократных переизлучений (см. подробнее [15], § 22, 23), если

$$\Gamma_0^2 \ll 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}^2 \theta \gg \Gamma_0^2, \tag{9}$$

т. е. поверхность $Z(\boldsymbol{r})$ является не только гладкой (в масштабе длины волны), но и пологой, а облучение — не очень скользящим. Если при этом дисперсия нормальных отклонений $h^2 = \langle \xi^2(\boldsymbol{r}) \rangle$ реальной поверхности $\zeta(\boldsymbol{r})$ от сглаженной $Z(\boldsymbol{r})$ оказывается достаточно малой:

$$(kh)^2 = k^2 \int_{\varkappa_0}^{\infty} S(\varkappa)\, \varkappa\, d\varkappa \ll 1 \tag{10}$$

(критерий Рэлея), то для расчета поля, дифрагирующего на мелкомасштабной структуре $\xi(\boldsymbol{r})$, можно воспользоваться методом возмущений [16]. Если можно найти такое $\varkappa_0$, что неравенства (7) и (10) оказываются совместимыми, то сечение рассеяния σ (с единицы облученной площади) может быть представлено в виде суммы $\sigma=\sigma_z+\sigma_\xi$, где σ_z — сечение рассеяния на сглаженной поверхности $Z(\boldsymbol{r})$, которое при больших параметрах Рэлея,

$$(kH)^2 = k^2 \int\limits_0^{\varkappa_0} S(\varkappa)\varkappa d\varkappa \gg 1 \qquad (11)$$

(H^2 — дисперсия отклонений $Z(\boldsymbol{r})$ от среднего уровня $\langle Z\rangle=0$), имеет вид*

$$\sigma_z(\theta) = (V_0^2/2\cos^4\theta)\, w\,(\operatorname{tg}\theta)\,. \qquad (12)$$

Здесь $w(\Gamma)$ — плотность распределения вероятностей наклонов $\Gamma = |\boldsymbol{\Gamma}|$:

$$w(\Gamma) = \int\limits_0^{2\pi} w(\boldsymbol{\Gamma})\, d\varphi, \qquad \int\limits_0^{\infty} w(\Gamma)\Gamma\, d\Gamma = 1. \qquad (13)$$

Если, например, $\zeta(\boldsymbol{r})$ — нормальное случайное поле (с гауссовым распределением возвышений ζ), то поле наклонов $\boldsymbol{\Gamma}=\nabla_r Z(\boldsymbol{r})$ также является нормальным, так как оно получается из $\zeta(\boldsymbol{r})$ путем линейной фильтрации (5) и последующего дифференцирования и, следовательно, Γ распределено по закону Рэлея**:

$$w(\Gamma) = (2/\Gamma_0^2)\exp(-\Gamma^2/\Gamma_0^2). \qquad (14)$$

Сечение рассеяния σ_ξ на мелкомасштабной структуре $\xi(\boldsymbol{r})$ в первом приближении теории возмущений имеет вид (см. например, [9])

$$\sigma_\xi(\theta) = k^4\langle Q(\theta', \varepsilon)\, S_\xi\,(2k\sin\theta')\rangle_{\boldsymbol{\Gamma}}\,. \qquad (15)$$

Здесь $\theta' = \arccos(\boldsymbol{n}\boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{\beta}$ — единичный вектор направления на радиолокатор, $\boldsymbol{n}$ — нормаль к поверхности $Z(\boldsymbol{r})$, радиальная n_r и тангенциальная $\boldsymbol{n}_\perp$ компоненты которой имеют вид

$$n_r = 1/\sqrt{1+\Gamma^2}, \quad \boldsymbol{n}_\perp = -\boldsymbol{\Gamma} n_r\,. \qquad (16)$$

Усреднение в (15) проводится по наклонам $\boldsymbol{\Gamma}$ крупномасштабной поверхности $Z(\boldsymbol{r})$. Явный вид множителя $Q(\theta', \varepsilon)$ с учетом поляризации излучения в общем (не только радиолокационном) случае приведен в [7, 15]. Как будет видно из дальнейшего (см. рис. 4), при $\lambda > 3$ *см* дисперсия наклонов Γ_0^2 оказывается настолько малой, что в (15) угол θ' можно заменить на θ — угол между $\boldsymbol{\beta}$ и нормалью к сфере S_0, и при анализе зависимости σ_ξ от длины волны λ конкретный вид $Q(\theta, \varepsilon)$ оказывается несущественным. При этом из формулы (15) следует вывод о резонансном характере рассеяния волны на мелкомасштабной структуре $\xi(\boldsymbol{r})$ — интенсивность радиолокационного сигнала определяется спектральной плотностью $S(\varkappa_p)$ только одной пространственной гармоники шероховатостей с $\varkappa_p = 2k\sin\theta$. Для того, чтобы рассеяние

* Формула (12) следует из формулы (20 38а) монографии [15] в радиолокационном случае после усреднения по азимутальному углу φ (т е по поверхности освещенного кольца) и отличается от нее множителем 4π (см подстрочное примечание на с. 96 [15]).

** Законом Рэлея, строго говоря, называется произведение $\Gamma w(\Gamma)$, которое, согласно (13), нормировано на единицу на такой синусоиде можно было рассчитывать по теории возмущений, необходимо также, чтобы она была достаточно пологой:

$$\gamma^2(\varkappa_p) = \varkappa_p^4 S(\varkappa_p) \ll 1\,. \tag{17}$$

3. Дисперсия наклонов. Из приведенного в [1] обзора радиолокационных данных следует, что в угловой зависимости $\sigma(\theta)$ можно выделить по крайней мере две области, соответствующие существенно различным механизмам рассеяния: а) квазизеркальную область малых углов падения, где при увеличении θ от нуля до 15—30° сечение

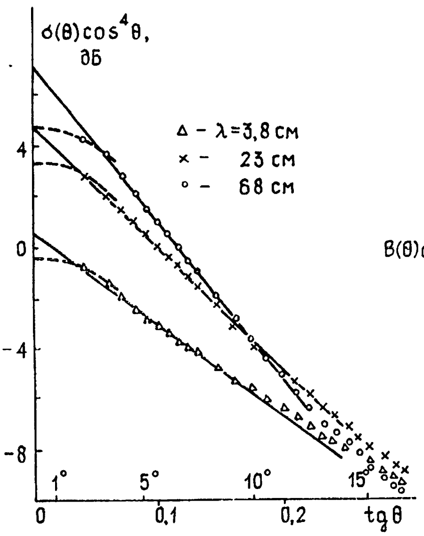

Рис. 1.

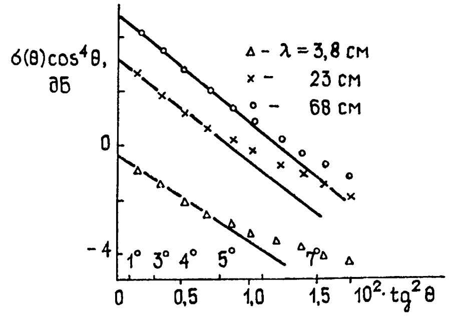

Рис 2

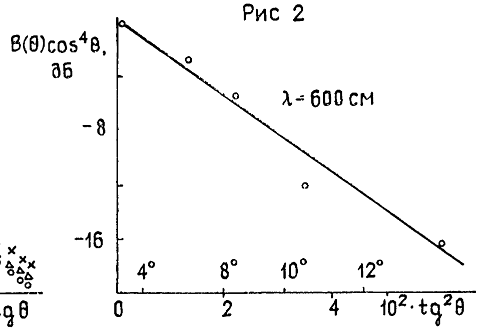

Рис. 3

Рис. 1. Точки—экспериментальные данные [1], сплошные прямые линии—экспоненциальный закон (18) распределения вероятностей наклонов $w(\Gamma)$, штриховая—гауссов закон (14)

Рис 2 То же, что на рис 1 в зависимости от $\mathrm{tg}^2\theta$, в области малых углов падения θ. Прямые линии соответствуют закону (14) для распределения $w(\Gamma)$

Рис 3. Точки—экспериментальные данные из [18], прямая линия соответствует гауссову закону (14) распределения $w(\Gamma)$

$\sigma(0)$ уменьшается на десятки децибел (на $\simeq 10$ *дБ* для $\lambda = 3{,}6$ *см* и на $\simeq 30$ *дБ* для $\lambda = 6$ *м*), и б) широкую область диффузного рассеяния, где $\sigma(\theta)$ изменяется всего на несколько децибел при изменении θ от 30 до 80°. Если считать, что сечение рассеяния в квазизеркальной компоненте описывается формулой (12), то по экспериментальным зависимостям $\sigma(\theta)$ можно легко определить $w(\Gamma)$ — плотность распределения вероятностей наклонов крупномасштабной (сглаженной) поверхности $Z(\boldsymbol{r})$. На рис. 1 по данным, приведенным в [1], для $\lambda = 3{,}8$, 23 и 68 *см* построены графики зависимости произведения $\sigma(\theta)\cos^4\theta$ от $\mathrm{tg}\,\theta$. Видно, что в диапазоне углов $4° \leq \theta \leq 15°$ эта зависимость в логарифмическом масштабе является линейной, т. е. $\lg w(\Gamma) \sim \Gamma$, поэтому с учетом нормировки (13)

$$w(\Gamma) = b^2 \exp(-b\,\Gamma), \tag{18}$$

где $b^2 = 6/\Gamma_0^2$. Полученные по наклонам прямых на рис. 1 значения дисперсии

$$\Gamma_0^2 = \int\limits_0^\infty w(\Gamma)\,\Gamma^3 d\,\Gamma \qquad (19)$$

для указанных трех длин волн приведены на рис. 4 (светлые кружки). Там же приведено значение Γ_0^2 для $\lambda = 10$ *см* по данным работы [17], полученное описанным выше способом, но не по $\sigma(0)$, а по диаграмме обратного рассеяния в квазизеркальной области:

$$B(\theta) \equiv \frac{\sigma(\theta)}{\sigma(0)} \simeq \frac{1}{\cos^4\theta}\,\frac{w(\operatorname{tg}\theta)}{w(0)}\,. \qquad (20)$$

На рис. 3 аналогичным образом представлены экспериментальные данные из [18] при $\lambda = 6$ *м*. Видно, что в этом случае зависимость $\lg B(\theta)\cos^4\theta$ лучше линеаризуется в функции от $\operatorname{tg}^2\theta$, т. е. $w(\Gamma)$ имеет вид распределения Рэлея, значение параметра Γ_0^2 которого также приведено на рис. 4. Из рис. 4 следует, что в широком диапазоне длин волн от 3,6 *см* до 6 *м* частотная зависимость дисперсии наклонов Γ_0^2 имеет вид $\Gamma_0^2 \sim \lambda^{-1/3}$. Сплошная линия на рис. 4 соответствует закону

$$\Gamma_0^2 = Ak^{1/3}, \qquad (21)$$

где $A = 0{,}068$ $см^{1/3}$. С другой стороны, Γ_0^2 может быть определено непосредственно по значению σ при $\theta = 0$, если только априори известен характер закона распределения $w(\Gamma)$ и значение ε, так как из (12) следует:

$$\Gamma_0^2 = 3V_0^2/\sigma(0); \qquad (22а)$$

$$\Gamma_0^2 = V_0^2/\sigma(0). \qquad (22б)$$

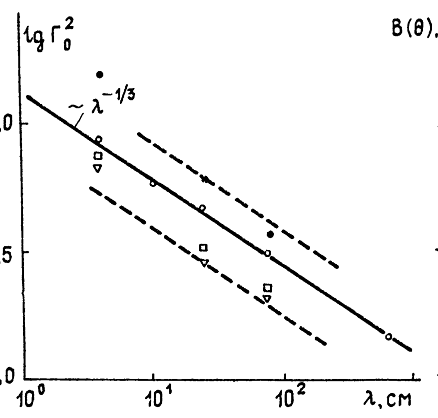

Рис. 4.

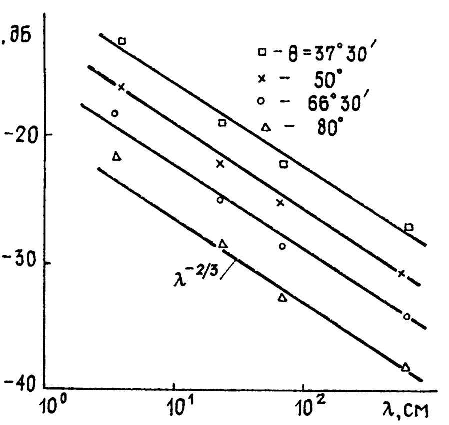

Рис. 5.

Рис. 4. Зависимость дисперсии наклонов Γ_0^2 крупномасштабной компоненты лунного рельефа от длины волны облучения λ. Светлые кружки соответствуют значениям, полученным из угломестных зависимостей $\sigma(\theta)$ (рис 1, 2) и $B(\theta)$ (рис. 3) по экспериментальным данным [1,17,18].

Рис. 5. Зависимость диаграммы обратного рассеяния $B(\theta)$ от длины волны λ в диффузной области. Значки—экспериментальные данные из [1] (λ—3,8, 23 и 68 *см*) и из [18] ($\lambda = 6$ *м*).

Первая из этих формул соответствует экспоненциальному закону (18), а вторая — рэлеевскому (14). На рис. 4 приведены значения Γ_0^2 (черные кружки), полученные по формуле (22а) с $V_0^2 = 0{,}06$ путем линейной экстраполяции до $\theta=0$ графиков для $\sigma\cos^4\theta$, приведенных на рис. 1 сплошными линиями. Если при $\theta\leqslant 5^\circ$ принять линейную экстраполяцию для $\lg\sigma\cos^4\theta$ в зависимости от $\mathrm{tg}^2\theta$ (рис. 2), т. е. считать распределение $w(\Gamma)$ в этой области рэлеевским (штриховые линии на рис. 1), то хотя для $\sigma(0)$ и получаются меньшие значения, однако величина дисперсий Γ_0^2, определенных по (22б) (светлые треугольники на рис. 4), оказывается все же меньше, чем в предыдущем случае. К близким значениям Γ_0^2 приводят расчеты по формуле (22б), если в нее вместо величин $\sigma(0)$, получаемых путем различных экстраполяций, подставить экспериментальные данные при минимальном угле наблюдения $\theta=2^\circ,38$. Эти значения также приведены на рис. 4 светлые квадратики). Следует отметить, что определение Γ_0^2 по $\sigma(0)$ (треугольники, квадратики и темные кружки на рис. 4) связано со значительно бо́льшими погрешностями, чем по зависимости от θ диаграммы обратного рассеяния $B(\theta)$ (светлые кружки на рис. 4): во-первых, абсолютные измерения $\sigma(\theta)$ требуют, в отличие от $B(\theta)$, тщательной калибровки аппаратуры; во-вторых, измерение $\sigma(0)$ осложняется тем, что переход от измеряемого в эксперименте времени задержки импульса t к углу θ по формуле $\cos\theta=1-ct/2a$ при малых θ сопровождается большими ошибками, ибо $d\theta/dt=\infty$ при $\theta=0$; в-третьих, в формулы (22а), (22б), в отличие от (20), входит значение ε, которое также известно не очень точно; наконец, измерение $\sigma(\theta)$ подразумевает достаточное статистическое усреднение, чего достичь практически невозможно из-за того, что подрадарная точка на поверхности Луны перемещается довольно медленно и на очень ограниченной площади. Заметим, что усреднение $\sigma(\theta)$ при наклонном облучении (θ — больше нескольких градусов) обеспечивается не только усреднением по площади облученного кольца, но и временны́м усреднением (за счет либрации) мгновенных значений σ, формирующихся в результате интерференции сигналов от пространственно разнесенных участков поверхности в пределах облученного кольца. В эксперименте это проявляется в расширении спектра отраженного сигнала по мере увеличения задержки t (и, соответственно, увеличении угла θ). Из рис. 4 видно, что несмотря на перечисленные выше погрешности измерения $\sigma(0)$, значения Γ_0^2, определенные по $B(\theta)$ и $\sigma(0)$, оказываются достаточно близкими и зависимость $\Gamma_0^2\sim\lambda^{-1/3}$ хорошо соблюдается, а различие в значениях коэффициента A в (21) превышает $\pm 30\%$ (штриховые линии на рис. 4). Подставляя в (20) $w(\Gamma)$ в форме (14) или (18) и учитывая, что $\Gamma_0^2\sim\lambda^{-1/3}$, приходим к выводу, что ширина $\delta\theta$ диаграммы обратного рассеяния $B(\theta)$ на фиксированном уровне $\beta=\mathrm{const}$ $(B(\delta\theta)=\beta<1)$ в квазизеркальной области изменяется с длиной волны λ по закону $\delta\theta\sim\lambda^{-1/6}$.

4. Пространственный спектр. Переход от квазизеркальной области к диффузной в зависимостях $B(\theta)$, приведенных в [1], происходит при $\theta_0=15\div30^\circ$ во всем диапазоне волн от 3,6 *см* до 6 *м*. Тот факт, что ширина квазизеркальной области оказывается не зависящей от λ, позволяет предположить, что в спектре $S(\varkappa)$ область $\varkappa>\varkappa_0=2k\sin\theta_0$ обеспечивает диффузное рассеяние, а область $\varkappa<\varkappa_0$ — квазизеркальное, причем граница разделения спектра $\varkappa_0$ определяется длиной волны излучения:

$$\varkappa_0=\alpha k,\quad \alpha=2\sin\theta_0\simeq 0{,}5\div 1{,}0\,. \tag{23}$$

Подставляя это значение $\varkappa_0$ в (8) и используя эмпирическую зависимость (21), получаем для $S(\varkappa)$ уравнение

$$\Gamma_0^2=\int\limits_0^{\alpha k} S(\varkappa)\varkappa^3\,d\varkappa=Ak^{1/3}, \tag{24}$$

решение которого имеет вид

$$S(\varkappa) = (A/3\alpha^{1/3})\varkappa^{-11/3}. \tag{25}$$

Учитывая, что $\Gamma_0^2 \ll 1$ при $\lambda \gtrsim 3$ *см* (рис. 4), в формуле (15) можно заменить $\theta' \longrightarrow \theta$ и получить зависимость от длины волны λ диаграммы рассеяния $B(\theta)$ в диффузной области:

$$B(\theta) = \frac{\sigma_\xi(\theta)}{\sigma_z(0)} = \frac{Q(\theta, \varepsilon)\Gamma_0^2}{V_0^2} k^4 S(2k\sin\theta) \sim \lambda^{-2/3}. \tag{26}$$

При этом мы воспользовались для $\sigma(0)$ формулой (22б). На рис. 5 приведены взятые из [1] значения $B(\theta)$ при четырех значениях θ в диффузной области на длинах волн λ=3,6; 23; 68 *см* и 6 *м* (при λ=10 *см* данные о $B(\theta)$ в работе [17] не были получены из-за недостаточного потенциала радиолокатора). Видно, что зависимость $B \sim \lambda^{-2/3}$ (сплошные линии) действительно наблюдается в эксперименте, и, следовательно, в диффузной области частотная зависимость $\sigma(\theta)$ имеет вид $\sigma \sim \lambda^{-1/3}$, так как $\sigma(0) \sim \Gamma_0^{-2} \sim \lambda^{1/3}$. Эти зависимости хорошо согласуются с экспериментальными данными абсолютных измерений $\sigma(\theta)$ на длинах волн 3,8; 23 и 68 *см*, приведенными в [1] (см. рис. 6).

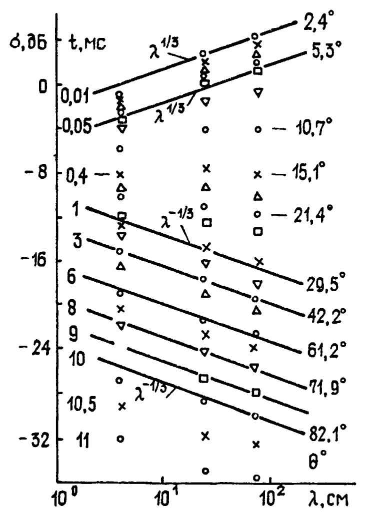

Рис. 6.

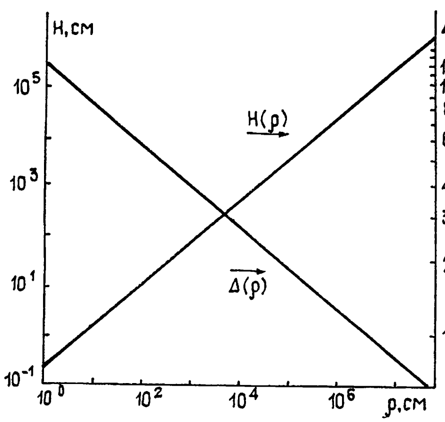

Рис. 7.

Рис. 6. Зависимость сечения обратного рассеяния $\sigma(0)$ от длины волны λ. Значки—экспериментальные данные из [1] для λ = 3,8; 23, 68 *см*.

Рис. 7. Зависимость от базы ρ среднеквадратичной разности высот H и наклонов Δ лунного рельефа со структурной функцией $D = C^2\rho^{5/3}$ (C^2 = 0,051 $см^{1/3}$).

Используя явный вид (25) спектра $S(\varkappa)$, можно получить неравенства на параметр α, следующие из условий применимости двухмасштабной модели (7), (10) и (17):

$$1/kR = (A/7)^{1/2}\alpha\, k^{1/6} \ll 1; \tag{27а}$$

$$(kh)^2 = (A/5\alpha^2)k^{1/3} \ll 1; \tag{27б}$$

$$\gamma^2(k) = (A/3\alpha^{1/3})k^{1/3} \ll 1. \tag{27в}$$

При $A = 0{,}068$ $см^{1/3}$ отсюда получаем

$$\alpha \ll 7{,}47\,\lambda^{1/6}\ см; \tag{28а}$$

$$\alpha^2 \gg 0{,}025/\lambda^{1/3}\ см; \tag{28б}$$

$$\alpha^{1/3} \gg 0{,}042/\lambda^{1/3}\ см. \tag{28в}$$

Видно, что эти неравенства выполняются с большим запасом при $\alpha \simeq 1$ для сантиметровых и более длинных радиоволн. Заметим, что некоторая неопределенность в выборе значения параметра α практически не сказывается на амплитуде спектра $S(\varkappa)$, так как в формулу (25) α входит в степени 1/3. В дальнейшем при численных оценках мы будем полагать $\alpha=1$.

5. Структурная функция. Случайное поле $\zeta(\boldsymbol{r})$, имеющее пространственный спектр $S(\varkappa)\sim\varkappa^{-11/3}$, нельзя считать однородным — корреляционная функция (2), связанная с $S(\varkappa)$ соотношением (3), для такого поля не существует, так как соответствующий интеграл, обращающий (3), расходится. Однако однородным является поле его первых приращений $\zeta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})-\zeta(\boldsymbol{r})$ (ср. [12], гл. 1), так как существует не зависящая от $\boldsymbol{r}$ структурная функция

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{\rho}) &= \langle[\zeta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho})-\zeta(\boldsymbol{r})]^2\rangle = \\ &= 2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} S(\boldsymbol{\varkappa})\,[1-e^{i\boldsymbol{\varkappa\rho}}]\,d^2\boldsymbol{\varkappa} = C^2\rho^{5/3}. \end{aligned} \tag{29}$$

Здесь C — так называемая структурная постоянная, которая связана с ранее введенными параметрами A и α соотношением

$$C^2 = 0{,}748\ A/\alpha^{1/3} \simeq 0{,}051\ см^{1/3}. \tag{30}$$

Обратное по отношению (29) преобразование приводит к спектру

$$S(\varkappa) = 0{,}446\,C^2\varkappa^{-11/3}. \tag{31}$$

Знание структурной функции позволяет получить простые формулы для среднеквадратичной разности высот H рельефа поверхности $\zeta(\boldsymbol{r})$ в двух точках, разнесенных на расстояние ρ, или углов наклона Δ на этой же базе:

$$H(\rho) = \sqrt{D(\rho)} = C\,\rho^{5/6},\quad \Delta = \operatorname{arctg}(H/\rho). \tag{32}$$

Численные значения этих параметров приведены на рис. 7 для $C^2 = 0{,}051\ см^{1/3}$. Строго говоря, формулы (32) получены лишь для тех значений ρ, которые соответствуют длинам волн λ, применявшимся в радиолокационных исследованиях ($3\ см<\lambda<10\ м$). Однако из рис. 7 видно, что даже очень далекая экстраполяция зависимостей (32) приводит к разумным значениям ($H\simeq 1{,}5\ км$ при $\rho\simeq 100\ км$). Расстояние ρ_0, при котором $\zeta(\boldsymbol{r})$ и $\zeta(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\rho}_0)$ не коррелируют, определяется соотношением $D(\rho_0)=2\langle\zeta^2\rangle$. Из гипсометрической кривой, построенной для поверхности Луны в [21], следует оценка дисперсии $\langle\zeta^2\rangle^{1/2}\simeq 2{,}4\ км$, что приводит к оценке радиуса корреляции лунного рельефа $\rho_0\simeq 260\ км$.

6. Заключение. Авторы обзора [1], используя для интерпретации экспериментальных зависимостей $\sigma(\theta)$ только метод касательной плоскости для поверхности с экспоненциальной функцией корреляции $W(\rho)=h_0^2\exp(-\rho/d_0)$ (см., например, [19]), смогли подобрать эмпирические константы h_0 и d_0 так, что теоретические и экспериментальные зависимости $\sigma(\theta)$ практически совпали на длинах волн $\lambda=23$ и $68\ см$ (при этом параметры h_0 и d_0, дающие наилучшее согласие с экспериментом, оказались зависящими от длины волны!). Определив далее «эффективные» углы наклона на базе, зависящей от длины волны, и привлекая качественные соображения о фильтрации мелкомасштабных шероховатостей поверхности, они пришли к выводу, что в диапазоне длин волн от 23 *см* до 68 *см* имеет место зависимость $S(\varkappa)\sim\varkappa^{-3,7}$, практически совпадающая с (25). Однако следует заметить, что такой вид пространственного спектра противоречит исходным посылкам теории: выбор экспоненциальной корреляционной функции* тем самым однозначно определяет и вид спектра $S(\varkappa)\sim[1+(\varkappa d)^2]^{-3/2}$.

Из приведенного выше анализа видно, что зависимость $S(\varkappa)\sim\varkappa^{-11/3}$ имеет место в значительно более широком диапазоне изменения масштабов (более семи октав!) и позволяет объяснить с единой точки зрения по меньшей мере три экспериментальных факта:

1) частотную зависимость $\sigma(0)\sim\lambda^{1/3}$;

2) поведение $\sigma(\theta)$ в квазизеркальной области $\theta\lesssim 15\div30^\circ$ и, в частности, уменьшение ширины $\delta\theta$ диаграммы обратного рассеяния $B(\theta)$ с ростом длины волны — $(\delta\theta)^2\sim\lambda^{-1/3}$;

3) зависимость от длины волны $B\sim\lambda^{-2/3}$, $\sigma\sim\lambda^{-1/3}$ в диффузной области $\theta\gtrsim 15\div30^\circ$. Заметим также, что при этом не возникает необходимости во введении каких-либо гипотез о зависимости диэлектрической проницаемости ε от λ или построении сложных моделей приповерхностного слоя с ε, зависящим от глубины, — все наблюдаемые в эксперименте частотные зависимости получают естественную интерпретацию только как результат дифракции на недиспергирующей и и однородной ($\varepsilon=\mathrm{const}$) шероховатой поверхности со степенным спектром $S(\varkappa)\sim\varkappa^{-11/3}$ или структурной функцией $D(\rho)\sim\rho^{5/3}$.

Определенная выше структурная функция $D(\rho)=C^2\rho^{5/3}$ характеризует шероховатость лунного рельефа «в среднем». По-видимому, если подобную обработку радиолокационных данных провести отдельно для морфологически различных районов (например, морей и материков), то может получиться, вообще говоря, другая зависимость. Во всяком случае, известно (см., например, [2, 3]), что дисперсии наклонов поверхности Луны в областях, занятых материками и морями, существенно различны. Возможно, однако, что зависимость $D=C^2\rho^{5/3}$ является универсальной, а различные типы рельефа отличаются лишь значением структурной постоянной C, как это имеет место, например, в теории турбулентности, где в широком диапазоне масштабов справедлив закон «двух третей» ($D\sim\rho^{2/3}$) для структурных функций флуктуаций скорости, температуры и других параметров, а степень развитости турбулентности (здесь — степень шероховатости рельефа) характеризуется лишь одним числом — структурной постоянной C.

Наконец, заметим, что приведенная выше интерпретация экспериментальных данных $\sigma(\theta)$ относится только к диапазону достаточно длинных радиоволн ($\lambda\gtrsim 3$ *см*), когда диффузная компонента в радиолокационном сигнале значительно слабее зеркальной. И хотя неравенства (28а) — (28в) выполняются и для миллиметрового диапазона, однако при этом дисперсия наклонов Γ_0 становится довольно значительной (для $\lambda=0{,}86$ *см* из (24) имеем $\operatorname{arctg}\Gamma_0\simeq 20^\circ$), и формула (15), описывающая диффузную компоненту $B(\theta)$, уже не упрощается до вида (26) — необходимо проводить явное усреднение по Γ в (15). Кроме того, поведение спектра $S(\varkappa)$ в области столь малых пространственных масштабов может заметно отличаться от установленного выше степенного закона.

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить С. Я. Брауде, обратившего мое внимание на близость рассмотренного выше круга вопросов к задаче об определении параметров морского волнения методами радиоокеанографии.

---

* Модель мелкомасштабной поверхности с $W(\rho)$ в виде суммы экспоненциальных корреляционных функций [20] практически ничего не изменяет в этой схеме, а дает только дополнительные подгоночные параметры.

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans J. V., Hagfors T. — Adv. Astron. Astrophys., 1971, **8**, p. 29 (русск. пер в сб. Планеты и спутники. — М.: Мир, 1974, с 490).
2. Крупенио Н. Н. Радиолокационные исследования Луны. — М.: Наука, 1971.
3. Крупенио Н. Н. Радиофизические исследования планет. — М.: Наука, 1978.
4. Hagfors T.— Adv. Astron. Astrophys., 1971, **8**, p. 1 (русск. пер в сб. Планеты и спутники. — М.: Мир, 1974, с. 458).
5. Bass F. G. et al — IEEE Trans., 1968, **AP-16**, № 5, p. 554.
6. Фукс И. М. — Акуст. журн. 1974, **20**, № 3, с. 458
7. Калмыков А. И. и др. Препринт ИРЭ АН УССР, № 71, Харьков, 1976.
8. Bass F. G., Braude S. Ya et al. — IEEE Trans., 1977, **AP-25**, № 1, p. 43.
9. Лемента Ю. А., Фукс И. М. — Изв. вузов — Радиофизика, 1978, **21**, № 3, с. 379, 1979, **22**, № 4, с. 503.
10. Радиоокеанографические исследования морского волнения. — Сб. статей под ред. С. Я. Брауде — Киев: АН УССР, 1962.
11. Evans J. V, Hagfors T. Radar Astronomy, 1968, № 4.
12. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. — М: Наука, 1978.
13. Бреховских Л. М — ЖЭТФ, 1952, **23**, № 3(9), с 275.
14. Исакович М. А. — ЖЭТФ, 1952, **23**, № 3(9), с. 305.
15. Басс Ф. Г., Фукс И. М Рассеяние волн на статистически неровной поверхности — М.: Наука, 1972
16. Басс Ф. Г, Бочаров В Г — Радиотехника и электроника, 1958, **3**, № 2, с. 180.
17. Hughes V A. — Proc Phys Soc, 1961, **78**, p 988
18. Klemperer W. K — J. Geophys. Res., 1965, **70**, № 15, p 3798
19. Evans J. V, Pettengill G H.— J. Geophys Res., 1963, **68**, p. 423.
20. Beckmann P. — J Geophys. Res, 1965, **70**, p 2345.
21. Гаврилов И В. — В сб: Физика Луны и планет. — М: Наука, 1972, с 144

Институт радиофизики и электроники
АН УССР

Поступила в редакцию
31 января 1983 г

STRUCTURE FUNCTION OF THE LUNAR RELIEF ACCORDING TO RADAR DATA

I. M. Fuchs

The radar cross-section $\sigma(\theta)$ of the lunar surface has been analysed as a function of the angle of wave incidence, θ, and wavelength, λ, for 3.6 cm $\leqslant \lambda \leqslant 6$ m. As has been found, the measured dependence of σ at $\theta \rightarrow 0$ can be satisfactorily approximated by the power law $\sigma(0) \sim \lambda^{1/3}$ while the angular width $\delta\theta$ of the backscatter pattern, $B(\theta) = \sigma(\theta)/\sigma(0)$, varies as $\delta\theta \sim \lambda^{-1/6}$ for $0 \leqslant \theta < 15°$ to $30°$. At larger angles of incidence (namely, $30° \leqslant \theta < 80°$) the two values behave as $\sigma(\theta) \sim \lambda^{-1/3}$ and $B(\theta) \sim \lambda^{-2/3}$. Theoretically, these dependences can be understood as a result of radio wave diffraction by a rough surface with the structure function $D(\rho) = C^2\rho^{5/3}$ where $D(\rho)$ is the mean square of a height difference between two points of the surface relief separated by a distance ρ. The corresponding spatial spectrum $S(\varkappa)$, i. e. the mean square of the spatial harmonic amplitude for the period $\Lambda = 2\pi/\varkappa$, has the form $S(\varkappa) = 0.446\ C^2\varkappa^{-11/3}$ with the value of the structure constant $C^2 = 0.051$ cm$^{1/3}$.